

基礎数学ワークブック

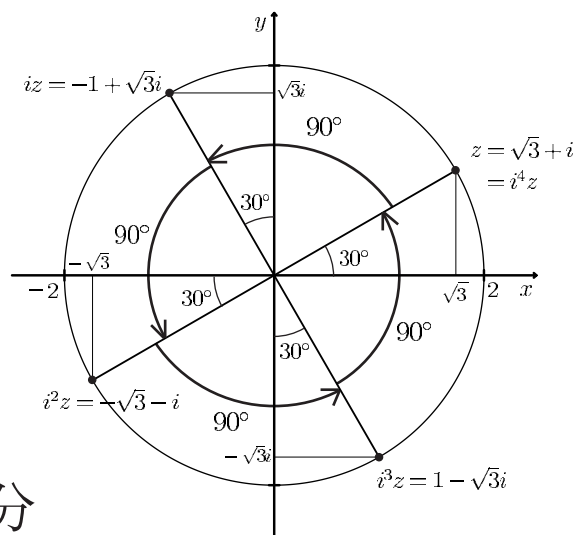
初級編

No. 5

(2004年度版)

内容

- ◎ 複素数
- ◎ オイラーの公式
- ◎ 複素数値関数の微積分



井上 昌昭 著

< 実数 >

自然数 (natural number) の全体を \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

整数 (integer) の全体を \mathbf{Z} .

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

で表す。また整数 a, b の比 (ratio) $\frac{b}{a}$ で表される
分数を有理数 (rational number) といい、有理数の
全体を \mathbf{Q} で表す。

(注) 有限小数および循環小数は分数で表されるので有理数である。
逆に全ての有理数は有限小数か循環する無限小数で表される。

例 1 $\frac{3}{8} = 0.375$, $\frac{5}{12} = 0.41666\dots = 0.41\dot{6}$, $\frac{3}{11} = 0.27272727\dots = 0.2\dot{7}$

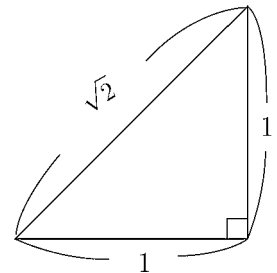
問 1 次の分数を小数になおせ。

(1) $\frac{5}{8}$

(2) $\frac{1}{15}$

(3) $\frac{2}{11}$

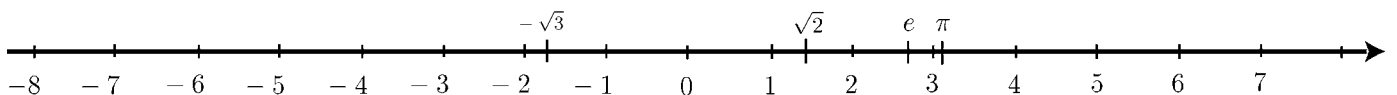
例 2 2 の平方根 $\sqrt{2}$ は右図の直角三角形の斜辺の長さ
であるが これは有理数 (整数の比) ではないことがわ
かっている。このような数を無理数 (irrational number)
という。



有理数と無理数を総称して実数 (real number) とよぶ。
実数全体の集合を \mathbf{R} で表す。

$$\left. \begin{array}{l} \text{自然数 } (\mathbf{N}) \\ \text{有理数 } (\mathbf{Q}) \\ \text{無理数 } \dots \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{2} (\text{立方根}), \pi (\text{円周率}), e (\text{自然対数の底}) \text{ など} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{整数 } (\mathbf{Z}) \\ \text{分数} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{正の整数} = \text{自然数 } (\mathbf{N}) \\ \text{零 } 0 \\ \text{負の整数} \end{array} \right\}$$

問 2 $\sqrt{3}$, $-e$, 2π , $-3\sqrt{2}$ を数直線上の点として表示せよ。



< 虚数の導入 (1) >

2 次方程式

$$(1) \quad x^2 = -1$$

をみたす実数 x は存在しない。しかし、この方程式を満足する数、つまり 2 乗すれば -1 となるような新しい数があるものと考え、それを i という記号で表すことにする。すなわち

$$i^2 = -1$$

である。

さらにこの新しい数 i に対しても、いままでの計算の規則が成り立つと考えることにする。そうすれば

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

であるから

$$x^2 = -1 \text{ の解は } i \text{ と } -i \text{ の 2 つである}$$

と考えられる。

次に 2 次方程式

$$(2) \quad x^2 = -9$$

を考える。この式の両辺を 3^2 で割ると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -1$$

であるから、いま導入した i を用いて

$$\frac{x}{3} = \pm i$$

より (2) の解は

$$x = 3i \quad \text{および} \quad x = -3i$$

という新しい数であるとするのがいいであろう。

問 次の 2 次方程式の解を i を用いて表せ。

$$(1) \quad x^2 = -16$$

$$(2) \quad 4x^2 = -25$$

$$(3) \quad 6x^2 = -2$$

< 虚数の導入 (2) >

2 次方程式

$$(*) \quad x^2 - 2x + 10 = 0$$

を考える。この式の両辺から 9 を引くと

$$x^2 - 2x + 1 = -9$$

$$(x - 1)^2 = -9$$

となる。ここで

$$x - 1 = X$$

とおくと

$$X^2 = -9$$

となるから、前ページの i を用いて

$$X = 3i \quad \text{および} \quad X = -3i$$

すなわち

$$x - 1 = 3i \quad \text{および} \quad x - 1 = -3i$$

より (*) 式の解は、新しい数

$$x = 1 + 3i \quad \text{および} \quad x = 1 - 3i$$

であると考えるのがいいであろう。

このような数

$$i, -i, 3i, -3i, 1 + 3i, 1 - 3i$$

等を総称して **虚数** と呼ぶ。2 次方程式の解の範囲を虚数にまで拡張すれば、2 次方程式は必ず解が存在する。

問 次の 2 次方程式の解を i を用いて表せ。(ただし a, b, c は実数)

$$(1) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -3$$

$$(2) x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$(3) (x - a)^2 = -\frac{c^2}{b^2}$$

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。(電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。)

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** (*complex number*) とよび、複素数全体の集合を \mathbf{C} という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** (*real part*) および **虚部** (*imaginary part*) とよび、

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

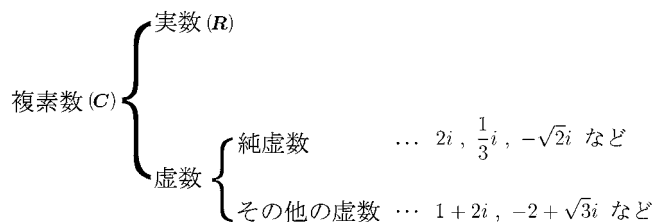
という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき } z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、 z を **虚数** とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。



2つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、2つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに } a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

例 (1) $a + bi = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3}, \quad b = 0$

(2) $a + bi = -3i \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, \quad b = -3$

(3) $a + bi = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1) $a + bi = \frac{1 + 3i}{2}$

(2) $a + bi = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} i$

< 複素数の四則演算 (1) >

複素数の和 (差) は実部どうしの和 (差) と虚部どうしの和 (差) にわけて計算すればよい。

a, b, c, d が実数のとき

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

例 1 $(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i$
 $(5 + 7i) - (8 + i) = (5 - 8) + (7 - 1)i = -3 + 6i$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $(2 + i) + (3 - i)$

=

(2) $(4 - i) - (5 - 3i)$

=

(3) $\left(0.13 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{4} - 1.5i\right)$

=

(4) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}i\right)$

=

(5) $(\sqrt{3} - i) + (\sqrt{1} - 2i)$

=

(6) $\left(\frac{1}{4} - \sqrt{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}i\right)$

=

複素数の実数倍は、実部と虚部のそれぞれの実数倍となる。

a, b, k が実数のとき

$$k(a + bi) = (ka) + (kb)i$$

例 2 $2(1 + 4i) + 5(3 - 2i) = (2 + 8i) + (15 - 10i) = 17 - 2i$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $3(4 + i)$

=

(2) $6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)$

=

(3) $3(6 - 2i) - 4(2 - i)$

=

(4) $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}i\right) + \left(\frac{1}{3} - 2i\right)$

=

< 複素数の四則演算 (2) >

複素数どうしの積は通常の数則 (分配法則) によって計算すればよいが、 i^2 が出たところで $i^2 = -1$ とおきかえて答を出す。

例

$$\begin{aligned} (1) \quad (3 + 4i)(5 + 7i) &= 3 \times 5 + 3 \times 7i + 4i \times 5 + 4i \times 7i \\ &= 15 + 21i + 20i + 28i^2 \\ &= 15 + 41i - 28 \\ &= -13 + 41i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (3 + 5i)^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 5i + (5i)^2 \\ &= 9 + 30i + 25i^2 \\ &= 9 + 30i - 25 \\ &= -16 + 30i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (2 + 5i)^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times 5i + 3 \times 2 \times (5i)^2 + (5i)^3 \\ &= 8 + 60i + 150i^2 + 125i^3 \\ &= 8 + 60i - 150 + 125(i^2 \times i) \\ &= -142 + 60i - 125i \\ &= -142 - 65i \end{aligned}$$

