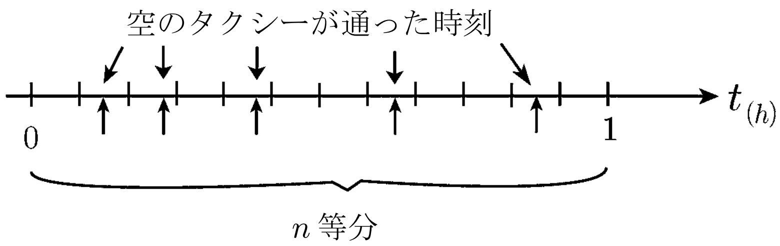
< ポアソン分布 1 >

例 5　＜ポアソン分布＞

　ある通りで空のタクシーが通る回数を調べたら，平均すると 1 時間に λ 回であった。空のタクシーがいつ通るかはまったく偶然であるが，微小時間に 2 台以上通ることはほとんどないとする。このとき 1 時間に通る空のタクシーの台数を X として，確率 $P(X=k)$ を求めたい。

　1 時間を n 等分して，微小時間に分ける。



　n を大きくすれば各時間帯は 2 台以上通らない。すなわち 1 台通るか通らないかどちらかである。$\dfrac{1}{n}$ 時間に空のタクシーが通る回数は平均 $\dfrac{\lambda}{n}$ 回であるから，この時間帯に空のタクシー 1 台が通る確率は $\dfrac{\lambda}{n}$ と考えてよい。各時間帯で空のタクシーが通るかどうかは無関係だから，独立に起こる。従って X は成功確率 $\dfrac{\lambda}{n}$ のベルヌーイ試行を n 回くり返したときの成功回数と同じであるから，二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{\lambda}{n}\right)$ に従う。よって確率は

$$P(X=k) = {}_nC_k\ \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times 1 \times \left(1-\frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \times \left\{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}}\right\}^{-\lambda} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$