

< パスカル分布 >

例3 <パスカル分布=負の二項分布>

成功確率 p ($0 < p < 1$) のベルヌーイ試行で, r 回成功するまでの失敗回数を X とすると

$$P(X = k) = {}_{r+k-1}C_k p^r (1-p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。この分布を**パスカル分布**または**負の二項分布** $NB(r, p)$ という。

負の二項分布 (*negative binomial distribution*) と呼ばれ

るのは, $f(x) = (1-x)^{-r}$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned} (1-x)^{-r} &= 1 + \frac{r}{1!}x + \frac{(r+1)r}{2!}x^2 + \frac{(r+2)(r+1)r}{3!}x^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{r+k-1}C_k x^k \quad (\text{負の二項展開}) \end{aligned}$$

が**負の二項展開**と呼ばれるからである。この平均と分散は

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k {}_{r+k-1}C_k p^r (1-p)^k = \frac{r(1-p)}{p} \quad : \text{平均}$$

$$V[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{r(1-p)}{p} \right)^2 {}_{r+k-1}C_k p^r (1-p)^k = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad : \text{分散}$$

となる。

右図は $p = \frac{1}{6}$, $r = 5$ の

場合のパスカル分布

$$P = P(x = k) = {}_{k+4}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

を棒グラフとしたものである。

