高知工科大学

基礎数学ワークブック

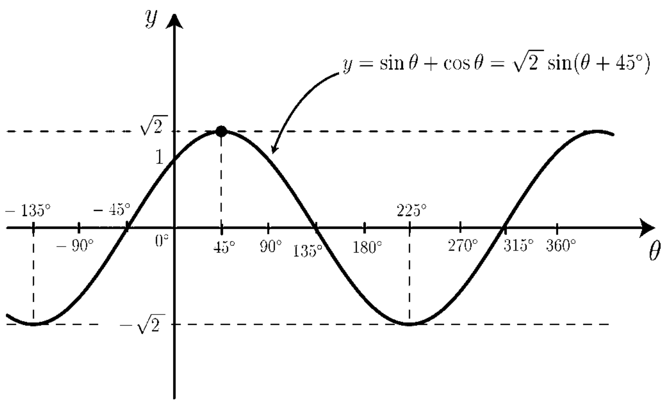
(2004年度版)

入 門 編

No. 4

内容

◎　定積分と面積



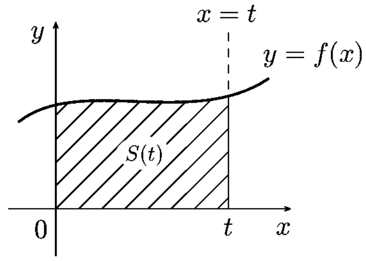
◎　指数・対数

◎　三角関数の加法定理

井上 昌昭　著

＜ 面積関数 1 ＞

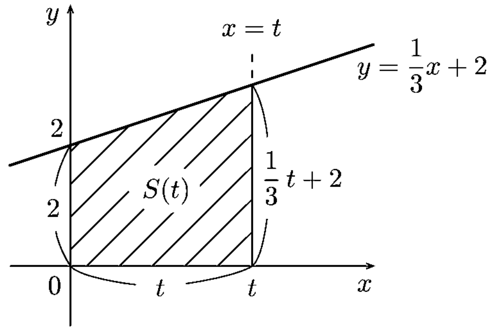
正の値をとる関数 $f(x)$ $(f(x) > 0)$ と正の定数 t に対し，右図の斜線部分の面積を $S(t)$ とおく。



例 1 $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ のとき右図より $S(t)$ は台形の面積だから

$$S(t) = \frac{1}{2}\left\{2 + \left(\frac{1}{3}t + 2\right)\right\}t = \frac{1}{6}t^2 + 2t$$

となる。



問 1 $f(x)$ が次の各場合に，直線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 1$

(2) $f(x) = x$

(3) $f(x) = 1 + 2x$

(4) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2}x$

例 2 $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ のとき $f(x)$ を 0 から t まで積分すると

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \left(\frac{1}{3}x + 2\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^2 + 2x\right]_0^t = \frac{1}{6}t^2 + 2t$$

より例 1 の結果と一致する。

問 2 $f(x)$ が次の各場合に $\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ を求めよ。

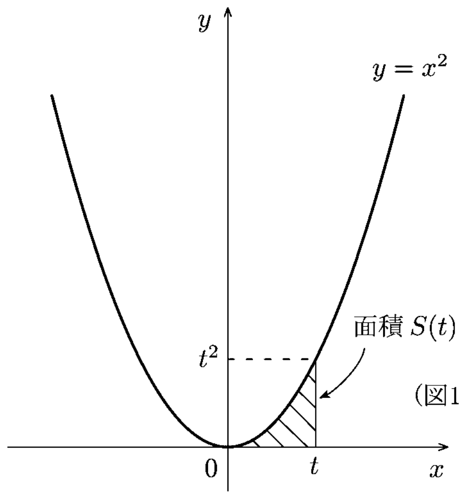
(1) $f(x) = 1$

(2) $f(x) = x$

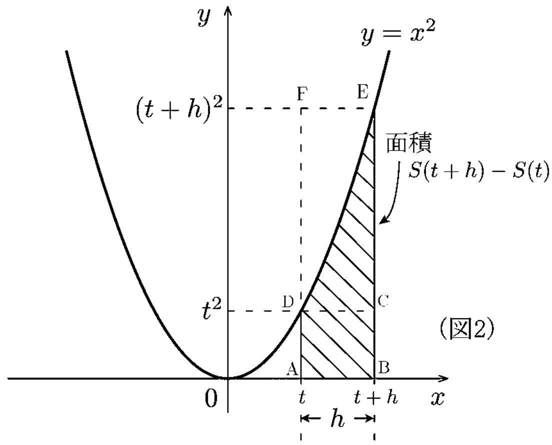
(3) $f(x) = 1 + 2x$

(4) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2}x$

＜面積関数 2＞



(図1)



(図2)

例 正の数 t に対し，放物線 $y = x^2$ と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分 (図 1 の斜線部) の面積を $S(t)$ とおく。
$S(t)$ を t の式で表したい。$S(t)$ を t の関 数と考え，$S(t)$ の導関数

$$S'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

を計算する。
今，正の数 h に対し

$$S(t+h) - S(t)$$

は図 2 の斜線部分の面積である。図 2 より

$$\begin{array}{c}\text{長方形 ABCD}\\ \text{の面積}\end{array} \leqq S(t+h) - S(t) \leqq \begin{array}{c}\text{長方形 ABEF}\\ \text{の面積}\end{array}$$

だから

$$h \times t^2 \leqq S(t+h) - S(t) \leqq h \times (t+h)^2$$

が成り立つ。両辺を h で割ると

$$t^2 \leqq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leqq (t+h)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

問 この例に対し，次の問に答えよ。

(1) h を限りなく 0 に近づけたとき，$(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づく。①式から次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} =$$

(2) $S(t)$ の導関数 $S'(t)$ を求めよ。

$$S'(t) =$$

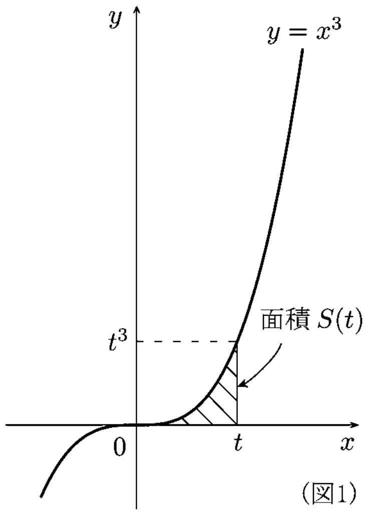
(3) (2) の結果より $S(t)$ はある関数の不定積分になる。$S(t)$ を積分定数 C を含む t の関数として表せ。

$$S(t) = \int S'(t)dt =$$

(4) $S(0) = 0$ であることから C の値を定め，$S(t)$ を t の式で表せ。

$C =$ 　　　　　　　　　　　　, $S(t) =$

＜ 面積関数 3 ＞



(図1)

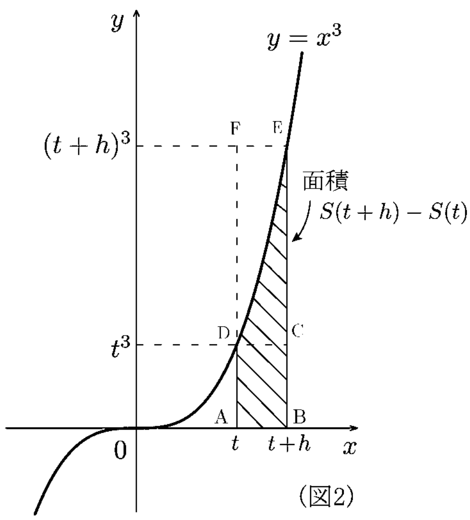
問 正の数 t に対し，3 次曲線 $y = x^3$ と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とおく (図 1)。
$S(t)$ を t の式で表したい。前ページを参考にして，次の文章中の $\boxed{\quad\quad}$ 内に適当な文字式を記入せよ。

「 正の数 h に対し，

$$S(t+h) - S(t)$$

は図 2 の斜線部分の面積である。図 2 より

$$\begin{matrix}\text{長方形 ABCD}\\ \text{の面積}\end{matrix} \leqq S(t+h) - S(t) \leqq \begin{matrix}\text{長方形 ABEF}\\ \text{の面積}\end{matrix}$$



(図2)

だから

$$\boxed{\quad\quad} \leqq S(t+h) - S(t) \leqq \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

が成り立つ。両辺を h で割ると

$$\boxed{\quad\quad} \leqq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leqq \boxed{\quad\quad} \cdots ①$$

となる。

ここで，h を限りなく 0 に近づけたとき，$(t+h)^3$ は限りなく t^3 に近づく。
従って①式より

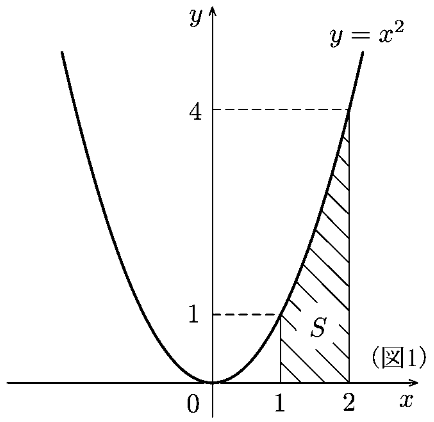
$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \boxed{\quad\quad}$$

であることがわかる。すなわち $S(t)$ の導関数は $S'(t) = \boxed{\quad\quad}$ である。
ゆえに $S(t)$ は $\boxed{\quad\quad}$ の不定積分

$$S(t) = \int \boxed{\quad\quad}\, dt = \boxed{\quad\quad} + C$$

である。$S(0) = 0$ より $C = \boxed{\quad\quad}$ であるから $S(t) = \boxed{\quad\quad}$ である。 」

＜ 面積 1 ＞

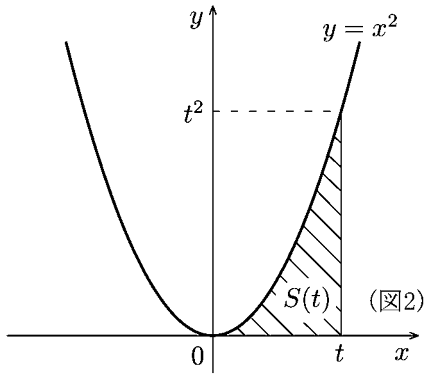


例 放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ と $x = 2$ とで囲まれた部分 (図 1 の斜線部分) の面積 S を求めたい。図 2 の斜線部分の面積を $S(t)$ とおくと 2 ページの結果より

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3$$

となった。よって

$$S = S(2) - S(1) = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3}$$



(注) この面積 S は次のように x^2 の定積分として表すことができる。

$$S = S(2) - S(1) = \Big[S(x)\Big]_1^2 = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2 = \int_1^2 x^2 dx$$

問 1 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ と $x = 3$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

問 2 与えられた正の定数 a, b $(0 < a < b)$ に対し，放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

問 3 問 2 で求めた面積 S を (注) のように定積分で表せ。

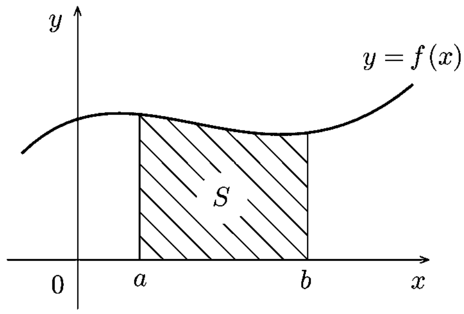
問 4 3 次曲線 $y = x^3$ と x 軸および直線 $x = 1$ と $x = 5$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

問 5 3 次曲線 $y = x^3$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ $(0 < a < b)$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

問 6 問 5 の面積 S を定積分で表せ。

＜ 面積 2 ＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は



$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

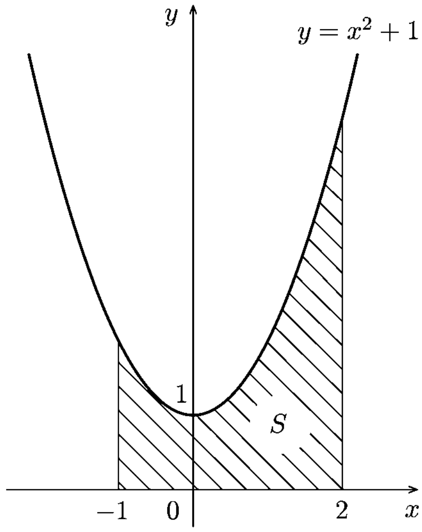
で求められる。

(注) a と b は負の数でもよい。

例 放物線 $y = x^2+1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$，$x = 2$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times 2^3 + 2\right) - \left\{\frac{1}{3} \times (-1)^3 - 1\right\} = 6$$