問 次式を簡単にせよ。

$$(1) \quad i^3 = \qquad (2) \quad i^4 = \qquad (3) \quad i^5 =$$

$$(4) \quad i^6 = \qquad (5) \quad i^7 = \qquad (6) \quad i^8 =$$

$$(7) \quad (1 + i)(1 - i) = \qquad (8) \quad (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) =$$

$$(9) \quad \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) = \qquad (10) \quad (-1 + i)^2 =$$

$$(11) \quad (-1 - i)^2 = \qquad (12) \quad (4 + 2i)(2 - 3i) =$$

$$(13) \quad (3 - 2i)(1 - 3i) = \qquad (14) \quad (3 - i)^3 =$$

< 複素数の四則演算 (3) >

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

例

$$(1) \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$(2) \frac{1}{2+3i} = \frac{1 \times (2-3i)}{(2+3i) \times (2-3i)} = \frac{2-3i}{4-(3i)^2} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

$$(3) \frac{2+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(2+i) \times (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \times (1+\sqrt{3}i)} = \frac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{4}\right)i$$

問 次式を簡単にせよ。

$$(1) \frac{-1}{1+i} =$$

$$(2) \frac{-1}{1-i} =$$

$$(3) \frac{-i}{1-i} =$$

$$(4) \frac{3}{\sqrt{5}-i} =$$

$$(5) \frac{7}{3+\sqrt{5}i} =$$

$$(6) \frac{-i}{1+i} =$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{3}i(\sqrt{3}+i)} =$$

$$(8) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} =$$

$$(9) \frac{1}{(\sqrt{2}-i)^2} =$$

$$(10) \frac{i}{(1+i)^4} =$$

< 負の数の平方根 >

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}i)^2 = -2, \quad (-\sqrt{2}i)^2 = -2$$

となるから、 -2 の平方根は $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i, \quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}i$$

のように表すことにする。一般に

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

と定める。

例 1 $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

(注) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)} (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになるときは、普通の $\sqrt{\quad}$ の計算規則がなりたたない。 $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになる場合は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例 2 $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2 \times i}{3i \times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}i = \frac{2}{3}i$$

従って $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\frac{4}{-9}}$ である。

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(-3) \times (-4) \times (-5)}$

(2) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-5}$

(3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$

(4) $\sqrt{\frac{12}{-4}}$

< 2 次方程式 >

実数 a, b, c ($a \neq 0$) に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が求まる。ここで $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになれば、答は虚数になる。虚数解も 2 次方程式の解と考えると、2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例 2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問 次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^2 + x + 2 = 0$ $x =$

(2) $x^2 + 3x + 9 = 1$ $x =$

(3) $3x^2 - 5x + 4 = 0$ $x =$

< 2次式の因数分解 >

例 1 2次式 $2x^2 - 16x + 30$ を因数分解すると

$$(*) \quad 2x^2 - 16x + 30 = 2(x^2 - 8x + 15) = 2(x - 3)(x - 5)$$

となる。ところで2次方程式

$$(**) \quad 2x^2 - 16x + 30 = 0$$

の解は前ページの解の公式を使うと

$$x = 3 \quad \text{および} \quad x = 5$$

であるから、因数分解(*)を求めるために、2次方程式(**)の解3と5を用いればよい。

一般に、2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は実数}, a \neq 0)$$

の解が

$$x = \alpha \quad \text{および} \quad x = \beta$$

ならば

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる。

例 2 2次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

の解は解の公式を使うと

$$x = -\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \quad \text{および} \quad x = -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

であるから

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 7 &= 3 \left(x - \left(-\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \right) \left(x - \left(-\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \right) \\ &= 3 \left(x + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \left(x + \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \end{aligned}$$

問 次の2次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2x + 5 =$

(2) $-5x^2 + 4x - 3 =$

(3) $3x^2 - 3x + 3 =$

< 高次式の因数分解 >

例 1 3 次式 $x^3 - 8$ は因数分解の公式

$$\begin{array}{l} x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \\ x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \end{array}$$

によって

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

と因数分解できるが、

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

の解が、解の公式より

$$x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

であるから、

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

と因数分解できるから、複素数の範囲では

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

まで因数分解できる。

例 2 4 次式 $x^4 - 16$ は、実数の範囲では

$$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2)^2 - (4)^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

のように因数分解できるが、複素数の範囲では

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

まで因数分解できる。

問 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^3 - 1$

(2) $x^3 + 8$

(3) $x^4 - 1$

< 高次方程式 >

例 1 3 次方程式

(1)
$$x^3 - 8 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 1 - \sqrt{3}i = 0, \quad x + 1 + \sqrt{3}i = 0$$

のいずれかであるから、(1) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -1 + \sqrt{3}i, \quad x = -1 - \sqrt{3}i$$

となる。

例 2 4 次方程式

(2)
$$x^4 - 16 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0, \quad x - 2i = 0, \quad x + 2i = 0$$

のいずれかであるから、(2) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -2, \quad x = 2i, \quad x = -2i$$

となる。

一般に n 次式は、複素数の範囲では、 n 個の一次式の積に因数分解される。(代数学の基本定理)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \quad (z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ は複素数})$$

問 次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)
$$x^3 - 1 = 0$$

(2)
$$x^3 + 27 = 0$$

(3)
$$x^4 - 1 = 0$$

< 共役複素数 >

$$3 + 2i \text{ と } 3 - 2i, \quad 1 - \sqrt{3}i \text{ と } 1 + \sqrt{3}i$$

のように、虚部の符号だけが違う 2 つの複素数を **互いに共役** (きょうやく) という。一方は他方の **共役複素数** という。複素数 z の共役複素数を \bar{z} で表す。すなわち、実数 a, b に対し、

$$z = a + bi \text{ のとき } \bar{z} = a - bi$$

である。従って \bar{z} の共役複素数は $\overline{\bar{z}} = a + bi$ であるから

$$\overline{\bar{z}} = z$$

である。

例 (1) $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$, $\overline{-1 - \sqrt{2}i} = -1 + \sqrt{2}i$

(2) $\overline{4} = 4$, $\overline{-5i} = 5i$

(3) $z = 3 + 2i$ のとき $\bar{z} = 3 - 2i$

$$z + \bar{z} = (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$$

$$z\bar{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$$

問 1 以下の複素数 z に対し、共役複素数 \bar{z} を求めよ。

(1) $z = 1$, $\bar{z} =$ (2) $z = i$, $\bar{z} =$

(3) $z = 1 - i$, $\bar{z} =$ (4) $z = \frac{1+i}{2}$, $\bar{z} =$

問 2 $z = 4 + 3i$ に対し、次式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ (2) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ (3) $z\bar{z}$

=

=

=

問 3 実数 a, b に対し、 $z = a + bi$ とする。以下の値を a と b で表せ。

(1) $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ (2) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ (3) $z\bar{z}$

=

=

=

< 絶対値 >

複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) に対し、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の **絶対値** という。

例 1 $z = 3 + 2i$ のとき

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

問 1 複素数 z が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z = -1$

(2) $z = 7i$

(3) $z = 3 + 4i$

(4) $z = \frac{1+i}{2}$

$|z| =$

$|z| =$

$|z| =$

$|z| =$

前ページの結果より複素数 $z = a + bi$ に対して

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

が成り立つ。

例 2 $z = 2 + 3i$ のとき

$$|z|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i - 3^2 = -5 + 12i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

問 2 以下の複素数 z に対して、 $|z|^2, z^2, |z^2|$ を求めよ。

(1) $z = 4 - 3i$

(2) $z = 1 + i$

$|z|^2 =$

$|z|^2 =$

$z^2 =$

$z^2 =$

$|z^2| =$

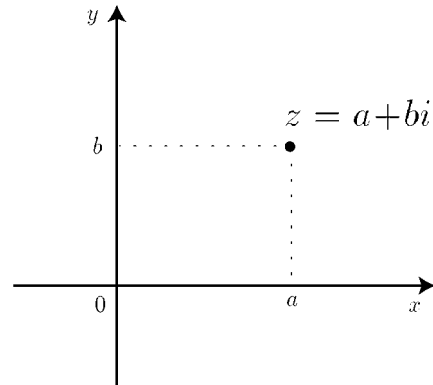
$|z^2| =$

< 複素平面 (1) >

定数が数直線上の点で表されたように、複素数を平面上の点として表現する。実数 a, b に対し、複素数

$$z = a + bi$$

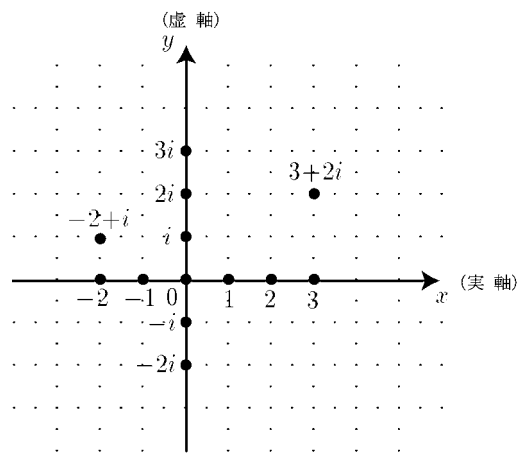
を、右図のように、 x 軸上の目もりが a, y 軸上の目もりが b である xy 平面上の点として表す。この平面を **複素平面** または **ガウス平面** という。



例 1 右図のように

実数 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ は全て x 軸上に並んでいる。この x 軸を **実軸** という。

純虚数 $-2i, -i, i, 2i, 3i$ は全て y 軸上に並んでいる。この y 軸を **虚軸** という。



問 1 例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

- (1) $1 + i$, (2) $2 - 2i$, (3) $-3 + 3i$, (4) $-2 - 3i$

例 2 a, b を正の数とすると複素数 $z = a + bi$ は右図の位置にあり、共役複素数

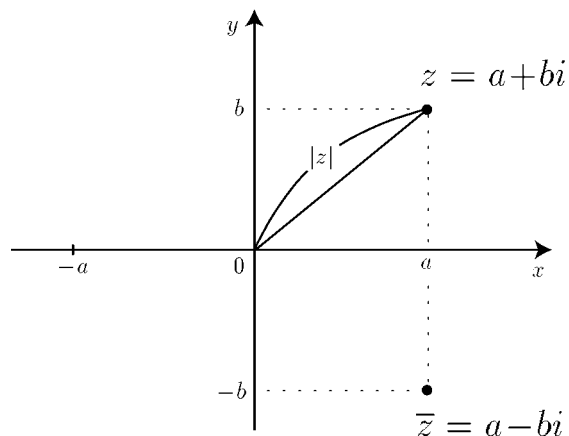
$$\bar{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。

また、絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。



問 2 例 2 の右図上に $-z$ および $-\bar{z}$ を図示せよ。

< 複素平面 (2) >

例 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$

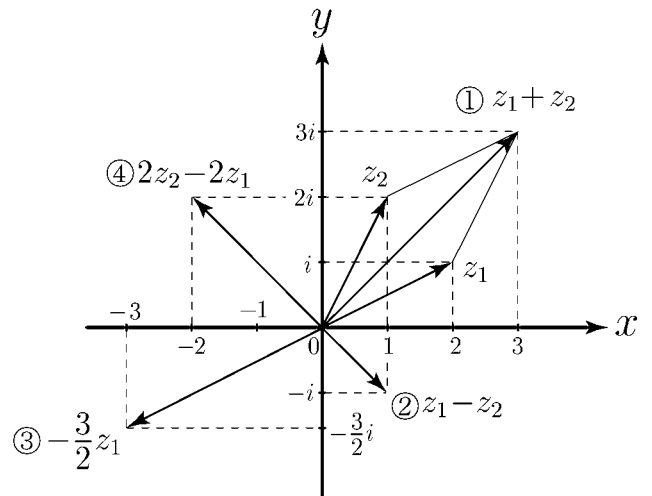
のとき以下の複素数

① $z_1 + z_2 = 3 + 3i$

② $z_1 - z_2 = 1 - i$

③ $-\frac{3}{2}z_1 = -3 - \frac{3}{2}i$

④ $2z_2 - 2z_1 = (2 + 4i) - (4 + 2i)$
 $= -2 + 2i$



を複素平面上に表すと右図のようになる。

①は z_1 と z_2 の和である。右図から四点 (原点, z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$) を結ぶと平行四辺形になる。

③は z_1 の $-\frac{3}{2}$ 倍である。 z_1 と原点を結ぶ直線上に $-\frac{3}{2}z_1$ がある。

問 $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 + 3i$

のとき以下の複素数を

計算し、例のように

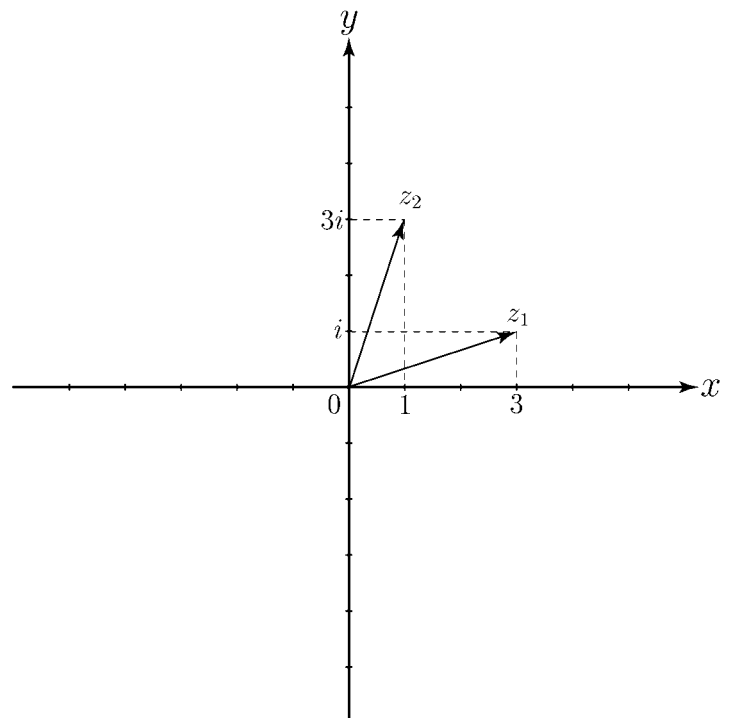
複素平面上に図示せよ。

① $z_1 + z_2 =$

② $z_1 - z_2 =$

③ $-\frac{3}{2}z_1 =$

④ $2z_2 - 2z_1 =$



< 複素数の i 倍 >

複素数の和・差・実数倍はベクトルと同じであるが、複素数倍は別の図形的な意味がある。一般の場合は後で説明するが、このページでは i 倍の図形的な意味を考える。

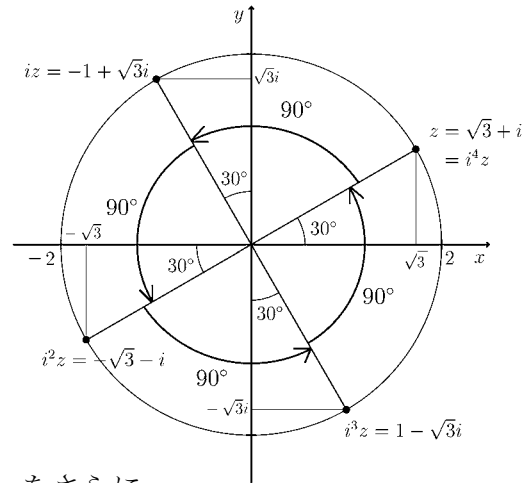
例 $z = \sqrt{3} + i$ に対し

$$iz = i(\sqrt{3} + i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$i^2z = i(iz) = i(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{3} - i$$

$$i^3z = i(i^2z) = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$i^4z = i(i^3z) = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i = z$$



右図より iz は z を原点を中心として反時計まわりに 90° 回転させたものであり、 i^2 は iz をさらに 90° 回転させたものであり、 i^3z は i^2z をさらに 90° 回転させたものであり、 i^4z は i^3z をさらに 90° 回転させたものであるからもとの z にもどる。

問 z が以下の場合に

$$iz, i^2z, i^3z, i^4z$$

を求め、右図に記入せよ。

(1) $z = 1 + i$

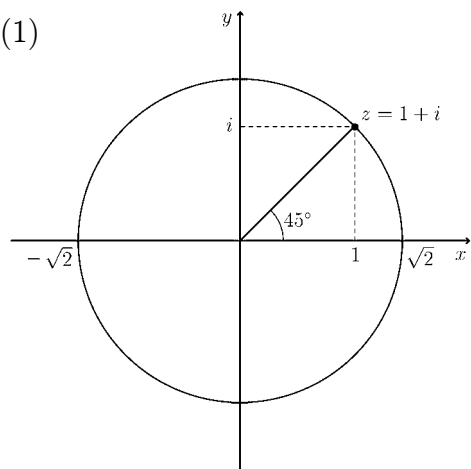
$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$

(1)



(2) $z = 1 + \sqrt{3}i$

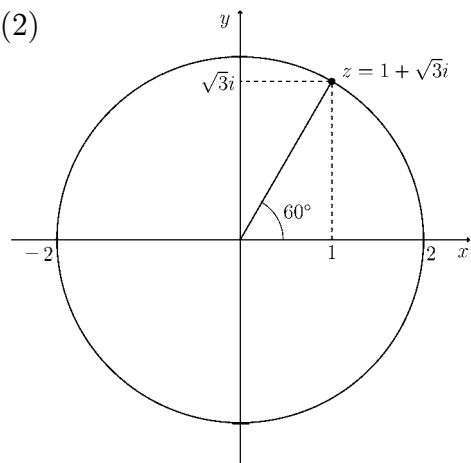
$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$

(2)



< 極座標表示 (1) >

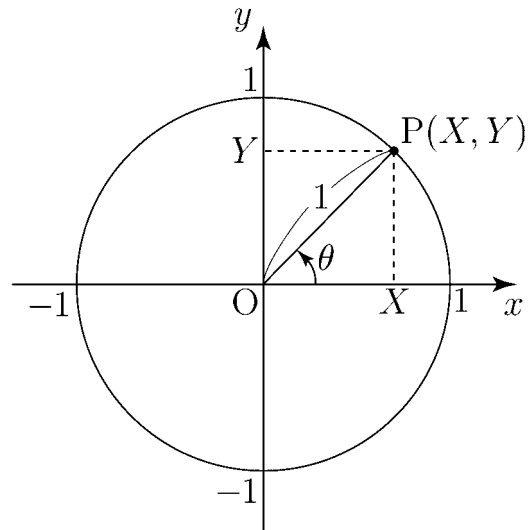
座標平面上の原点 $O(0,0)$ を中心として
半径 1 の円周上の点 $P(X,Y)$ を考える、
角度 θ が右図の場合に、三角関数の
定義から