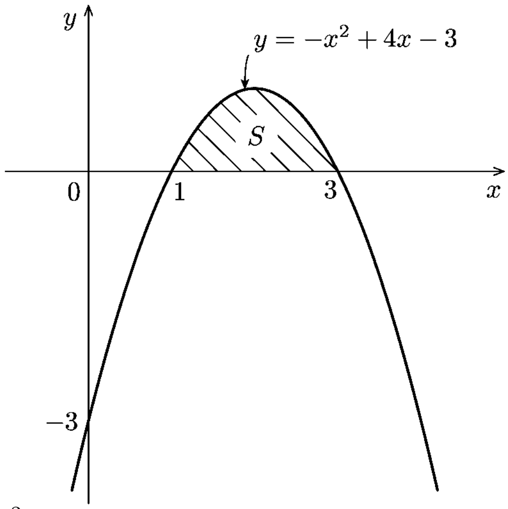


問 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ ， 2 直線 $x = -3$，$x = 3$

(2) 放物線 $y = (x+1)^2$ ， 2 直線 $x = 0$，$x = 2$

＜ 面積 3 ＞



例題 放物線 $y=-x^2+4x-3$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(解) この放物線と x 軸との交点は

$$-x^2+4x-3=0$$

を解いて $x=1,\ 3$ である。

$$1 \leqq x \leqq 3 \quad \text{では} \quad -x^2+4x-3 \geqq 0$$

であるから求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (-x^2+4x-3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{1}{3}\times 3^3+2\times 3^2-3\times 3\right)-\left(-\frac{1}{3}\times 1^3+2\times 1^2-3\times 1\right)=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

問 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

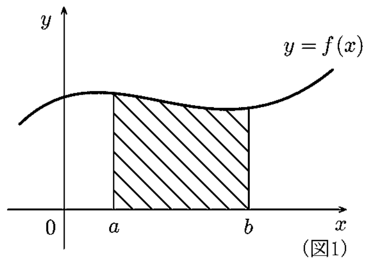
(1) $y=-x^2+1$

(2) $y=-x^2+4x$

(3) $y=-(x-2)(x-3)$

(4) $y=-x^2+2x+8$

< 面積 4 >



(図1)

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ と $x=b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

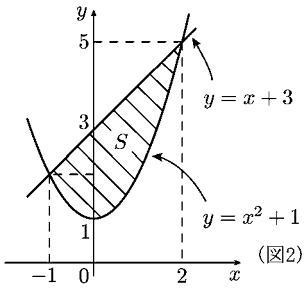
例 直線 $y=x+3$ と放物線 $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積 S を求めたい。
直線と放物線の交点を求めるためには連立方程式

$$\begin{cases} y = x+3 & \cdots ① \\ y = x^2+1 & \cdots ② \end{cases}$$

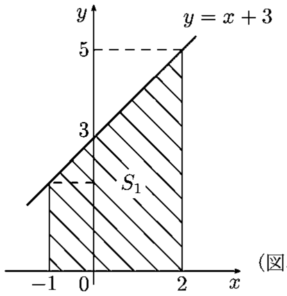
を解けばよい。② − ①より

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x=-1, \ x=2$$

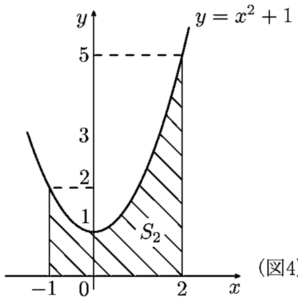
より交点の x 座標 $x=-1$ と $x=2$ が求まり，グラフは図 2 のようになる。図 3，図 4 の斜線部分の面積 S_1，S_2 を考えると，以下のように計算できる。



(図2)



(図3)



(図4)

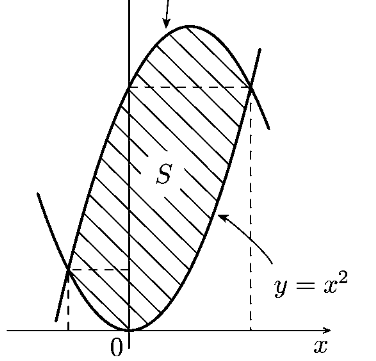
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx = \int_{-1}^{2}\left\{-x^2+x+2\right\}dx$$

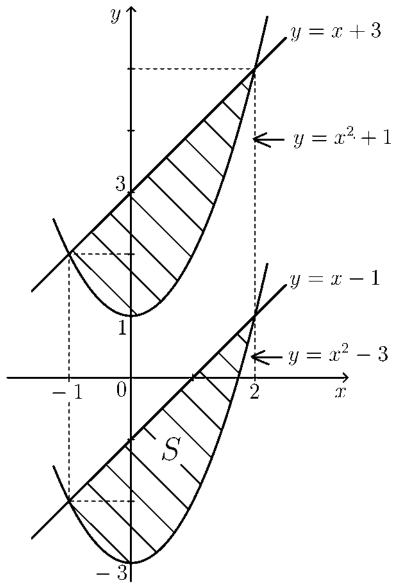
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = \frac{9}{2}$$

問 放物線 $y=-x^2+2x+4$ と $y=x^2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜ 面積 5 ＞

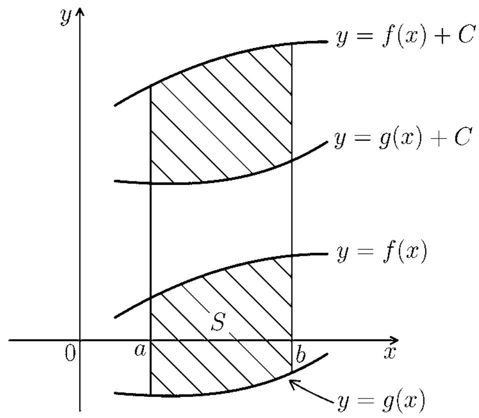


例 直線 $y = x - 1$ と放物線 $y = x^2 - 3$ とで囲まれる部分の面積 S を求める。直線と放物線をともに y 軸方向に 4 だけ平行移動させると，$y = x - 1$ は $y = x + 3$ に $y = x^2 - 3$ は $y = x^2 + 1$ に移る。S は $y = x + 3$ と $y = x^2 + 1$ とで囲まれる部分の面積と等しいから前ページの例より

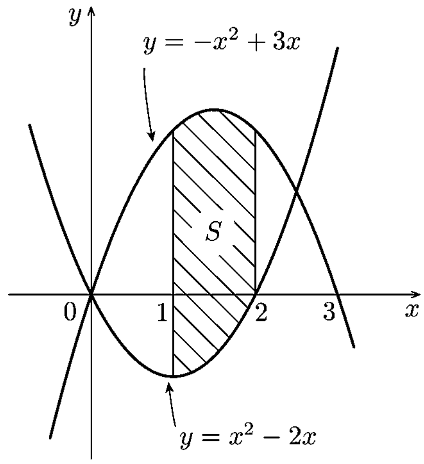
$$S = \int_{-1}^{2} \left\{(x+3) - (x^2+1)\right\} dx = \frac{9}{2}$$

(注) $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left\{(x-1) - (x^2-3)\right\} dx$

としても求まる。



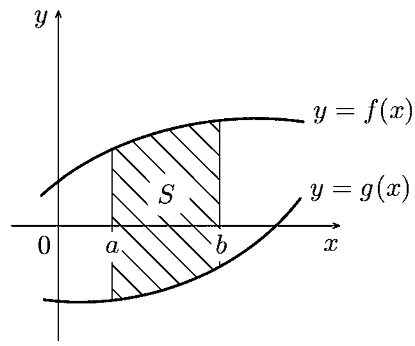
問 1 右図のように曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と曲線 $x = a$，$x = b$ とで囲まれる部分の面積 S を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
(ただし，$g(x) < f(x)$ とする)



問 2 2 つの放物線 $y = -x^2 + 3x$，$y = x^2 - 2x$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

問 3 2 つの放物線 $y = x^2 - 3$，$y = -x^2 + 4x - 1$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

＜ 面積 6 ＞



$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x) \leqq f(x)$ であるとき，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$\boxed{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$

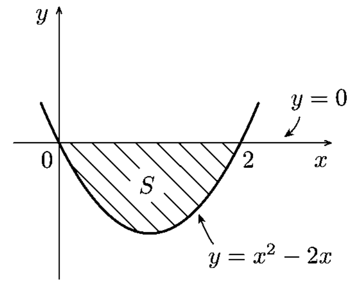
である。

例題 次の部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれる部分。

(2) 放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=x+1$ で囲まれる部分。

(解)



(1) 放物線と x 軸との交点の x 座標は

$$x=0 \quad , \quad x=2$$

x 軸は直線 $y=0$ であるから求める面積は

$$S=\int_0^2 \left\{0-\left(x^2-2x\right)\right\}dx=\int_0^2 \left(-x^2+2x\right)dx=\frac{4}{3}$$

(2) 放物線と直線の交点の x 座標は次の方程式の解である。

$$x^2-1=x+1$$

よって

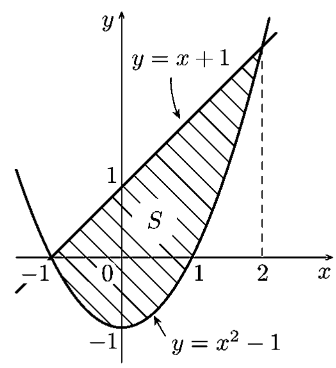
$$x^2-x-2=0$$

これを解いて

$$x=-1 \quad , \quad x=2$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲では直線が放物線より上側にあるから求める面積は

$$S=\int_{-1}^2 \left\{(x+1)-(x^2-1)\right\}dx=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx=\frac{9}{2}$$



問 1 次の放物線と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=(x-1)(x-2)$ (2) $y=x^2+3x$

問 2 次の放物線と直線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

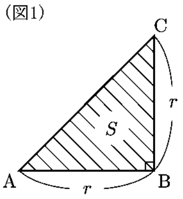
(1) 放物線 $y=x^2$，直線 $y=-x+6$ (2) 放物線 $y=-x^2+3$，直線 $y=2x$

＜線と面＞

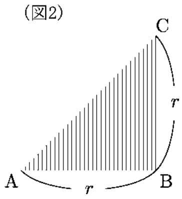
線を集めると面になる。線の長さを積分すると面積が求まる。

例 1 図 1 の直角三角形 ABC の面積を S とすると $S = \dfrac{1}{2}r^2$ である。△ABC を図 2 のような線の集まりと考えて，図 3 の B′C′ の長さを $\ell(x)$ とおくと

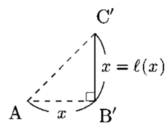
(図1)



(図2)



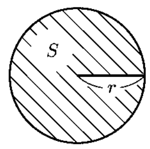
(図3)



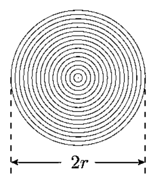
$$\int_0^r \ell(x)dx = \int_0^r xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^r = \frac{1}{2}r^2 = S$$

例 2 半径 r の円の面積 S は $S = \pi r^2$ である。この円を図 5 のような円周の集まりと考えて，半径 x の円周を $\ell(x)$ とおくと

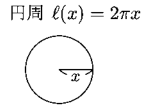
(図4)



(図5)



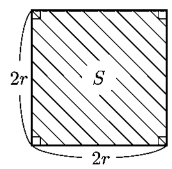
(図6)



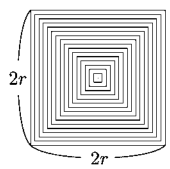
$$\int_0^r \ell(x)dx = \int_0^r 2\pi xdx = \left[\pi x^2\right]_0^r = \pi r^2 = S$$