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta$$

となるから点 $P(X,Y)$ の座標は

$$(X, Y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

と表される。



例 右図は半径 1 の円周上の点の x 軸からの角度
(単位ラジアン) を内側に書き、その点の座標
を外側に書いてある。この図から

$$(0, 1) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

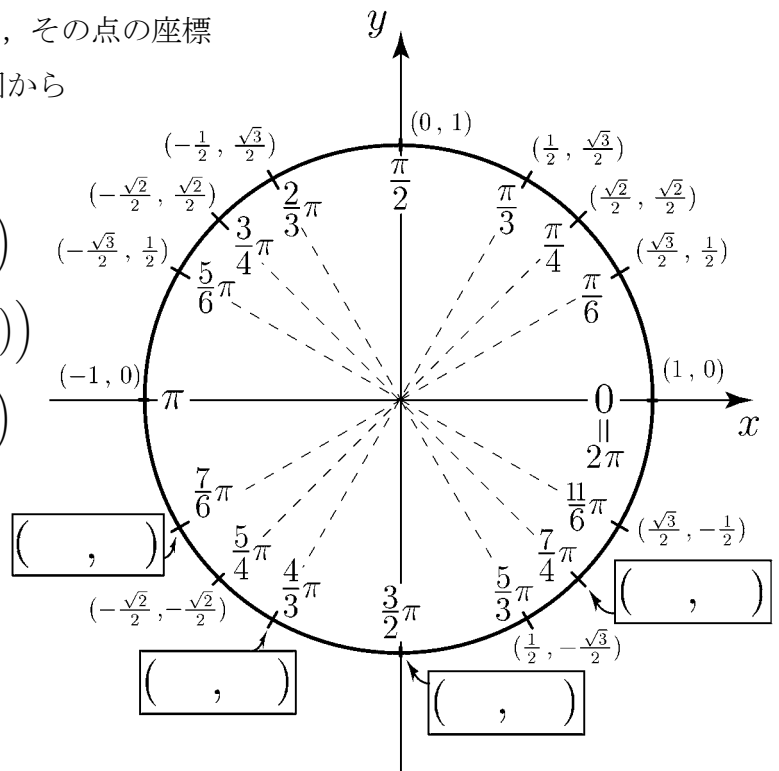
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{6}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{6}\pi \right) \right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{4}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{3}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{3}\pi \right) \right)$$

となる。

問 1 右図の (\quad, \quad) の中に
座標を書け。



問 2 以下の座標を例のように三角関数を使って書きなおせ。

(1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

(3) $(1, 0) =$

(4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) =$

(5) $(0, -1) =$

(6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

< 極座標表示 (2) >

座標平面上の点 $P(a, b)$ は原点 $O(0, 0)$ からの距離が r で, x 軸からの角度が θ (右図) の位置にあるとする。
線分 OA 上に $OP=1$ となるような点 $P(X, Y)$ をとる。前ページより

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta$$

となる。また三角形の相似比 $X : a = Y : b = 1 : r$ より

$$a = rX, \quad b = rY$$

となるから

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

より

$$(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{極座標表示})$$

と表される。 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を (a, b) の極座標表示という。

(注) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

例 (1) 点 $A(-1, 1)$ は図 2 より極座標表示すると

$$(-1, 1) = \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

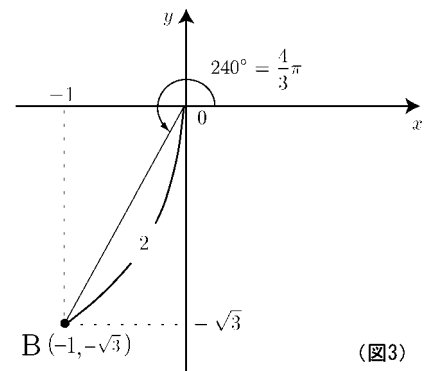
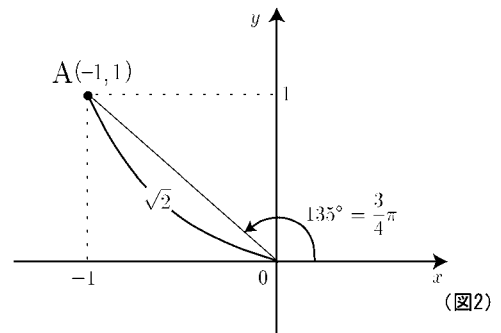
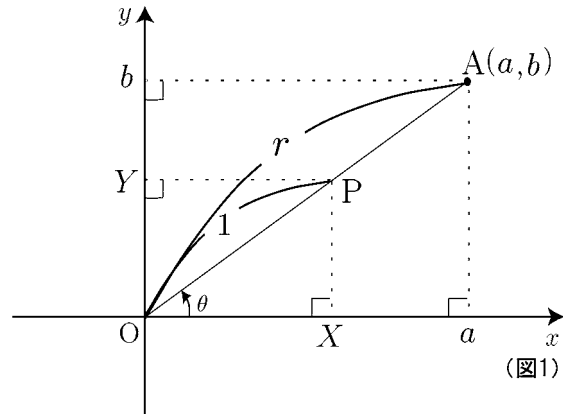
(2) 点 $B(-1, -\sqrt{3})$ は図 3 より

$$(-1, -\sqrt{3}) = \left(2 \cos \left(\frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left(\frac{4}{3}\pi \right) \right)$$

< 検算 > 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

$$\begin{aligned} (1) & \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right) \\ &= \left(\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(2 \cos \left(\frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left(\frac{4}{3}\pi \right) \right) \\ &= \left(2 \times \left(-\frac{1}{2} \right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = (-1, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$



問 次の座標を極座標表示になおせ。

(1) $(3, 3)$

(2) $(1, -\sqrt{3})$

(3) $(-3, \sqrt{3})$

(4) $(-2, -2)$

< 複素数の練習 (1) >

問 1 次式を簡単にせよ。ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする。

(1) $i + i^4 + i^7$

(2) $(i + 1)(i^2 - i + 1)$

(3) $\left(\frac{1+i^3}{2}\right)\left(\frac{1-i^3}{2}\right)$

(4) $\frac{1-i}{1+i}$

(5) $\frac{2}{i - \sqrt{3}}$

(6) $\sqrt{-10} \times \sqrt{-6} \div \sqrt{-105} \times \sqrt{-7}$

問 2 次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $2x^2 - x + 3 = 0$

(2) $x^3 + 1 = 0$

(3) $x^3 - 64 = 0$

(4) $x^4 - 16 = 0$

問 3 $z = 3 + 2i$ に対し、次式を計算せよ。

(1) \bar{z}

(2) $z\bar{z}$

(3) $|z|$

(4) z^2

(5) $|z^2|$

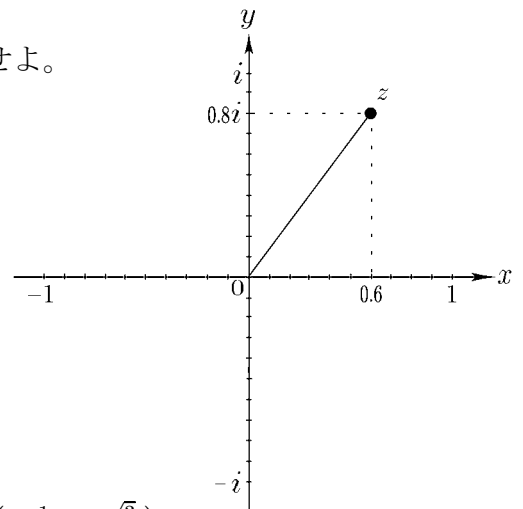
問 4 $z = 0.6 + 0.8i$ に対し、次の複素数を図示せよ。

(1) \bar{z}

(2) iz

(3) i^2z

(4) i^3z



問 5 次の座標を極座標表示になおせ。

(1) $(2, 2\sqrt{3})$

(2) $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

(3) $(-3, 3)$

(4) $(3, -\sqrt{3})$

< 極形式(1) >

複素数 $z = a + bi$ に対し,

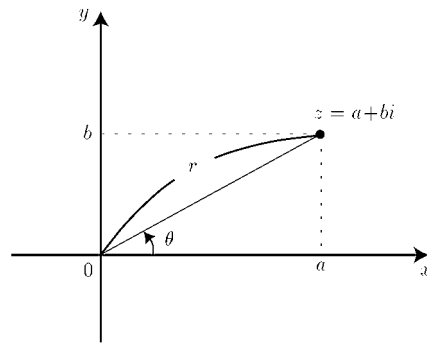
$$|z| = r$$

で, 右図のように x 軸の正の部分からの角度が θ であるとき

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

となる。従って

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{極形式})$$



と表される。これを z の**極形式**という。このとき角 θ は複素数 z の**偏角** といい,

$$\theta = \arg(z)$$

という記号を使うこともある。

例 (1) $z = 3i$ のとき右図より

$$r = |z| = 3, \quad \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

(2) $z = -4$ のとき右図より

$$r = |z| = 4, \quad \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

(3) $z = -2i$ のとき右図より

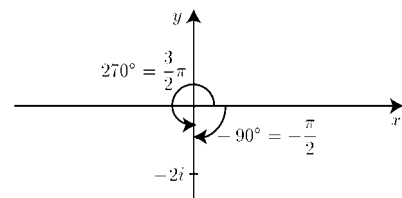
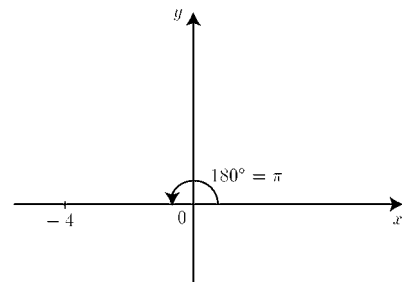
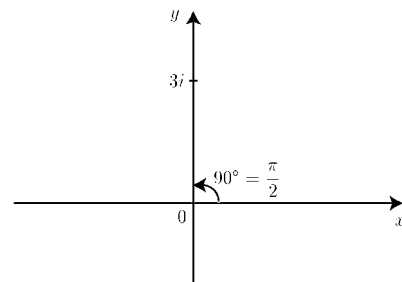
$$r = |z| = 2, \quad \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2 \left(\cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right) \right)$$