例 3 一辺 $2r$ の正方形の面積 S は $S = 4r^2$ である。この正方形を図 8 のような線の集まりと考えて，一辺 $2x$ の正方形の周の長さを $\ell(x)$ とおくと

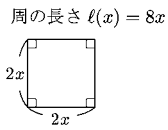
(図7)



(図8)



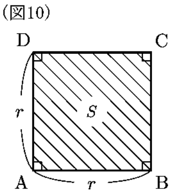
(図9)



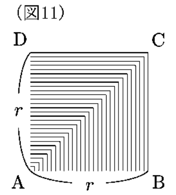
$$\int_0^r \ell(x)dx = \int_0^r 8xdx = \left[4x^2\right]_0^r = 4r^2 = S$$

例 4 一辺 r の正方形の面積 S は $S = r^2$ である。この正方形を図 11 のような線の集まりと考えて，図 12 の $\mathrm{B'C'} + \mathrm{C'D'}$ を $\ell(x)$ とおくと

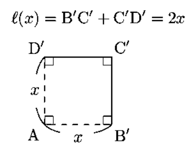
(図10)



(図11)



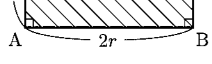
(図12)



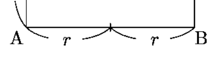
$$\int_0^r \ell(x)dx = \int_0^r 2xdx = \left[x^2\right]_0^r = r^2 = S$$

問 縦が r，横が $2r$ の長方形の面積を S とする。これと相似な長方形 A′B′C′D′(図 15) のある部分の長さを $\ell(x)$ とおくと

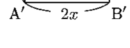
(図13)



(図14)



(図15)



$$\int_0^r \ell(x)dx = S$$

が成り立つ。この $\ell(x)$ を求め，それが図 15 のどの部分の長さかを示せ。また，この結果は長方形 ABCD をある種の線の集まりと考えることにより求められる。図 14 の中にこの線の集合を (図 8，図 11 のように) 描け。

< 面積の計算 >

問1 次の放物線と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=(x+1)(2-x)$

(2) $y=-x^2-3x+4$

(3) $y=(x-1)(x-3)$

(4) $y=x^2+2x-8$

問2 次の図形の面積を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=3$ で囲まれた図形

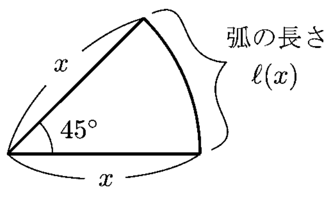
(2) 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた左側 $(x \leqq 2)$ の図形

(3) 放物線 $y=x^2-3$ と直線 $y=2x$ で囲まれた図形

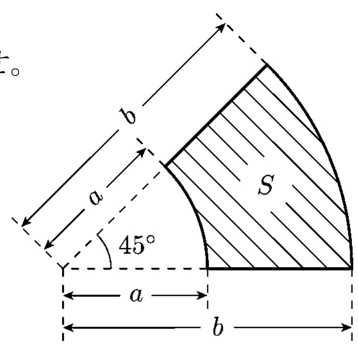
(4) 2つの放物線 $y=x^2+2x-1$ と $y=-x^2+2x+1$ で囲まれた図形

問3

(1) 半径 x，中心角 45° の扇形の弧の長さを $\ell(x)$ とする。
$\ell(x)$ を x の式で表せ。



(2) 右図の斜線部分の面積 S を $\ell(x)$ を用いた定積分の式で表せ。



(3) S を a と b で表せ。

< 累乗の指数 >

n が正の整数であるとき，a の n 乗　すなわち

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{個}} = a^n$$

を a の **累乗**（るいじょう）といい，n のその**指数**という。

例 百 $\cdots 100 = 10^2$
千 $\cdots 1000 = 10^3$
万 $\cdots 10000 = 10^4$
1 億 $=$ 1 万 $\times$ 1 万 $\cdots 10^4 \times 10^4 = 10^8$
1 兆 $=$ 1 万 $\times$ 1 億 $\cdots 10^4 \times 10^8 = 10^{12}$

問 1 兆の 1 万倍を 京（けい） という。1 京を 10^n の形に表せ。

問 2 科学・技術の分野では，大きな数の単位としてキロ (K)，メガ (M)，ギガ (G)，テラ (T) などが用いられる。キロは 1000 倍，1 メガは 1000 キロ，1 ギガは 1000 メガ，1 テラは 1000 ギガを表す。1 キロ $= 10^3$ として，1 メガ，1 ギガ，1 テラを 10^n の形で表せ。

問 3 次の計算をし，結果を 10^n の形で表せ。

(1) $10^4 \times 10^6$　　(2) $10^8 \times 10^9$

(3) $10^{15} \times 10^{27}$　　(4) $10^5 \div 10^2$

(5) $10^9 \div 10^5$　　(6) $10^{23} \div 10^{15}$

＜ 指数法則 ＞

例 1 (1) $a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5$

(2) $a^5 \div a^3 = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2$

一般に m，n を正の整数，$m > n$ のとき次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \cdots\cdots \ ① \\ a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \cdots\cdots \ ② \end{array}}$$

この公式を用いると例 1 は次のように求められる。

$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$　，　$a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$

問 1 次の計算をせよ。

(1) $a^2 \times a^5$　　(2) $a^6 \times a^3$　　(3) $a^8 \div a^3$

例 2 (1) $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times3} = a^6$

(2) $(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2b^2$

一般に m，n を正の整数としたとき次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} (a^m)^n = a^{mn} \quad \cdots\cdots \ ③ \\ (ab)^n = a^n b^n \quad \cdots\cdots \ ④ \end{array}}$$

例 3 $(a^3b^4)^2 = (a^3)^2(b^4)^2 = a^{3\times2}b^{4\times2} = a^6b^8$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $(a^5)^3$　　(2) $(ab^2)^3$　　(3) $(a^2b^3)^4$

(注) 上の公式①〜④を**指数法則**という。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $a^4 \times a^5 \times a^3$　　(2) $(a^3)^2 \times a^4$

(3) $a^{10} \div (a^3)^3$　　(4) $(a^2b)^3 \times (ab^2)^2$

< 負の指数 >

指数 n を 0 や負の整数としたとき，累乗 a^n をどう定義すればよいか考えてみよう。

例えば 十 ， 百 ， 千 ， 万 ， 10 万 ， 100 万 ， $\cdots$ は

10 ， 10^2 ， 10^3 ， 10^4 ， 10^5 ， 10^6 ， $\cdots$

のように 10^n の形で表される。これらは 10 倍するごとに指数 n が 1 ずつ大きくなり，$\dfrac{1}{10}$ 倍するごとに指数 n が 1 ずつ小さくなる。この規則が 0 や負の指数のときも成り立つように 10^0，10^{-1}，10^{-2}，$\cdots$ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & 1000 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 100 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 10 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 1 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10} & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10^2} & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10^3} & , \cdots \\
 & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
 & 10^3 & & 10^2 & & 10^1 & & 10^0 & & 10^{-1} & & 10^{-2} & & 10^{-3} &
\end{array}$$

一般に 0 または負の整数 $-n$ を指数とする累乗を次のように定める。

$$\boxed{a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (a^0,\ a^{-n} \text{ の定義})$$

例 $5^0 = 1$ ， $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

$(3^{-1})^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ ， $(2^3)^{-2} = \dfrac{1}{(2^3)^2} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

問 次の値を求めよ。

(1) 2^0 (2) 1^{-1} (3) 2^{-5}

(4) 3^0 (5) 3^{-2} (6) 4^{-3}

(7) $(2^{-3})^2$ (8) $(3^2)^{-2}$ (9) $(2^2)^{-3}$

＜ 整数指数 1 ＞

前ページより 0 または負の整数 $-n$ を指数とする累乗を

$$\boxed{a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

と定める。

例 1 $a^2 \times a^{-5} = a^2 \times \dfrac{1}{a^5} = \dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

例 2 $a^{-2} \times a^{-3} = \dfrac{1}{a^2} \times \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{(a \times a) \times (a \times a \times a)} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5}$

問 1 次の積を a^{-n} の形にせよ。

(1) $a^3 \times a^{-5}$　　(2) $a^{-3} \times a^2$

(3) $a^4 \times a^{-7}$　　(4) $a^{-8} \times a^5$

(5) $a^{-3} \times a^{-4}$　　(6) $a^{-5} \times a^{-6}$

例 3 $a^2 \div a^5 = \dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

例 4 $a^{-5} \div a^{-3} = \dfrac{1}{a^5} \div \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{a^5} \times a^3 = \dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2} = a^{-2}$

問 2 次の商を a の累乗の形にせよ。

(1) $a^4 \div a^6$　　(2) $a^3 \div a^{-2}$

(3) $a^{-2} \div a^3$　　(4) $a^4 \div a^{-5}$

(5) $a^{-7} \div a^{-4}$　　(6) $a^{-7} \div a^{-9}$

＜整数指数 2＞

例 1 $\left(a^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(a^2\right)^3} = \dfrac{1}{a^2 \times a^2 \times a^2} = \dfrac{1}{a \times a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6}$

例 2 $\left(a^{-2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6$

問 1 次式を a の累乗の形にせよ。

(1) $\left(a^4\right)^{-2}$

(2) $\left(a^{-2}\right)^4$

(3) $\left(a^5\right)^{-2}$

(4) $\left(a^{-3}\right)^4$

(5) $\left(a^{-3}\right)^{-3}$

(6) $\left(a^{-6}\right)^{-5}$

例 3 $(ab)^3 \; = \; ab \times ab \times ab \; = \; a \times a \times a \times b \times b \times b \; = \; a^3\, b^3$

例 4 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \dfrac{a^3}{b^3} = a^3\, b^{-3}$

例 5 $\left(ab^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(ab^2\right)^3} = \dfrac{1}{ab^2 \times ab^2 \times ab^2} = \dfrac{1}{a \times a \times a \times b^2 \times b^2 \times b^2} = \dfrac{1}{a^3 b^6} = a^{-3}\, b^{-6}$

問 2 次式を $a^{\bigcirc}\, b^{\bigcirc}$ の形にせよ。

(1) $\left(ab\right)^4$

(2) $\left(a^2 b\right)^3$

(3) $\left(ab^{-1}\right)^2$

(4) $\left(ab\right)^{-3}$

(5) $\left(a^{-1}b^2\right)^3$

(6) $\left(a^{-2}b^3\right)^{-2}$

(7) $\left(ab^2\right)^{-3} \times \left(a^2 b\right)^2$

(8) $\left(a^3 b^2\right)^3 \div \left(ab^3\right)^4$

＜整数指数 3 ＞

m と n がどんな整数であっても次の指数法則が成り立つ。

[1]	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	[1′]	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
[2]	$(a^m)^n = a^{mn}$		
[3]	$(ab)^n = a^n b^n$	[3′]	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(指数法則)

例 1 $10^5 \times 10^{-8} = 10^{5+(-8)} = 10^{-3}$, $10^{-7} \times 10^{-8} = 10^{(-7)+(-8)} = 10^{-15}$

$10^{-2} \div 10^{-7} = 10^{(-2)-(-7)} = 10^5$, $10^{(-3)\times(-6)} = 10^{18}$

問 1 次の計算を行い，結果を 10 の累乗の形にせよ。

(1) $10^3 \times 10^{-20}$　(2) $10^5 \div 10^{-6}$　(3) $10^{-7} \div 10^{-8}$

(4) $1 \div 10^{-20}$　(5) $(10^{-2})^3$　(6) $(10^{-3})^{-1}$

問 2 次の計算を行い，結果を a の累乗の形にせよ。

(1) $a^{-3} \times a^{-1}$　(2) $a^{-3} \times a^{-5}$　(3) $a^4 \div a^{-2}$

(4) $a^{-4} \div a^{-2}$　(5) $(a^3)^{-3}$　(6) $(a^{-4})^{-1}$

例 2 $5^6 \times 5^{-4} = 5^{6+(-4)} = 5^2 = 25$, $3^{-6} \div 3^{-4} = 3^{(-6)-(-4)} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