(注) 270° の位置と -90° の位置は同じだから

$$-2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \text{ としてもよい。}$$



問 次の複素数を極形式になおせ。

(1) $4i$

(2) -2

(3) $-\sqrt{2}i$

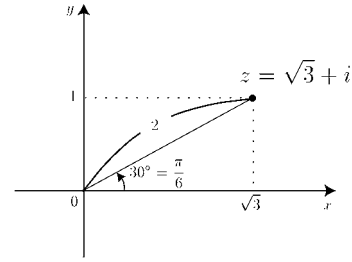
< 極形式(2) >

例 (1) $z = \sqrt{3} + i$ に対し,

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

であり, 右図より $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ だから

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

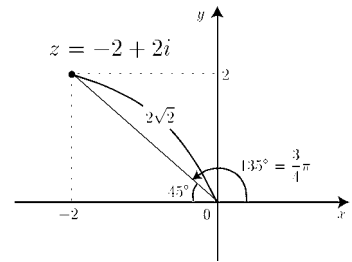


(2) $z = -2 + 2i$ に対し,

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

であり, 右図より $\theta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$ だから

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

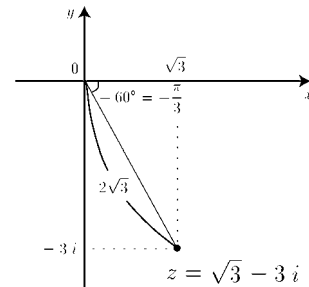


(3) $z = \sqrt{3} - 3i$ に対し,

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

であり, 右図より $\theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$ だから

$$\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$



問 以下の複素数を極形式になおせ。

(1) $z = 1 + i =$

(2) $z = -1 + \sqrt{3}i =$

(3) $z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i =$

(4) $z = -3 - \sqrt{3}i =$

(5) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i =$

< 複素数の積 >

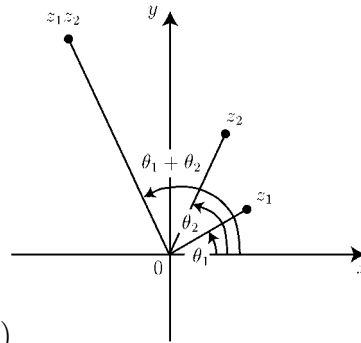
2つの複素数 z_1, z_2 が極形式で

$$z_1 = r_1 \{ \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \}$$

$$z_2 = r_2 \{ \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \}$$

と表されているとき、積 $z_1 z_2$ は

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$



となる。従って

$$z_1 z_2 = r_1 \{ \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \} \times r_2 \{ \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \} = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

(注) 上の計算で三角関数の加法定理

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

を用いた。

例 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

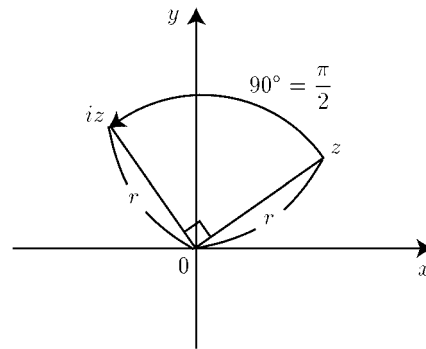
に

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

をかけると、上の式より

$$iz = r \left\{ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

より、右図のように、 iz は z を原点を中心として反時計まわりに $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にある。



問 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対して、以下の複素数の積を極形式で表し、回転の角度を求めよ。

(1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

=

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

=

(3) $i^2 z$

=

< 複素数の商 >

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdots (1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdots (2)$$

に対し,

$$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とおくと

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \times z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

より

$$z_1 = rr_2 \{ \cos(\theta + \theta_2) + i \sin(\theta + \theta_2) \}$$

(1) 式と比較すれば

$$r_1 = rr_2, \theta_1 = \theta + \theta_2$$

だから

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

例 $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

より

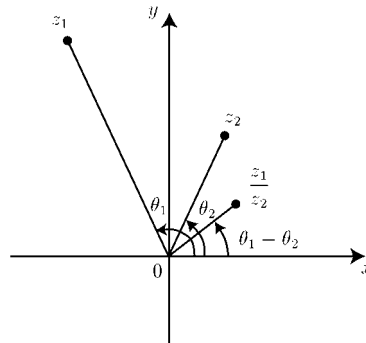
$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right\} \end{aligned}$$

問 次の複素数の商を極形式で表せ。

(1) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} =$

(2) $\frac{2 - 2i}{-1 + i} =$

(3) $\frac{-1 - i}{-\sqrt{3} + i} =$



< ド・モアブルの定理 >

複素数の積で

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

であつた。とくに $r_1 = r_2 = 1$ のときは

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。ここで $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とすれば

$$(1) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

又, $\theta_1 = 2\theta$, $\theta_2 = \theta$ とすれば

$$(2) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \{ \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \} \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

(1) と (2) を一般化すると,

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

が任意の自然数 n に対して成立する。この公式を ド・モアブルの定理 という。

例 $\sqrt{3} + i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}$ だから

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \times \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}^6 = 64 \times \{ \cos(\pi) + i \sin(\pi) \} = -64$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad (-\sqrt{3} + i)^3 =$$

$$(2) \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^6 =$$

$$(3) \quad (1 - i)^4 =$$

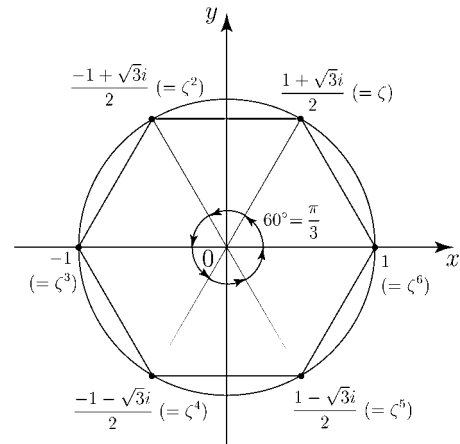
$$(4) \quad \left(\frac{-1 + i}{\sqrt{3} + i} \right)^{12} =$$

< 1 の累乗根 >

例題

$$z^6 = 1$$

をみたす複素数 z をすべて求めよ。



(解) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta))$$

となる。一方 1 を極形式で表すと

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = \dots$$

となる。 z^6 と等しいから

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta)) = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$r = 1, \quad 6\theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。

$$n = 0 \text{ のとき } \quad 6\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$n = 1 \text{ のとき } \quad 6\theta = 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 2 \text{ のとき } \quad 6\theta = 4\pi \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 3 \text{ のとき } \quad 6\theta = 6\pi \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$n = 4 \text{ のとき } \quad 6\theta = 8\pi \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 5 \text{ のとき } \quad 6\theta = 10\pi \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6 次方程式の解は 7 個以上はないから、これがすべての解である。

$$\text{(答) } z = 1, \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad -1, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

(注) $\zeta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} (= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ とすると、 $z^6 = 1$ の解は

$$z = 1, \quad \zeta, \quad \zeta^2, \quad \zeta^3, \quad \zeta^4, \quad \zeta^5$$

となっている。複素平面上では、単位円周を 6 等分する分点である。(右上図参照)

問 次の方程式をみたす複素数 z を全て求め、上図のように単位円周上の点として図示せよ。

(1) $z^3 = 1$

(2) $z^8 = 1$

< オイラーの公式(1) >

指数関数・三角関数のマクローリン展開を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \quad (3)$$

であった。ここで x は実数である。これを虚数まで拡張したい。

実数 θ と虚数単位 i に対し、(1) 式の x のかわりに $i\theta$ を代入すれば、 $i^2 = -1$ だから

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta} \quad (\theta \text{ は実数})$$

が成立する。これを**オイラーの公式**という。

例 $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2\pi i} =$

(2) $e^{-\frac{\pi}{2}i} =$

(3) $e^{\frac{3}{4}\pi i} =$

(4) $e^{\frac{5}{3}\pi i} =$

(5) $e^{-\frac{3}{4}\pi i} =$

(6) $e^{-\frac{\pi}{6}i} =$

< オイラーの公式 (2) >

複素数 z に対し, e の z 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad (= \exp(z))$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。

今 $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき, (詳しい計算は省略するが)

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x + iy) + \frac{(x + iy)^2}{2!} + \frac{(x + iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \times \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (x \text{ と } y \text{ は実数})$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

例 (1) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^2$

(2) $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = e^{-3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{e^3}i$

(3) $e^{\log 2 + \frac{\pi}{6}i} = e^{\log 2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$

(注) $\log 2$ は底が e の対数 (=自然対数) であるから, 対数の定義より

$$x = \log 2 = \log_e 2 \iff e^x = 2$$

よって

$$e^{\log 2} = e^x = 2$$

問 以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2-2\pi i}$

(2) $e^{0+\frac{\pi}{3}i}$

(3) $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

(4) $e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\pi i}$

(5) $e^{\log 2 + \frac{5}{4}\pi i}$

(6) $e^{\frac{1}{3}\log 8 + \frac{\pi}{6}i}$

< 複素数の指数表示 >

複素数 z の絶対値が r ，偏角が θ のとき， z は極形式によって

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される。一方

$$r = e^{\log r}, \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

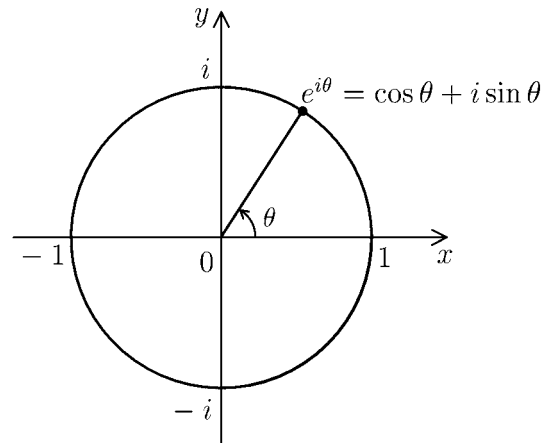
であるから

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{\log r} \times e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