$(2^{-3})^{-2} = 2^{(-3)\times(-2)} = 2^6 = 64$

問 3 次の計算をせよ。

(1) $4^7 \times 4^{-4}$　(2) $5^{-7} \div 5^{-6}$

(3) $2^{-2} \div 2^{-5}$　(4) $(3^{-2})^{-2}$

問 4 次の計算を行い，結果を 0 や負の指数を用いないで表せ。

(1) $a^3 \times a^{-6}$　(2) $a^{-4} \div a^{-10}$　(3) $a^{-5} \div a^{-5}$

(4) $(ab^{-1})^2$　(5) $(a^{-1}b)^{-3}$　(6) $(a^{-2}b^3)^2$

< 整数指数 4 >

問 1 科学 · 技術の分野では, 小さな数の単位として ミリ (m), マイクロ (μ), ナノ (n), ピコ (p) などが用いられる。ミリは $\dfrac{1}{1000}$, 1 マイクロは $\dfrac{1}{1000}$ ミリ, 1 ナノは $\dfrac{1}{1000}$ マイクロ, 1 ピコは $\dfrac{1}{1000}$ ナノを表す。1 ミリ $= 10^{-3}$ として, 1 マイクロ, 1 ナノ, 1 ピコを 10 の累乗の形で表せ。

例 大きい数, あるいは 0 に近い数を, 例えば

$$360000 = 3.6 \times 10^5 \quad , \quad 0.000567 = 5.67 \times 10^{-4}$$

のように整数部分が 1 けたの数と 10 の累乗との積として表すことがある。

(注) 電卓では「3.6×10^5」を「3.6 E 5」と表す。また「5.67×10^{-4}」を「5.67 E −4」と表す。

問 2 次の数を $a \times 10^n$ の形にせよ。ただし $1 \leqq a < 10$ とする。

(1) 43000　　(2) 2730000000

(3) 0.000045　　(4) 0.000000000000368

問 3 次の計算を行い, 結果を $a \times 10^n$ $(1 \leqq a < 10)$ の形にせよ。

(1) $\left(1.5 \times 10^4\right) \times \left(4 \times 10^8\right)$

(2) $\left(4.2 \times 10^{-2}\right) \times \left(2.5 \times 10^{-7}\right)$

(3) $\left(6.8 \times 10^{-2}\right) \div \left(5 \times 10^3\right)$

(4) $\left(4.8 \times 10^2\right) \div \left(1.2 \times 10^{-10}\right)$

(5) $1 \div \left(2.5 \times 10^{-15}\right)$

問 4 アルミニウムの原子 1 個の質量は約 4.5×10^{-23}g である。アルミニウム 1g の中には、およそ何個の原子が含まれているのか。$a \times 10^n$ の形に表せ。ただし $1 \leqq a < 10$ で, a は四捨五入によって小数点第 1 位まで求めよ。

＜累乗根 1＞

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m = 1$ のときは $\dfrac{n}{1} = n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例 1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2 = 2}$ である。この x は無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の **2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x = \sqrt{2}}$ と書く。

例 2 体積が 2 である立方体の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^3 = 2}$ である。この x は無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の **3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x = \sqrt[3]{2}}$ と書く。

例 3 $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4 = 2}$ である。x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 の **4 乗根**といい $\boxed{\sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して，n 乗すると a になる正の数を x とする。つまり $\boxed{x^n = a}$ $(x > 0)$ である。この x を a の n **乗根**といい $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$ と書く。平方根，立方根，n 乗根等をまとめて**累乗根**という。また記号 $\sqrt{}$，$\sqrt[3]{}$，$\sqrt[n]{}$ をまとめて**根号**という。

(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$ と書く。

例 4 累乗根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{49} = 7 \quad , \quad \sqrt[3]{0.125} = 0.5 \quad , \quad \sqrt[4]{81} = 3 \quad , \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{169}$　(2) $\sqrt[3]{8}$　(3) $\sqrt[3]{125}$

(4) $\sqrt[4]{256}$　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$　(6) $\sqrt[5]{3125}$

＜累乗根２＞

例１ $\sqrt[3]{2}$ は３乗して２になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また $\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ である。

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ が成り立つ。

例２ $x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$$

より $x = \sqrt[3]{10}$ つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ が成り立つ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ が成り立つ。

例３ $y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ が成り立つ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ が成り立つ。

(注) $\sqrt[n]{\quad}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または０ (ゼロ)) がはいる。
負の数は根号の中に入れない。

例４ (1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{15}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

＜累乗根３＞

例１ (1) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times 5}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}=2\times\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}]=\sqrt[4]{2^4\times 2}=\sqrt[4]{2^4}\times\sqrt[4]{2}=2\times\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$

問１ 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{54}$ (2) $\sqrt[4]{112}$ (3) $\sqrt[5]{64}$

例２ $x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3=\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$
$$=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5\times 5=5^2$$

よって $x^3=5^2$ より $x=\sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$$

がなりたつ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式がなりたつ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$$

例３ (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{\left(5^2\right)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(2) $\sqrt[3]{8^4}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^4=2^4=16$

問２ 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$ (2) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$

(3) $\sqrt[4]{16^2}$ (4) $\sqrt[3]{27^2}$

＜分数指数 1 ＞

例 1 自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\text{ 個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m \times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

$$(1) \qquad 2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

$$(2) \qquad 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例 2 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$, (2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$, (4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 1 次の値を求めよ。

(1) $121^{\frac{1}{2}}$ (2) $27^{\frac{1}{3}}$ (3) $25^{\frac{3}{2}}$

(4) $343^{\frac{2}{3}}$ (5) $81^{\frac{5}{4}}$ (6) $32^{\frac{4}{5}}$

(7) $16^{-\frac{1}{2}}$ (8) $27^{-\frac{4}{3}}$ (9) $64^{-\frac{2}{3}}$

問 2 次式を $a^{\frac{k}{n}}$ の形に書け。

(1) $\sqrt[3]{a}$ (2) $\sqrt[3]{a^2}$ (3) $(\sqrt[4]{a})^5$ (4) $(\sqrt[4]{a})^{-3}$

< 分数指数 2 >

例 1 $x = \sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{(5^2)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$ より $x = \sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

例 2 $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{4^3}$　　(2) $\sqrt[12]{7^4}$　　(3) $\sqrt[3]{5^9}$　　(4) $\sqrt[6]{27^4}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

(別解)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

例 4 $\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{5^3} \times \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{5 \times 5^3 \times 5^2} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(別解)　$\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$

例 5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

(別解)　$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[2]{10} \times \sqrt[4]{100}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9}}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$　　(4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$

< 指数法則の拡張 >

分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

> 正の数 a と b、および有理数 p と q に対して
>
> $1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$, $2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$
>
> $3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$, $4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 (1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^3}$

(2) $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^2}$

(4) $\sqrt[3]{a^7} \div (\sqrt[3]{a})^4$

(5) $(\sqrt[4]{a})^{\frac{8}{3}}$

(6) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}}\right)^{-2}$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

（注） ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $(3^3 \times 5^2)^{\frac{1}{7}} \times (3^4 \times 5^5)^{\frac{1}{7}}$

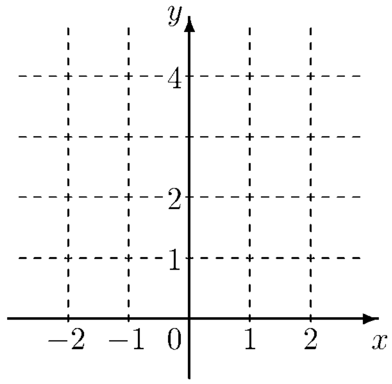
(2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{72}$

＜ 指数関数 ＞

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

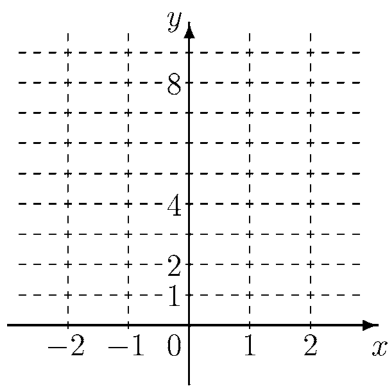
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



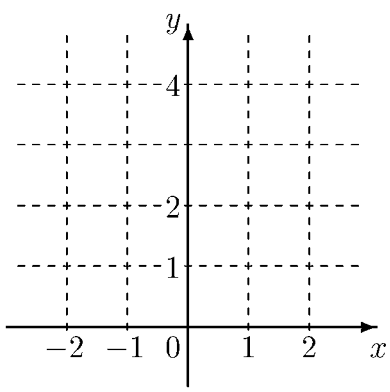
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



＜指数方程式＞

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$ (2) $4^x = 0.5$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より (答) $x = \frac{7}{2}$

(2) $4^x = 0.5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1$ より (答) $x = -\frac{1}{2}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \frac{2}{3}$ より (答) $x = -\frac{2}{3}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$ (2) $3^x = 3$ (3) $3^x = 9$ (4) $3^x = \frac{1}{3}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$ (6) $10^x = 1$ (7) $10^x = 100$ (8) $10^x = \sqrt[3]{10}$

(9) $10^x = 0.1$ (10) $10^x = 0.01$ (11) $2^x = 1$ (12) $2^x = 4$

(13) $2^x = 32$ (14) $2^x = \sqrt[4]{2}$ (15) $2^x = 2\sqrt{2}$ (16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$ (18) $2^x = \frac{1}{4}$ (19) $2^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (20) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$ (22) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.125$ (23) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$ (24) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ (26) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$ (27) $4^x = 1$ (28) $4^x = 16$

(29) $4^x = 2$ (30) $4^x = 8$ (31) $4^x = 0.25$ (32) $4^x = \sqrt{2}$

< 対数 1 >

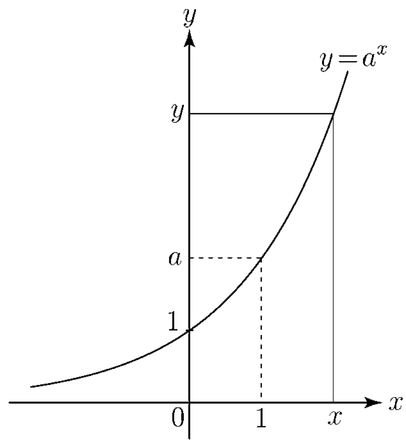
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例 1 (1) $2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2) $4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問 1 次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (2) $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$ (3) $3 = \log_3 27$ (4) $\dfrac{3}{2} = \log_9 27$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例 2 (1) $\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2) $\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問 2 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 32$ (2) $\log_3 243$

(3) $\log_{10} 1000$ (4) $\log_5 625$

(5) $\log_2 \dfrac{1}{8}$ (6) $\log_3 \sqrt{3}$

＜ 対数 2 ＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\dfrac{25}{100}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$　(2) $\log_2 \sqrt{2}$　(3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$　(5) $\log_4 64$　(6) $\log_4 1$

(7) $\log_6 \sqrt[3]{6}$　(8) $\log_5 0.2$　(9) $\log_{10} 0.01$

(10) $\log_7 \sqrt[3]{49}$　(11) $\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(12) $\log_4 8$

例 2

$$\log_2(8\times 16) = \log_2\left(2^3\times 2^4\right) = \log_2\left(2^{3+4}\right) = \log_2\left(2^7\right) = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(2^4\right) = 3+4 = 7$$

より

$$\log_2(8\times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

がなりたつ。

問 2 $M = 2^{\alpha}$, $N = 2^{\beta}$ の場合に、例 2 を参考にして

$$\log_2(M\times N) = \log_2 M + \log_2 N$$

を示せ。

(証明)

< 対数 3 >

例 1 $\log_2\left(\dfrac{128}{8}\right) = \log_2\left(\dfrac{2^7}{2^3}\right) = \log_2\left(2^{7-3}\right) = \log_2\left(2^4\right) = 4$

$\log_2 128 - \log_2 8 = \log_2\left(2^7\right) - \log_2\left(2^3\right) = 7 - 3 = 4$

より

$$\log_2\left(\frac{128}{8}\right) = \log_2 128 - \log_2 8$$

が成り立つ。

問 1 $M = 2^\alpha,\ \ N = 2^\beta$ の場合に、例 1 を参考にして

$$\log_2\left(\frac{M}{N}\right) = \log_2 M - \log_2 N$$

を示せ。

(証明)

例 2 $\log_2 8^5 = \log_2\left((2^3)^5\right) = \log_2\left(2^{3\times 5}\right) = \log_2\left(2^{15}\right) = 15$

$5 \times \log_2 8 = 5 \times \log_2\left(2^3\right) = 5 \times 3 = 15$

より

$$\log_2\left(8^5\right) = 5 \times \log_2 8$$

が成り立つ。

問 2 $M = 2^\alpha$ の場合に、例 2 を参考にして

$$\log_2(M^r) = r \times \log_2 M$$

を示せ。

(証明)

＜ 対数 4 ＞

28 ページと同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問 1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) =$$

問 2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$$\log_a(M^r) =$$

例　(1) $\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2) $\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50 \times 20) = \log_{10} 1000 = 3$

(3) $2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3\left(6^2\right) - \log_3 4 = \log_3\left(\frac{6^2}{4}\right) = \log_3 9 = 2$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 12 + \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$

(2) $\log_3 108 - \log_3 4$

(3) $\log_6 12 + \log_6 2 + 2\log_6 3$

(4) $\log_{10} 4 + \log_{10} 25 - \log_{10} 0.1$

＜ 底の変換 ＞

対数には次の性質がある。

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \text{ (底の変換)}$$

ただし a, b, c は正の数であり $a \neq 1,\ \ c \neq 1$ である。

[証明] $\log_a b = x$ とおくと $a^x = b$

c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c(a^x) = \log_c b$$

従って

$$x \log_c a = \log_c b$$

よって

$$\log_a b = x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(証明終)}$$

例 $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

問 1 次式の値を求めよ。

(1) $\log_8 16$ 　　　　(2) $\log_{16} 64$

(3) $\log_{27} 81$ 　　　　(4) $\log_8 2$

(5) $\log_4 \sqrt{2}$ 　　　　(6) $\log_{27} \sqrt{3}$

問 2 底の変換公式を用いて等式 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ を示せ。

問 3 次式の値を求めよ。

(1) $\log_4 32 + \log_{16} 64$ 　　　　(2) $\left(\log_3 4\right) \times \left(\log_4 9\right)$

(3) $\left(\log_2 3\right) \times \left(\log_3 4\right) \times \left(\log_4 2\right)$

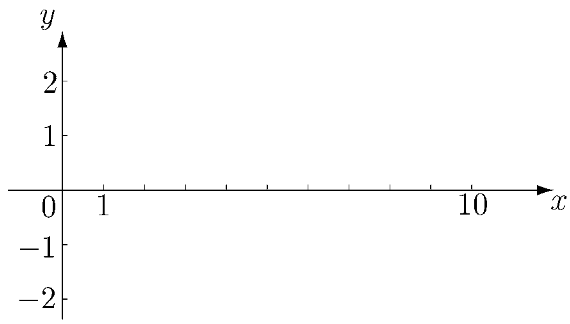
＜ 対数関数 ＞

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域 (括弧内の x の範囲) 内で、グラフの概形を書け。

(1) $y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

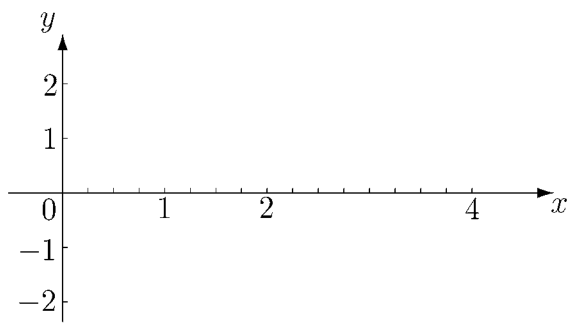
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



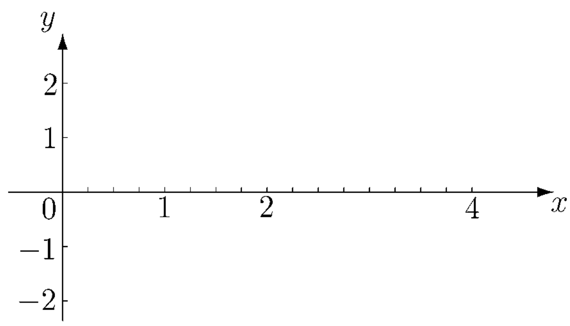
(2) $y = \log_{2} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



＜常用対数１＞

10 を底とする対数を**常用対数**という。常用対数表には，a が 1.00，1.01，1.02，$\cdots$，9.99 のときの $\log_{10} a$ の近似値を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある。

＜常用対数表＞

数	0	1	2	3
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553
1.5	.1761	.1792	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814

例　常用対数表より

$$\log_{10} 1.72 = 0.2355$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 172000 &= \log_{10}(1.72 \times 10^5)\\ &= \log_{10} 1.72 + \log_{10} 10^5\\ &= 0.2355 + 5 = 5.2355\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.0172 &= \log_{10}(1.72 \times 10^{-2})\\ &= \log_{10} 1.72 + \log_{10} 10^{-2}\\ &= 0.2355 - 2 = -1.7645\end{aligned}$$

問１　常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1)　$\log_{10}(1430)$　　(2)　$\log_{10}(203000)$　　(3)　$\log_{10}(0.00302)$

例題　2^{30} は何桁の数か。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(解)　$x = 2^{30}$ とおき両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} x = \log_{10} 2^{30} = 30 \times \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$$

より

$$x = 10^{9.03}$$

となる。よって

$$10^9 < x < 10^{10}$$

であり，$10^9 = 1000000000$ は 10 桁の数だから　(答)　10 桁

問２　3^{50} は何桁の数か。ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

＜常用対数 2＞

問 1 $\log_{10} 2 = 0.301$ を用いて $\log_{10} \sqrt[4]{5}$ の値を求めよ。

問 2 前ページの表と底の変換公式を用いて, $\log_{2} 3$ の値を, 小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ。

問 3 $(0.5)^{20}$ は, 小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

例題 1 時間に 2 倍の割合で増殖するバクテリアは, 約何時間何分後に 100 倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

(解) 求める時間を x とすると $2^x = 100$

両辺の常用対数をとると $\log_{10} 2^x = \log_{10} 100$

すなわち $x \log_{10} 2 = 2$

$$x = \frac{2}{\log_{10} 2} = \frac{2}{0.301} \fallingdotseq 6.644$$

$0.644\mathrm{h} = 0.644 \times 60\,\mathrm{min} = 38.64\,\mathrm{min}$ より

（答）約 6 時間 39 分後

問 4 30 分に 2 倍の割合で増殖するバクテリアは約何時間何分後に 1000 倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

< 指数・対数の練習 1 >

問 1　次の値を求めよ。

(1) $27^{-\frac{2}{3}}$　(2) $(0.25)^{0.5}$　(3) $\dfrac{1}{(0.2)^{-2}}$

(4) $\log_9 27$　(5) $\log_{\frac{1}{2}} 16$　(6) $\log_{0.2} 125$

問 2　次の計算をせよ。

(1) $36^{1.5} \times 32^{-0.2}$　(2) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} \div 16}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

(3) $(a^3b)^{\frac{1}{6}} \times (ab^2)^{\frac{2}{3}} \div (ab^{-3})^{\frac{1}{6}}$　(4) $\sqrt[6]{a^5b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^4b^{-1}}$

(5) $108^{0.2} \times 72^{0.2}$　(6) $\sqrt[14]{800} \times \sqrt[14]{12500}$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\log_5 20 + \log_5 100 - 2\log_5 4$　(2) $4\log_3 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 2 + \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$　(4) $(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 8)$

(5) $\log_3 \dfrac{3}{2} + \log_9 \dfrac{81}{4} + \log_{27} \dfrac{64}{27}$　(6) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

＜ 指数・対数の練習 2 ＞

問 1　次の方程式を解け。

(1) $2^{x-1} = 16\sqrt{2}$　　(2) $3^{2x+1} = \sqrt[3]{9}$

(3) $\log_2 x(x+2) = 3$　　(4) $\log_3(x-3) + \log_3(2x-9) = 2$

問 2　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

(1) $8^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$　　(2) $\log_2(2x-5) \leqq -1$

問 3　次の各組の数を小さい方から順に並びかえ、不等式（○ $<$ ○ $<$ ○）で表せ。

(1) 1 , $(0.9)^{0.5}$, $(0.9)^{-\frac{1}{3}}$　　(2) $\log_2 10$, 3 , $\frac{1}{2}\log_2 81$

(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$　　(4) $\log_2 3$, $\log_4 7$, $\log_8 10$

問 4　$\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき, 次の各式を a , b で表せ。

(1) $\log_{10}\sqrt{\frac{8}{9}}$　　(2) $\log_2 6$　　(3) $\log_9 \sqrt{5}$

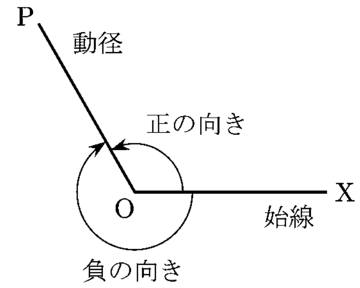
問 5　$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として次の問に答えよ。

(1) 6^{40} は何桁の数か。

(2) $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ は小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。

問 6　3 時間ごとに 2 倍の割合で増殖するバクテリアは, 約何時間何分後に 10 万倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

< 三角関数の復習 1 >

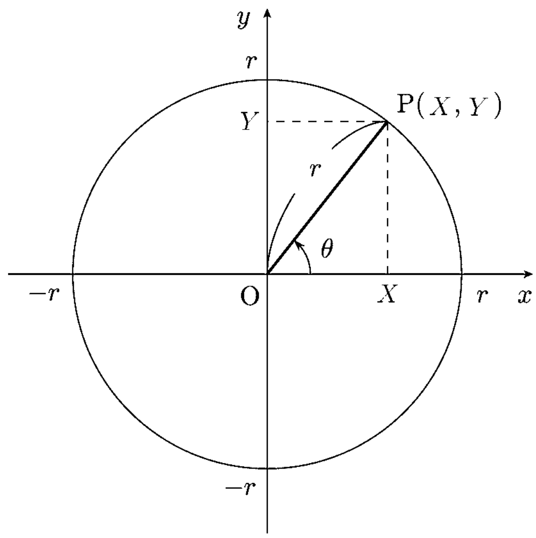


平面上で，半直線 OP を，点 O を中心として回転させるとき回転する半直線 OP を動径，その始めの位置を示す半直線 OX を始線という。回転には 2 つの向きがあり，反時計回りを正の向き，時計回りを負の向きとする。この回転を表す角を一般角という。

x 軸の正の部分を始線とした一般角 θ の動径と，原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とする。このとき

$$\frac{Y}{r}\quad,\quad\frac{X}{r}\quad,\quad\frac{Y}{X}$$

の値は，円の半径 r に関係なく，角度 θ によって定まる。これらを θ の三角関数といい，次のように書く。

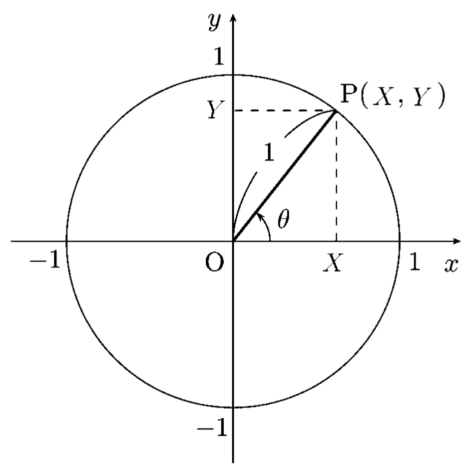


$$(*)\quad \boxed{\sin\theta = \frac{Y}{r}\quad,\quad \cos\theta = \frac{X}{r}\quad,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

(注) ただし，$\tan\theta$ は $X = 0$ となるような角 θ に対しては定義されない。

三角関数の定義式 $(*)$ において，$r = 1$ の場合，点 $\mathrm{P}(X, Y)$ の座標は直接 $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を示す。

$$(*)'\quad \boxed{\sin\theta = Y\quad,\quad \cos\theta = X\quad,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}\quad (r = 1)$$



この式 $(*)'$ よりただちに次の性質がわかる。

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\quad,\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