と指数表示できる。特に $r = 1$ のとき $\log 1 = 0$ より

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

となる。このように絶対値が 1 の複素数は指数表示の方が簡単である。



例 1 ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

を指数表示で書くと，

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

と簡単に書ける。

問 1 絶対値が 1，偏角が θ_1 と θ_2 の複素数の積は，24 ページより

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。この式を指数表示で書け。

例 2 $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ ， $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $e^{\frac{3}{2}\pi i} \times e^{\frac{\pi}{2}i} =$

(2) $e^{\frac{4}{3}\pi i} \div e^{\frac{\pi}{6}i} =$

(3) $(e^{\frac{\pi}{8}i})^4 =$

(4) $(e^{\frac{\pi}{48}i})^{12} =$

< 指数法則 >

2つの複素数

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \text{ は実数})$$

に対し,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} &= (e^{x_1} \times e^{iy_1}) \times (e^{x_2} \times e^{iy_2}) = (e^{x_1} \times e^{x_2}) \times (e^{iy_1} \times e^{iy_2}) \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

である。同様に計算すると、以下の指数法則が導ける。

$$\begin{array}{ll} (1) e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2} & (2) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\boxed{}} \\ (3) (e^z)^n = e^{\boxed{}} & (\text{ド・モアブルの定理}) \quad \left(\begin{array}{l} z_1, z_2, z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array} \right) \end{array}$$

問 1 上の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

例 1 $e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^4$, $e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left(e^{1+\frac{\pi}{6}i}\right)^8 = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^8 \left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right) = e^8 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

問 2 次式を計算せよ。

(1) $e^{5+\pi i} \times e^{-1+\pi i}$ (2) $e^{2+\frac{\pi}{4}i} \div e^{6+\frac{\pi}{4}i}$

(3) $\left(e^{\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\pi i}\right)^4$

例 2 $\frac{(e^{\frac{\pi}{10}i})^5 \times (e^{\frac{\pi}{6}i})^8}{(e^{\frac{\pi}{4}i})^6} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = e^{(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2})\pi i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

問 3 次式を計算せよ。

$$\frac{(e^{\frac{\pi}{6}i})^8 \times (e^{\frac{\pi}{12}i})^4}{(e^{\frac{\pi}{4}i})^{10}}$$

< 複素数の簡易表示 >

複素数 $z = a + bi$ の偏角が θ のとき,

極形式によって

$$z = a + bi = |z|\{\cos \theta + i \sin \theta\}$$

と表される。ここでオイラーの公式より

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

であるから

$$z = |z|e^{i\theta}$$

と表される。(ただし $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

例 1 $z_1 = 1 + i$ は偏角 $\frac{\pi}{4}$, 絶対値 $|z_1| = \sqrt{2}$

だから

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

例 2 $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ は偏角 $\frac{2\pi}{3}$, 絶対値 $|z_2| = 2$

だから

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

例 3 例 1, 例 2 の z_1, z_2 に対し, 積と商も $|z|e^{i\theta}$ の形で表示する。

$$z_1 z_2 = (1 + i)(-1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \times 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt{2} \times 2 \times e^{\frac{\pi}{4}i + \frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{2} e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times e^{\frac{2\pi}{3}i - \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

問 1 次の複素数を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1 = \sqrt{3} + i$

(2) $z_2 = -1 + i$

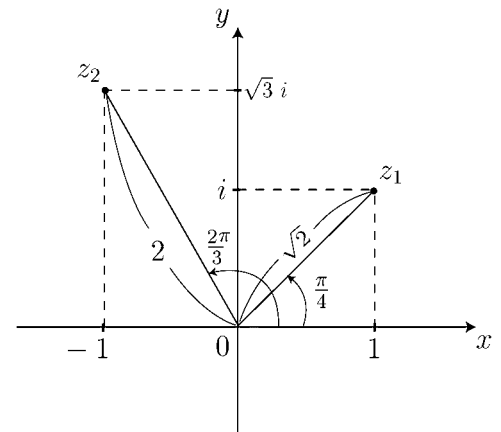
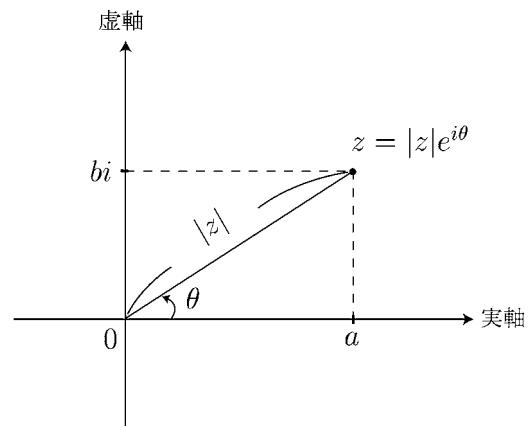
(3) $z_3 = -\sqrt{3} - 3i$

問 2 問 1 の z_1, z_2, z_3 に対し次式を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1 z_2$

(2) $z_2 z_3$

(3) $\frac{z_3}{z_1}$



< 複素数の練習 (2) >

問 1 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $3 - \sqrt{3}i$

(2) $-2 + 2i$

問 2 次式を計算せよ。

(1) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{12}$

(2) $(1 - i)^8$

問 3 次の複素数を $x + iy$ (x, y は実数) の形にせよ。

(1) $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

(2) $e^{3+\frac{\pi}{4}i}$

(3) $e^{\frac{\pi}{3}i} \div e^{\frac{\pi}{2}i}$

問 4 オイラーの公式を用いて、次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

(2) $-\frac{\sqrt{2}e}{2} + \frac{\sqrt{2}e}{2}i$

問 5 次の複素数を $z = |z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $1 + \sqrt{3}i$

(2) $-3 + \sqrt{3}i$

問 6 次式を $x + yi$ (x と y は実数) の形にせよ。

(1) $e^{\frac{5\pi}{3}i}$

(2) $e^{\frac{2+3\pi i}{4}}$

(3) $(e^{\frac{\pi}{6}i})^7 \div e^{\frac{4\pi}{3}i}$

(4) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{6}i} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

問 7 実数 θ に対し、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を複素数を用いた指数で表せ。

(1) $\cos \theta =$

(2) $\sin \theta =$

< 微分の復習 (1) >

関数の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。これを

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等で表す。全て同じ意味である。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを「 $f(x)$ を微分する」という。実数の定数 r に対し、 $f(x) = x^r$ の導関数は $f'(x) = rx^{r-1}$ である。このことを $(x^r)' = rx^{r-1}$ と書く。その他の初等関数の導関数を求める公式は次のとおりである。

① $(x^r)' = rx^{r-1}$

② $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x} \log_a e$

③ $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$

④ $(a^x)' = a^x \log_e a$

⑤ $(e^x)' = e^x$

⑥ $(\sin x)' = \cos x$

⑦ $(\cos x)' = -\sin x$

⑧ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

⑨ $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑩ $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

ただし $\log x = \log_e x$ は自然対数である。また $a > 0$, $a \neq 1$ である。また 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 k に対し、次の公式が成り立つ。

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad , \quad (kf(x))' = kf'(x)$$

例 $\left(\frac{x^2\sqrt{x} + 2x - 3}{\sqrt{x}} \right)' = (x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}})' = 2x + 2 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 \times (-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1}$
 $= 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}}$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(4x^5 - 6x^7 + 3\sqrt{x})'$

(2) $\left(\frac{x^3 + 4x + \sqrt{x^3}}{x^2} \right)'$

(3) $\left(\frac{4}{x^3} - 3\log|x| \right)'$

(4) $(4e^x - 5\sin x)'$

(5) $(4\cos x + 3\tan x)'$

(6) $\left(\sqrt[3]{x^4} \right)'$

< 微分の復習 (2) >

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $y = f(g(x))$ は $u = g(x)$ とおくと

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(f(u)) \times \frac{d}{dx}(g(x)) = f'(u) \times g'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

となる

例 1 $y = \sin(x^2 + 3x)$ の微分は, $u = x^2 + 3x$ とおくと

$$y = \sin(u), \quad u = x^2 + 3x$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{d}{dx}(x^2 + 3x) = \cos u \times (2x + 3) = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x)$$

例 2 $y = e^{-\frac{x^2}{2}+1}$ の微分は, $u = -\frac{x^2}{2} + 1$ とおくと

$$y = e^u, \quad u = -\frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(e^u) \times \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2} + 1\right) = e^u \times (-x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}+1}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin(4 - x)$

(2) $y = \cos(3x + 2)$

(3) $y = e^{5x+1}$

(4) $y = (3x - 1)^6$

(5) $y = \log|6x - 3|$

(6) $y = \sqrt{4x + 3}$

(7) $y = \frac{1}{(5x + 7)^3}$

(8) $y = \sin(x + x^2)$

(9) $y = e^{-x^2+x}$

(10) $y = \log|\cos x|$

< 微分の復習 (3) >

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積と商の関数の導関数は

$$(f(x) \times g(x))' = (f(x))' \times g(x) + f(x) \times (g(x))' \quad (\text{積の微分})$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{商の微分})$$