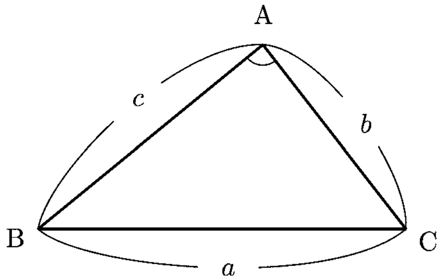
問 1 $1 + \tan^2\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問 2 θ が第 2 象限の角であるとき $\cos\theta$ を $\sin\theta$ で表せ。

問 3 次式を簡単にせよ。

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 =$$

＜三角関数の復習 2＞



三角形 ABC に対し，次の公式が成り立つ。

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}}$ (余弦定理)

問 1　$\mathrm{A} = 90^\circ$ のとき a^2 を b と c で表せ。

問 2　$\mathrm{B} = 60^\circ$ のとき b^2 を a と c で表せ。

問 3　$\mathrm{C} = 120^\circ$ のとき c^2 を a と b で表せ。

三角関数の定義より次の性質がわかる。ただし n は整数である。

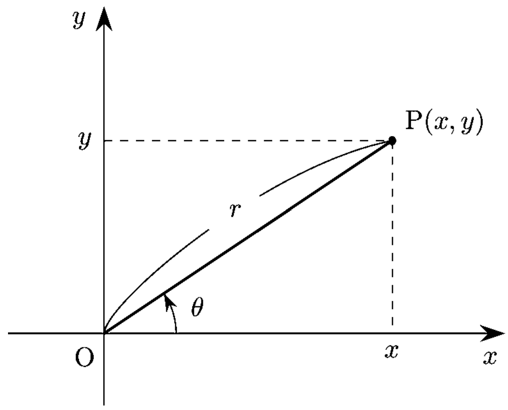
$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin\theta \quad , \quad \cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos\theta \quad , \quad \tan(\theta + 360^\circ \times n) = \tan\theta$$
$$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta \quad , \quad \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta \quad , \quad \tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$$
$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta \quad , \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \quad , \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad , \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \quad , \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta \quad , \quad \tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \quad , \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \quad , \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

問 4　角度 θ が次の各場合の三角関数の値を求めて表に記入せよ。

角度 θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$													

角度 θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$													

< 平面座標の三角関数表示 >



座標平面上の原点以外の任意の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする。点 P と原点 O との距離を r とすると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

である。動径 OP の表す角の 1 つを θ とする。
三角関数の定義より

$$\frac{y}{r} = \sin\theta \quad , \quad \frac{x}{r} = \cos\theta$$

であるから

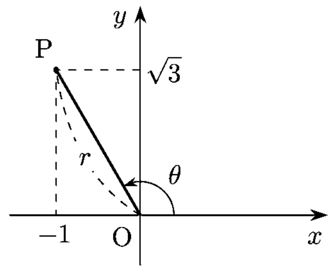
$$y = r\sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$$

より

$$\boxed{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)} \text{ (三角関数表示)}$$

と表される。$(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を点 (x, y) の三角関数表示ということにする。

(注) r は原点からの距離であるので正の数である。角 θ は負の角でもよい。
$-180^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ とする場合が多い。

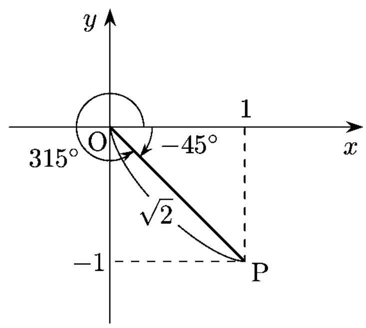


例 1 点 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ を三角関数表示する。

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad ,$

$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{1}{2}$ より $\theta = 120^\circ$

よって $\underline{(-1, \sqrt{3}) = (2\cos 120^\circ, 2\sin 120^\circ)}$



例 2 点 $\mathrm{P}(1, -1)$ を三角関数表示する。

右図より $\underline{(1, -1) = \left(\sqrt{2}\cos 315^\circ, \sqrt{2}\sin 315^\circ\right)}$

または $\underline{= \left(\sqrt{2}\cos(-45^\circ), \sqrt{2}\sin(-45^\circ)\right)}$

(注) 三角関数表示が正しいかどうかは，三角関数の値を代入して元の座標になるかどうかを確かめればよい。

問 次の座標を三角関数表示せよ。

(1) $(\sqrt{3}, 1)$

(2) $(-2, 2)$

(3) $(-\sqrt{3}, -3)$

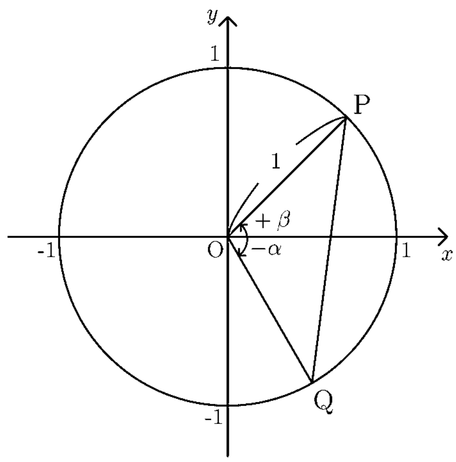
(4) $(3, -3)$

< 加法定理１ >

問

(1) 右図において点 P の座標を三角関数表示せよ。

P(　　　　,　　　　)



(2) 右図において点 Q の座標を三角関数の性質 $\cos(-\theta) = \cos\theta,\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いて $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ で表せ。

Q(　　　　,　　　　)

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式を使って、PQ^2 を α と β で表せ。

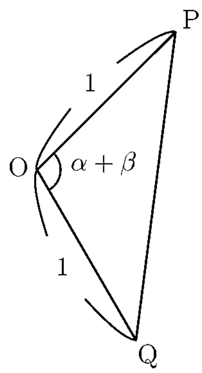
$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理を使って、PQ^2 を $\alpha + \beta$ で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$



(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha+\beta)$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

＜加法定理２＞

前ページの結果より

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が成立することが分かった。これをコサインの**加法定理**という。

例 75° は 45° と 30° の和であるから、

(1) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ$ は $\cos^2(75^\circ)+\sin^2(75^\circ)=1$ から計算してもできないことはないが２重根号 $\left(\sqrt{}\right.$ の中に $\sqrt{}$ がある$\left.\right)$ がでてくる。それをさけるために三角関数の性質

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を使って、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\cos(90^\circ-75^\circ)=\cos\big((90^\circ-45^\circ)+(-30^\circ)\big)\\&=\cos(90^\circ-45^\circ)\cos(-30^\circ)-\sin(90^\circ-45^\circ)\sin(-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ(-\sin 30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

問 例を参考にして, $\sin(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\beta$ だけを用いて表せ。

$\sin(\alpha+\beta)=$

(注) この式をサインの <u>**加法定理**</u> という。

＜加法定理 3 ＞

問 1　$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ と考えて、前ページの問の結果を使って次の値を求めよ。

(1) $\cos 105^\circ =$

(2) $\sin 105^\circ =$

例　15° は 45° から 30° を引いた角度である。三角関数の性質

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

とサイン、コサインの加法定理を使うと、次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \cos 45^\circ \cos(-30^\circ) - \sin 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \sin 45^\circ \cos(-30^\circ) + \cos 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問 2　例を参考にして、次式を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

(1) $\cos(\alpha - \beta) =$

(2) $\sin(\alpha - \beta) =$

問 3　$-15^\circ = 30^\circ - 45^\circ$ と考えて次の値を求めよ。

(1) $\cos(-15^\circ) =$

(2) $\sin(-15^\circ) =$

＜加法定理４＞

例 41 ページの例より $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\tan 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで分母の有理化をするために分母と分子に $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ をかけると

$$\tan 75° = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2+2\sqrt{6}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

（別解） $\cos 75°$ と $\sin 75°$ の一方しかわかっていない場合は次のように考える。

$$\tan 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°}{\cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°}$$

$$= \frac{\frac{\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°}{\cos 45° \cos 30°}}{\frac{\cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°}{\cos 45° \cos 30°}} = \frac{\frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin 30°}{\cos 30°}}{1 - \frac{\sin 45°}{\cos 45°} \cdot \frac{\sin 30°}{\cos 30°}}$$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

問 1 $\tan 105°$ を求めよ。

問 2 上の別解を参考にして $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha+\beta) =$

問 3 問 2 の式で β のかわりに $-\beta$ を代入することにより $\tan(\alpha-\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha-\beta) =$

< 加法定理の応用 1 >

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

(複合同順)

(加法定理)

例

1. $\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta\cos 360^\circ + \cos\theta\sin 360^\circ = (\sin\theta) \times 1 + (\cos\theta) \times 0 = \sin\theta$
2. $\sin(-\theta) = \sin(-\theta + 360^\circ) = \sin(360^\circ - \theta) = \sin 360^\circ\cos\theta - \cos 360^\circ\sin\theta = -\sin\theta$
3. $\tan(\theta + 180^\circ) = \dfrac{\tan\theta + \tan 180^\circ}{1 - \tan\theta\tan 180^\circ} = \dfrac{(\tan\theta) + 0}{1 - (\tan\theta) \times 0} = \tan\theta$

問 1 加法定理を用いて次式を展開し, 38 ページの性質を導け。 (途中式も書くこと)

(1) $\cos(\theta + 360^\circ) =$

(2) $\tan(\theta + 360^\circ) =$

(3) $\cos(-\theta) =$

(4) $\tan(-\theta) =$

(5) $\sin(\theta + 180^\circ) =$

(6) $\cos(\theta + 180^\circ) =$

(7) $\sin(180^\circ - \theta) =$

(8) $\cos(180^\circ - \theta) =$

(9) $\tan(180^\circ - \theta) =$

(10) $\sin(\theta + 90^\circ) =$

(11) $\cos(\theta + 90^\circ) =$

(12) $\sin(90^\circ - \theta) =$

(13) $\cos(90^\circ - \theta) =$

問 2 加法定理で $\beta = \alpha$ とおくことにより, 次式を $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ だけで表せ。

(1) $\sin(2\alpha) =$

(2) $\cos(2\alpha) =$

(3) $\tan(2\alpha) =$

(注) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を用いると $\cos(2\alpha)$ は, $\cos\alpha$ だけ, $\sin\alpha$ だけで
表すことができる。

＜加法定理の応用 2＞

例1 正弦の加法定理を用いると , 例えば

$$\sin(\theta+30^\circ)=\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ$$

すなわち

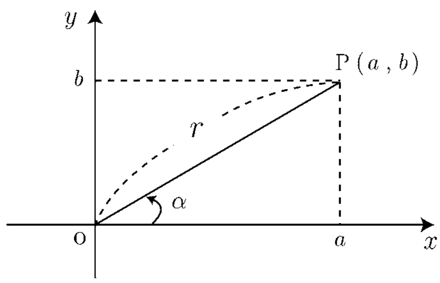
$$\sin(\theta+30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

が成りたつことがわかる。両辺を 2 倍すると次の等式が得られる。

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+30^\circ)$$

このように , $a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式は , $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することができる。

座標平面上に点 P(a , b) をとり , 動径 OP の表す角の 1 つを α とする。



OP$=\sqrt{a^2+b^2}=r$ とすると

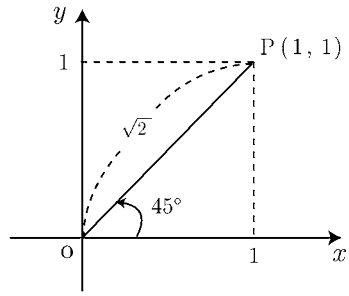
$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=r\left(\frac{a}{r}\sin\theta+\frac{b}{r}\cos\theta\right)\\&=r(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)\\&=r\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

例2 $\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にしたい。

$a=1$, $b=1$, $r=\sqrt{2}$, $\alpha=45^\circ$

であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$$



(注) 検算は例 1 のように加法定理を用いて展開すればよい。

問 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし r は正の数である。α は負の角でもよい。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(2) $-\sin\theta+\cos\theta$

(3) $-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

(4) $\sin\theta-\cos\theta$

一般に次のことが成り立つ。

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

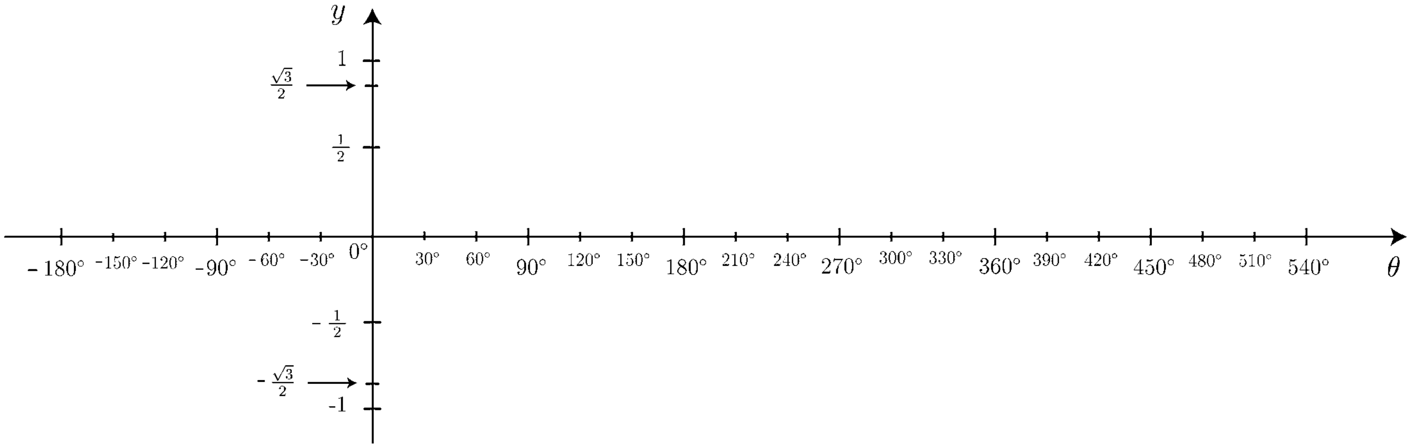
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad,\quad\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(αは負の角でもよい。
普通αは
$-180^\circ<\alpha\leqq 180^\circ$
の範囲で考える場合が多い。)

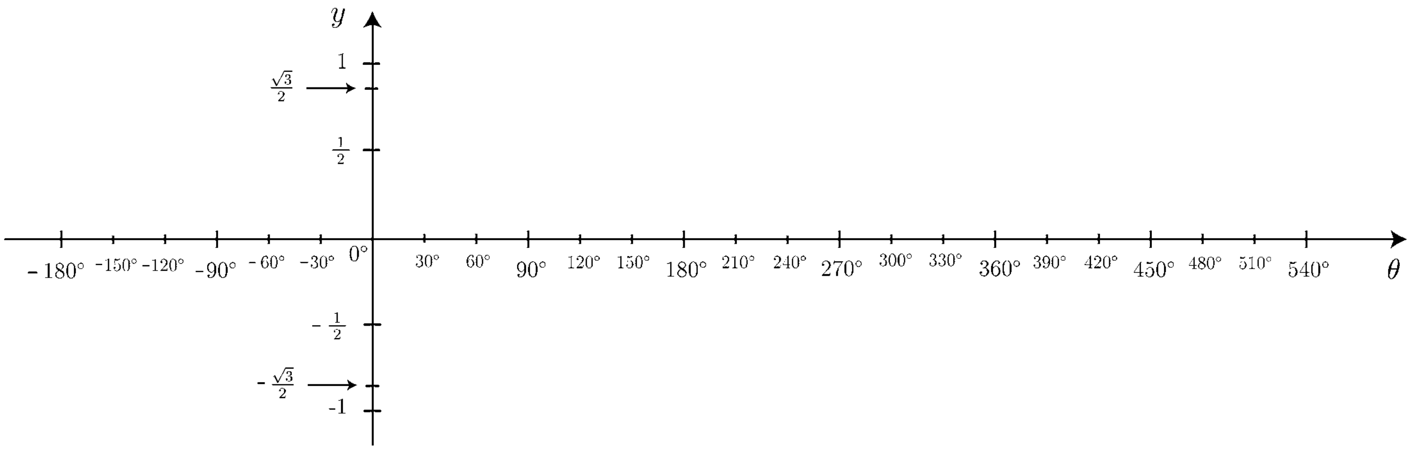
＜三角関数のグラフ 1＞

問　次の三角関数のグラフを (　) 内の範囲で描け。(30° おきに通る点の座標を示せ。)

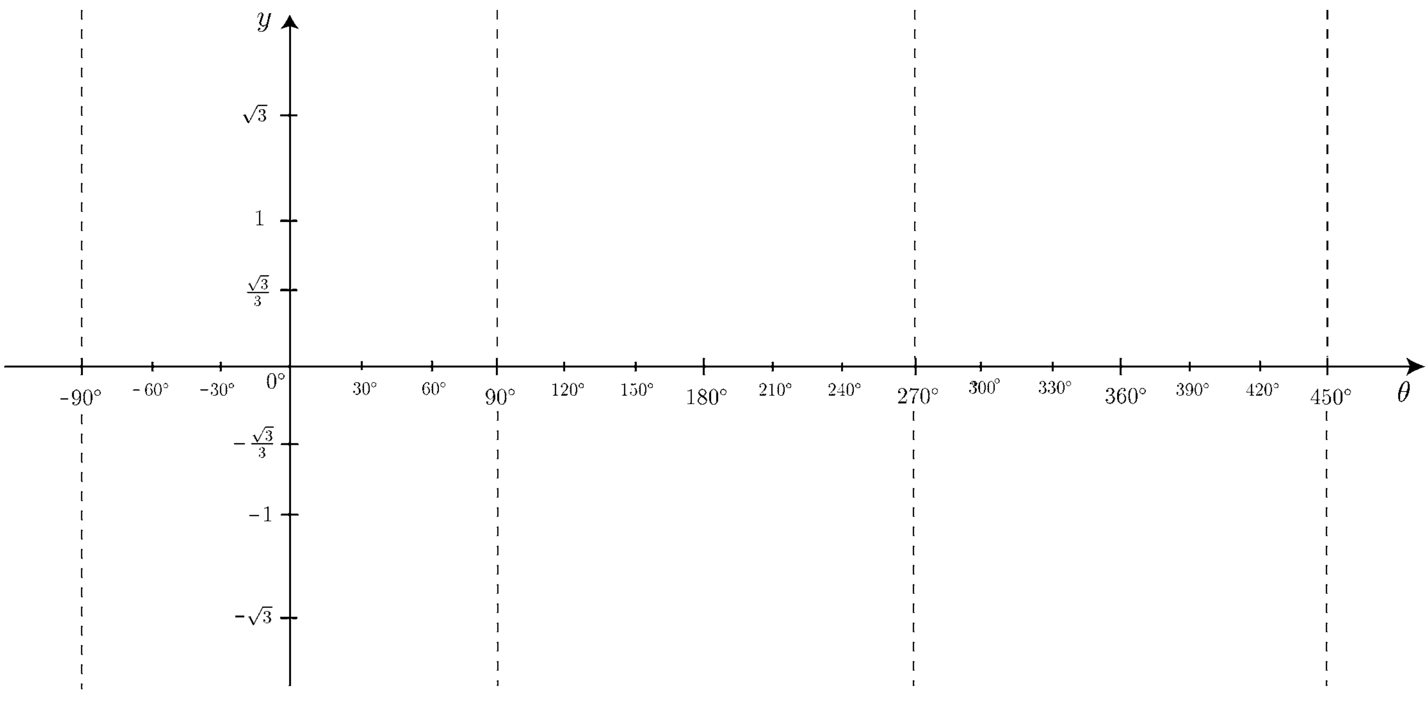
(1)　$y = \sin\theta \quad (-180^\circ \leqq \theta \leqq 540^\circ)$



(2)　$y = \cos\theta \quad (-180^\circ \leqq \theta \leqq 540^\circ)$



(3)　$y = \tan\theta \quad (-90^\circ \leqq \theta \leqq 450^\circ)$



＜三角関数のグラフ２＞

38 ページより $\sin(\theta+360^\circ)=\sin\theta$ が成り立つから , $\sin\theta$ の値は 360° ごとに同じ変化を繰り返す。すなわち $y=\sin\theta$ のグラフは 360° ごとに同じ形を繰り返す。このような関数を**周期関数**という。また 360° を $\sin\theta$ の**周期**という。

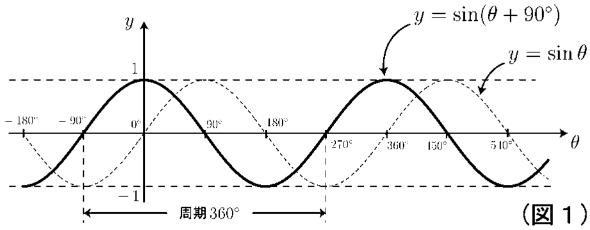
問１ $\cos\theta$ および $\tan\theta$ の周期を求めよ。

例題 次の関数の周期を求め , グラフを描け。

(1) $y=\sin(\theta+90^\circ)$ (2) $y=2\sin\theta$

(解) (1) 下の対応表よりグラフは図１の実数であり , 周期は 360° である。

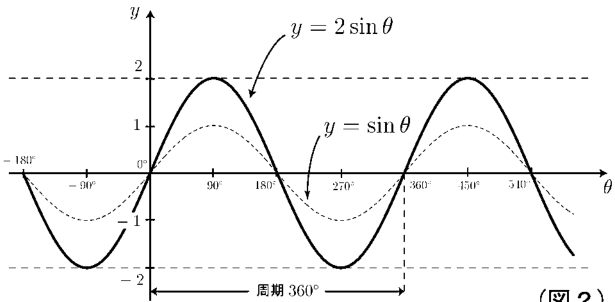
θ	-90°	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
$\sin\theta$	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$\theta+90^\circ$	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°	630°
$\sin(\theta+90^\circ)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1



(図１)

(2) 下の対応表よりグラフは図２の実線であり , 周期は 360° である。

θ	-90°	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
$\sin\theta$	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin\theta$	-2	0	2	0	-2	0	2	0



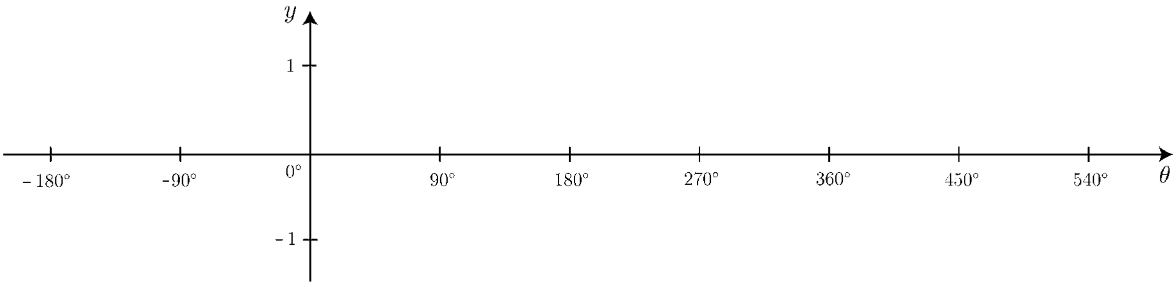
(図２)

(注１) $y=\sin(\theta+90^\circ)$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に -90° だけ平行移動したグラフである。

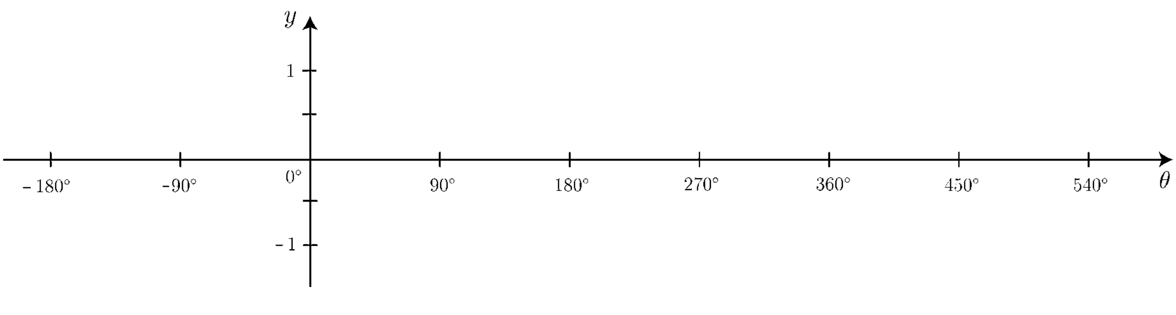
(注２) $y=2\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍だけ拡大したグラフである。