である。

例 (1) $(x^5 \sin(2x))' = (x^5)' \times \sin(2x) + x^5 \times (\sin(2x))' = 5x^4 \sin(2x) + 2x^5 \cos(2x)$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $x^2 \cos x$

(2) $e^x \sin x$

(3) $e^x \cos x$

(4) $e^{2x} \sin x$

(5) $e^x \sin(2x)$

(6) $e^{3x} \cos x$

(7) $e^{2x} \sin(3x)$

(8) $e^{3x} \cos(4x)$

(9) xe^x

(10) xe^{2x}

(11) xe^{3x}

(12) $x^2 e^{3x}$

(13) $-x + x \log x$

(14) $\frac{1}{1-x}$

(15) $\frac{1}{e^x}$

(16) $\frac{\cos x}{\sin x}$

< 微分の復習 (4) >

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数を

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (f(x)) = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

等の記号で表し、 $f(x)$ の **2 階導関数** という。導関数 $f'(x)$ は 1 階導関数とも言う。

例 (1) $f(x) = x^3 - 5x^4$, $f'(x) = 3x^2 - 20x^3$, $f''(x) = 6x - 60x^2$

(2) $y = \sin(2x)$, $\frac{dy}{dx} = 2 \cos(2x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = -4 \sin(2x)$

問 次の関数の 1 階および 2 階導関数を求めよ。

(1) $f(x) = \log|x|$ $f'(x) =$ $f''(x) =$

(2) $f(x) = e^{3x}$ $f'(x) =$ $f''(x) =$

(3) $f(x) = \cos(4x)$ $f'(x) =$ $f''(x) =$

(4) $y = xe^{2x}$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

(5) $y = xe^{-3x}$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

(6) $y = e^x \sin(2x)$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

(7) $y = e^{2x} \cos x$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

(8) $y = e^{2x} \sin(3x)$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

(9) $y = e^{-x} \cos(4x)$ $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

< 時間変数 t による微分 (1) >

物体の運動などを表現する場合、各時刻における位置などを考える。このよう場合、位置は時刻の関数と考える。すなわち変数が時刻になる。時刻 (時間) を表す変数を通常 t で表す。そこで今後は変数 t の関数 $f(t)$ を考える。

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

である。今まで習った微分の公式を変数 t におきかえると以下のようになる。

$$\frac{d}{dt} (t^r) = r t^{r-1} \quad (r \text{ は実数})$$

$$\frac{d}{dt} (e^t) = e^t \quad \frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} \quad (\log t = \log_e t \text{ (自然対数)})$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$$

例 (1) $\frac{d}{dt} (t^7 - 4e^t + 5 \log t) = 7t^6 - 4e^t + \frac{5}{t}$

(2) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5}{t^3} - \sqrt{t} \right) = \frac{d}{dt} (5 \times t^{-3} - t^{\frac{1}{2}}) = 5 \times (-3t^{-4}) - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{15}{t^4} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt} (9 - 6t^2 + 3t^3) =$

(2) $\frac{d}{dt} (-t^8 + 3t^4 + 2t^2 + 6e^t) =$

(3) $\frac{d}{dt} \left(2t^5 - 6 \cos t + \frac{1}{2} \log t \right) =$

(4) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5}{t} + \frac{4}{\sqrt{t^3}} \right) =$

< 時間変数 t による微分 (2) >

微分する変数が x から t に変わっても微分の公式は同様に成り立つ。

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt}} \quad (\text{合成関数の微分})$$

例 1 $y = \sin(5t + 3)$ を微分したい。

$u = 5t + 3$ とおくと $y = \sin(u)$ より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{d}{dt}(5t + 3) = \cos(u) \times 5 = 5 \cos(5t + 3)$$

だから

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} \sin(5t + 3) = 5 \cos(5t + 3)}}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \sin(5t + 4) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} e^{3t+2} =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos\left(-2t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(9 - 2t) =$$

例 2 $y = \cos(t^2 - 4t)$ を微分したい。

$u = t^2 - 4t$ とおくと $y = \cos(u)$ より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\cos u) \times \frac{d}{dt}(t^2 - 4t) = -\sin(u) \times (2t - 4)$$

よって

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}(\cos(t^2 - 4t)) = -(2t - 4) \sin(t^2 - 4t)}}$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \sin(2t^3 - t) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} (e^{-t^3}) =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos(2 + 3t - 4t^2) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(t^5 - 2t^3 + t) =$$

< 時間変数 t による微分 (3) >

t の関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対し、積 $f(t) \times g(t)$ の導関数は

$$(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t) \quad (\text{積の微分})$$

となる。

例 1 (1) $\frac{d}{dt}(t^2 e^t) = (t^2)' \times e^t + t^2 \times (e^t)' = 2te^t + t^2 e^t$

(2) $\frac{d}{dt}(e^t \cos t) = (e^t)' \times \cos t + e^t \times (\cos t)' = e^t \cos t - e^t \sin t$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt}(2te^t) =$

(2) $\frac{d}{dt}(t^3 \cos t) =$

(3) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^t \sin t\right) =$

(4) $\frac{d}{dt}(t^2 \log t) =$

例 2 $\frac{d}{dt}(e^{2t} \sin(3t)) = (e^{2t})' \times \sin(3t) + e^{2t} \times (\sin(3t))'$
 $= 2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)$

問 2 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^t \sin(2t)\right) =$

(2) $\frac{d}{dt}(e^{3t} \cos(6t)) =$

(3) $\frac{d}{dt}(4e^{\frac{t}{2}} \sin(-5t)) =$

(4) $\frac{d}{dt}(3e^{-2t} \cos(4t)) =$

< 時間変数 t による微分 (4) >

例 1 $F(t) = te^{2t}$ の 1 階および 2 階導関数は

$$F'(t) = (t)'e^{2t} + t \times (e^{2t})' = e^{2t} + 2te^{2t}$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= (e^{2t})' + (2t)' \times e^{2t} + 2t \times (e^{2t})' = 2e^{2t} + 2e^{2t} + 2t \times 2e^{2t} \\ &= 4e^{2t} + 4te^{2t} \end{aligned}$$

例 2 $y = e^t \cos(3t)$ の 1 階および 2 階導関数は

$$\frac{dy}{dt} = (e^t)' \times \cos(3t) + e^t \times (\cos(3t))' = e^t \cos(3t) - 3e^t \sin(3t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= (e^t)' \times \cos(3t) + e^t \times (\cos(3t))' - 3 \{ (e^t)' \sin(3t) + e^t \times (\sin(3t))' \} \\ &= e^t \cos(3t) - 3e^t \sin(3t) - 3(e^t \sin(3t) + 3e^t \cos(3t)) \\ &= -8e^t \cos(3t) - 6e^t \sin(3t) \end{aligned}$$

問 次の関数の 1 階および 2 階導関数を求めよ。

(1) $F(t) = e^{-2t}$, $F'(t) =$, $F''(t) =$

(2) $F(t) = te^{-t}$, $F'(t) =$, $F''(t) =$

(3) $F(t) = \sin(3t)$, $F'(t) =$, $F''(t) =$

(4) $y = e^t \sin(2t)$ $\frac{dy}{dt} =$

$$\frac{d^2y}{dt^2} =$$

(5) $y = e^{2t} \cos(t)$ $\frac{dy}{dt} =$

$$\frac{d^2y}{dt^2} =$$

(6) $y = e^{2t} \cos(3t)$ $\frac{dy}{dt} =$

$$\frac{d^2y}{dt^2} =$$

< 関数と導関数 >

例 1 $y = 2e^{3t}$ の導関数は $y' = 6e^{3t} = 3 \times 2e^{3t} = 3 \times y$ より

$$y \text{ と } \frac{dy}{dt} \text{ には } \boxed{\frac{dy}{dt} = 3y} \quad (*)$$

の関係式が成り立つ。

問 1 次の関係式に対し、例 1(*) のような y と $\frac{dy}{dt}$ との関係式を導け。

(1) $y = 4e^{3t}$

(2) $y = 5e^{-2t}$

例 2 $y = \sin(2t)$ のとき 2 階導関数は

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos(2t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -4 \sin(2t) \text{ より } y \text{ と } \frac{d^2y}{dt^2} \text{ には}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -4y} \quad (**)$$

の関係式が成り立つ。

問 2 次の関係式に対し、例 2(**) のような y と $\frac{d^2y}{dt^2}$ との関係式を導け。

(1) $y = \cos(2t)$

(2) $y = \sin(3t)$

(3) $y = \cos(3t)$

(4) $y = \sin(2t) + \cos(2t)$

(5) $y = 4 \sin(3t) - 5 \cos(3t)$

< 複素数値関数の微分 (1) >

実変数 t の複素数値関数 $z = z(t)$ に対し、変数 t に関する導関数を

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

と定める。この定義より実数値関数と同様な次の性質がわかる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & (z_1(t) + z_2(t))' = z_1'(t) + z_2'(t) \\ (2) \quad & (kz(t))' = kz'(t) \quad (k \text{ は任意の複素数定数}) \\ (3) \quad & (z_1(t)z_2(t))' = z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t) \end{aligned}$$

例 (1) $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($x(t), y(t)$ は実数値関数) のとき

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{dt} e^{(2+3i)t} &= \frac{d}{dt} e^{2t} (\cos(3t) + i \sin(3t)) = \frac{d}{dt} e^{2t} \cos(3t) + i \frac{d}{dt} e^{2t} \sin(3t) \\ &= (e^{2t})' \cos(3t) + e^{2t} \times (\cos(3t))' + i \{ (e^{2t})' \sin(3t) + e^{2t} \times (\sin(3t))' \} \\ &= \{ 2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \sin(3t) \} + i \{ 2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t) \} \\ &= e^{2t} \{ (2 + 3i) \cos(3t) + (-3 + 2i) \sin(3t) \} \end{aligned}$$

問 次式を t で微分せよ。ただし a と b は実数である。

$$(1) \quad z(t) = 3t^4 + ie^{2t} \qquad (2) \quad z(t) = \cos(bt) + i \sin(bt)$$

$$\frac{dz}{dt} =$$

$$\frac{dz}{dt} =$$

$$(3) \quad z(t) = e^{(3+4i)t}$$

$$\frac{dz}{dt} =$$

$$(4) \quad z(t) = e^{(a+bi)t}$$

$$\frac{dz}{dt} =$$

< 複素数値関数の微分 (2) >

前ページ問 (4) より 実数 a, b に対し

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= \frac{d}{dt}e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) \\ &= \{ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt)\} + i\{ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt)\} \\ &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt) + (ai-b)\sin(bt)\}\end{aligned}$$

となる。ここで $i^2 = -1$ より $ai - b$ を

$$ai - b = ai + bi^2 = (a + bi)i$$

におきかえると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt) + (a+bi)i\sin(bt)\} \\ &= e^{at}(a+bi)\{\cos(bt) + i\sin(bt)\} \\ &= e^{at}(a+bi)e^{bti} = (a+bi)e^{(a+bi)t}\end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} = (a+bi)e^{(a+bi)t}}$$

が得られる。

問 以下の導関数を求めよ。(ただし a と b は実数)

(1) $\frac{d}{dt}e^{3it}$

(2) $\frac{d}{dt}e^{-2it}$

(3) $\frac{d}{dt}e^{bit}$

(4) $\frac{d}{dt}e^{(1+i)t}$

(5) $\frac{d}{dt}e^{(2-i)t}$

(6) $\frac{d}{dt}e^{(-3+2i)t}$

(7) $\frac{d}{dt}e^{(a-i)t}$

(8) $\frac{d}{dt}e^{(a-bi)t}$

(9) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}\right)$

(10) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a-bi}e^{(a-bi)t}\right)$

< 積分の復習 (1) >

1. 不定積分の定義

$(F(x))' = f(x)$ のとき $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数という。
 $f(x)$ の原始関数の全体を

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表し、 $f(x)$ の不定積分という。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C}$$

2. 不定積分の公式

$$(1) \int dx = x + C$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(5) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$$

上の公式において、積分変数 x の代わりに他の変数を用いても同様な公式が成り立つ。

例 (1) $\int du = u + C$

(2) $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$

(3) $\int \sin u du = -\cos u + C$

(4) $\int e^t dt = e^t + C$

問 次の不定積分を(積分変数に注意して)求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\int dt =$

(2) $\int t^n dt =$

(3) $\int \frac{1}{y} dy =$

(4) $\int e^u du =$

(5) $\int \cos v dv =$

(6) $\int \sin t dt =$

< 積分の復習 (2) >

$\int f(g(x))g'(x)dx$ の形の不定積分は

$$g(x) = u \text{ とおくと } g'(x) = \frac{du}{dx}$$

より置換積分法から

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du \quad (\text{置換積分})$$

例 1 $g(x) = ax + b$ (a と b は定数) のとき、 $g'(x) = a$ より

$$a \times \int f(ax + b)dx = \int f(ax + b) \times a dx = \int f(u)du \quad (u = ax + b)$$

であるから

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(u)du \quad (\text{ただし } u = ax + b) \quad (*)$$

例 2 $\int \cos(2x + 3)dx$ は $u = 2x + 3$ とおくと、上の公式 (*) より

$$\int \cos(2x + 3)dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C$$

例 3 $\int \frac{1}{4x + 3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du$ ($u = 4x + 3$ とおくと、上の公式 (*) より)

$$= \frac{1}{4} \log |u| + C = \frac{1}{4} \log |4x + 3| + C$$

(注) $u = 4x + 3$ のとき $\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow du = 4dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{4}du}$ と考えてよい。

問 次の不定積分を求めよ。(ただし a と b は定数)

(1) $\int \cos(3x + 4)dx$

(2) $\int \sin(5x - 2)dx$

(3) $\int e^{3x+5}dx$

(4) $\int \frac{1}{5x - 3}dx$

(5) $\int (8x + 7)^5 dx$

(6) $\int \cos(3t)dt$

(7) $\int e^{2t-3}dt$

(8) $\int \cos(at + b)dt$

(9) $\int \sin(at + b)dt$

(10) $\int e^{at+b}dt$

< 複素数値関数の積分 (1) >

実数値変数 t の複素数値関数 $F(t)$ に対し、 $F(t)$ の導関数が $f(t)$ であるとき、すなわち

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t) \quad (F'(t) = f(t))$$

のとき、微分して $f(t)$ になる関数 ($f(t)$ の原始関数) の全体を

$$\int f(t)dt = F(t) + C \quad (C \text{ は任意の複素数定数})$$

と書き、 $f(t)$ の不定積分という。微分の性質 (43 ページ) より次の性質がわかる。

$$(1) \int \{f(t) + g(t)\} dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$$

$$(2) \int kf(t)dt = k \int f(t)dt \quad (k \text{ は任意の複素数定数})$$

例 1 実数値関数 $x(t)$ と $y(t)$ に対して

$$\int (x(t) + iy(t))dt = \int x(t)dt + i \int y(t)dt$$

例 2 実数 a, b に対して、44 ページの結果

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)t} \right) = e^{(a+bi)t}$$

より

$$\int e^{(a+bi)t} dt = \frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)t} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。(ただし a と b は実数で、 $a \neq 0, b \neq 0$ とする)

$$(1) \int (t^3 + t^5 i) dt$$

$$(2) \int (\cos t + i \sin t) dt$$

$$(3) \int (e^{2t} + i \cos(3t)) dt$$

$$(4) \int e^{bit} dt$$

$$(5) \int e^{(2+3i)t} dt$$

$$(6) \int e^{(a-bi)t} dt$$

< 複素数値関数の積分 (2) >

例題 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{2t} \cos(3t) dt \qquad , (2) \int e^{2t} \sin(3t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad & \int e^{2t} \cos(3t) dt + i \int e^{2t} \sin(3t) dt = \int e^{2t} \{ \cos(3t) + i \sin(3t) \} dt \\ & = \int e^{2t+3ti} dt = \int e^{(2+3i)t} dt = \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)t} + C \\ & = \frac{2-3i}{2^2+3^2} e^{2t} (\cos(3t) + i \sin(3t)) + C \\ & = \frac{e^{2t}}{13} \{ 2 \cos(3t) + 3 \sin(3t) \} + i \frac{e^{2t}}{13} \{ -3 \cos(3t) + 2 \sin(3t) \} + C \end{aligned}$$

よって

$$\int e^{2t} \cos(3t) dt = \frac{e^{2t}}{13} \{ 2 \cos(3t) + 3 \sin(3t) \} + C$$

$$\int e^{2t} \sin(3t) dt = \frac{e^{2t}}{13} \{ -3 \cos(3t) + 2 \sin(3t) \} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。ただし a と b は実数で $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

$$(1) \int e^{3t} \cos(4t) dt \qquad (2) \int e^{3t} \sin(4t) dt$$

$$(3) \int e^{at} \cos(bt) dt$$

$$(4) \int e^{at} \sin(bt) dt$$

< まとめの問題 (1) >

問1 次式を簡単にせよ。ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする。

(1) $i^3 - i^5$

(2) $(3 + i)^2$

(3) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)$

(4) $\frac{2}{1 + i}$

(5) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

(6) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} \times \sqrt{-2}$

問2 次の2次方程式および3次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^2 - 6x + 11 = 0$

(2) $x^3 - 8 = 0$

問3 $z = \frac{2+i}{5}$ に対し、共役複素数 \bar{z} および絶対値 $|z|$ を求めよ。

$\bar{z} =$

$|z| =$

問4 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $2i$

(2) $-3 + \sqrt{3}i$

(3) $-1 - \sqrt{3}i$

=

=

=

問5 次の複素数の積または商を極形式で表せ。ただし r, θ は実数であり、 $r > 0$ とする。

(1) $i \times r(\cos \theta + i \sin \theta)$

(2) $\frac{1+i}{1-i}$

< まとめの問題 (2) >

問1 次の複素数を簡単にせよ。

(1) $(1+i)^8$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6$

問2 次の複素数を $x+iy$ (x と y は実数) の形にせよ。

(1) $e^{\frac{\pi}{3}i}$

(2) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$

(3) $e^{1+\frac{\pi}{6}i}$

(4) $e^{\frac{2-\pi i}{4}}$

(5) $e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{2}i}$

(6) $e^{\frac{4\pi}{3}i} \div e^{\frac{\pi}{2}i}$

問3 オイラーの公式を用いて、次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

(2) $\frac{\sqrt{2}e}{2} + \frac{\sqrt{2}e}{2}i$

問4 次の複素数を $z = |z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $3-3i$

(2) $-1-\sqrt{3}i$

問5 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt}e^{t^3+t^2}$

(2) $\frac{d}{dt}\cos(4t)$

(3) $\frac{d}{dt}e^t \sin(2t)$

(4) $\frac{d}{dt}e^{2t} \cos(3t)$

(5) $\frac{d}{dt}e^{4t+5ti}$

(6) $\frac{d}{dt}e^{(3-4i)t}$

問6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3 \sin(2t) + 4 \cos(3t)) dt$

(2) $\int e^{3t-4} dt$

(3) $\int e^{4t+5ti} dt$

(4) $\int e^{4t} \cos(3t) dt$