問２ 次の関数の周期を求め , グラフを描け。

(1) $y=\sin(\theta-90^\circ)$



(2) $y=-\frac{1}{2}\cos\theta$



＜三角関数のグラフ 3＞

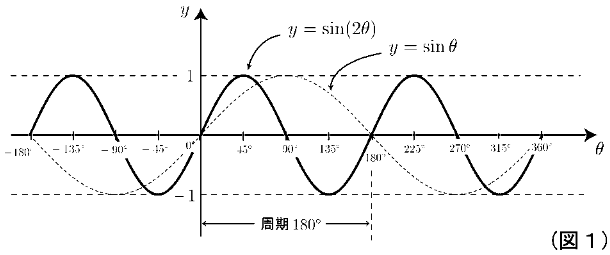
例題　次の関数の周期を求め , グラフを描け。

(1)　$y = \sin(2\theta)$　　　　(2)　$y = 2\sin(\theta - 30°)$

解

(1)　下の対応表によりグラフは図 1 の実線であり，周期は 180° である。

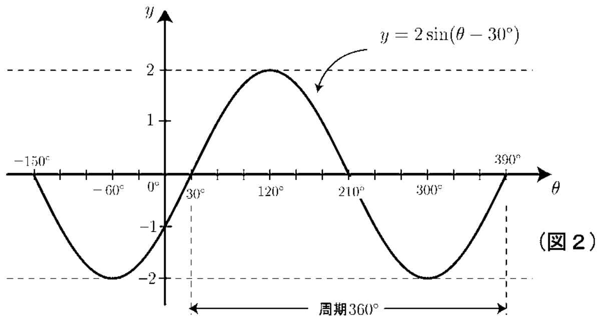
θ	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$
2θ	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin(2\theta)$	0	-1	0	1	0	-1	0



（図 1）

(2)　下の対応表よりグラフは図 2 の曲線であり，周期は 360° である。

θ	$-150°$	$-60°$	$30°$	$120°$	$210°$	$300°$	$390°$
$\theta - 30°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin(\theta - 30°)$	0	-1	0	1	0	-1	0
$2\sin(\theta - 30°)$	0	-2	0	2	0	-2	0



（図 2）

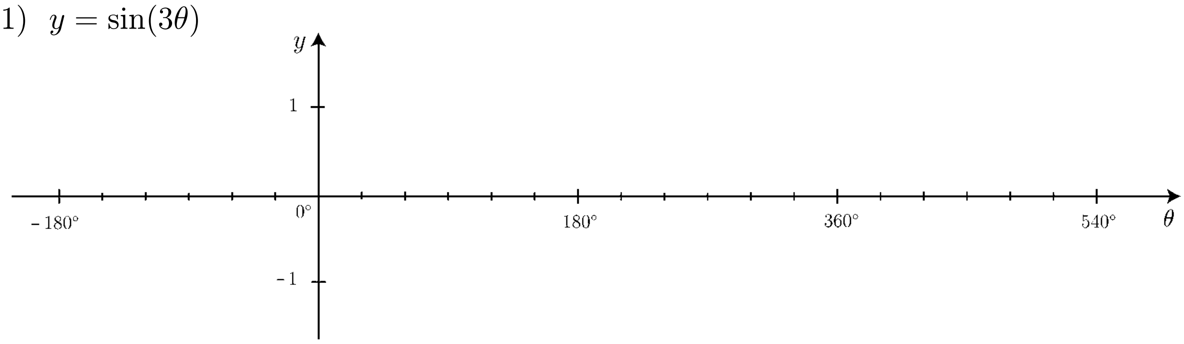
（注 1）$y = \sin(2\theta)$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ縮小したものである。

（注 2）$y = 2\sin(\theta - 30°)$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 30° だけ平行移動し , y 軸方向に 2 倍だけ拡大したものである。

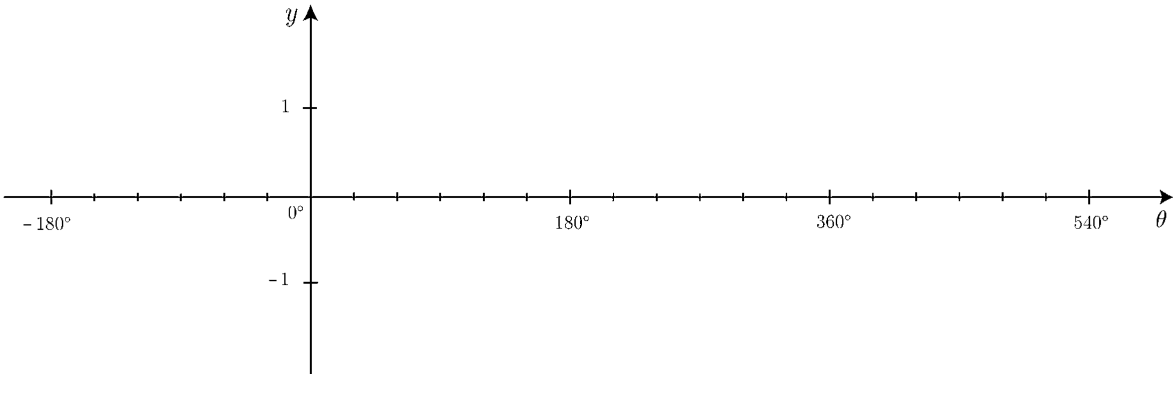
（注 3）上記の対応表を作るときは , まず 2θ および $\theta - 30°$ の欄に 90° おきに角度を入れてから , 対応する θ の角度を記入する。

問　次の関数の周期を求め , グラフを描け。

(1)　$y = \sin(3\theta)$



(2)　$y = \sqrt{2}\sin(\theta - 45°)$



＜三角関数のグラフ 4＞

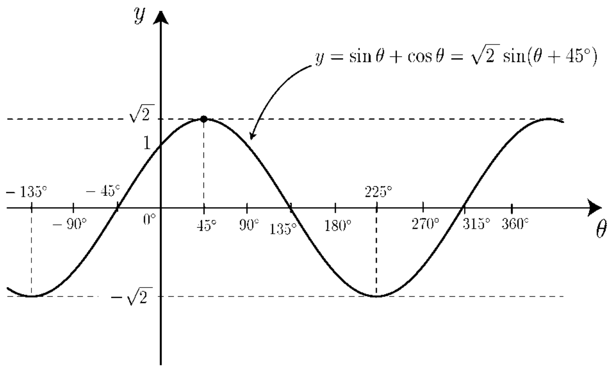
例題 次の関数の最大値・最小値を求めよ。またそのグラフを描け。

$$y = \sin\theta + \cos\theta$$

(解) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$ であるから。

$$y = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$$

のグラフは下の対応表より右図のようになる。



θ	$-135°$	$-45°$	$45°$	$135°$	$225°$	$315°$
$\theta + 45°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin(\theta + 45°)$	-1	0	1	0	-1	0
$\sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0

$\sin(\theta + 45°)$ がとる値の範囲は

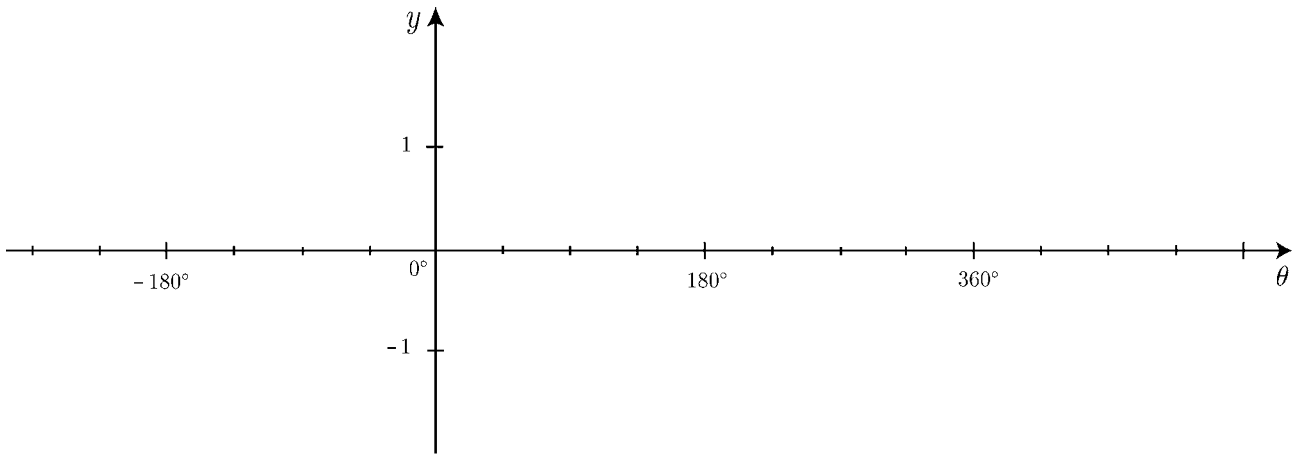
$$-1 \leqq \sin(\theta + 45°) \leqq 1$$

よって，　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

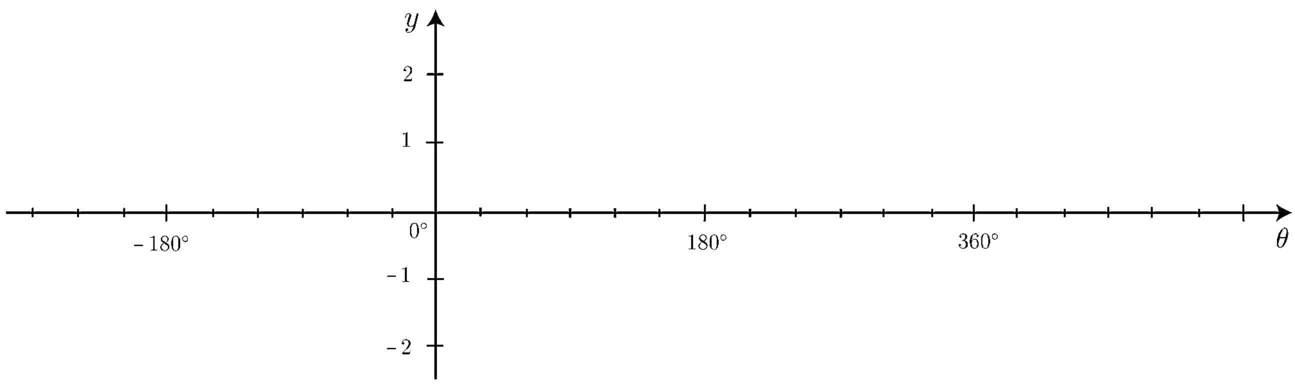
従って，y の最大値は $\sqrt{2}$ ，y の最小値は $-\sqrt{2}$

問 次の関数の最大値・最小値を求めよ。またそのグラフを描け。

(1) $y = -\sin\theta + \cos\theta$



(2) $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$



＜三角関数の練習＞

問1 θ が第 4 象限の角であるとき $\sin\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問2 θ が第 2 象限の角であり，$\tan\theta = a$ のとき，$\cos\theta$ を a で表せ。

問3 次式を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ だけで表せ。

(1) $\sin(\theta + 180^\circ)$　　(2) $\cos(180^\circ - \theta)$

(3) $\tan(\theta - 180^\circ)$　　(4) $\sin(\theta + 90^\circ)$

(5) $\cos(\theta - 90^\circ)$　　(6) $\tan(-\theta)$

問4 次の座標を三角関数表示せよ。

(1) $(\ 1\ ,\ \sqrt{3}\ )$　　(2) $(\ -\sqrt{3}\ ,\ 1\ )$

(3) $(\ -3\ ,\ -\sqrt{3}\ )$　　(4) $(\ 2\ ,\ -2\ )$

問5 次式の値を求めよ。

(1) $\sin 165^\circ$　　(2) $\cos 195^\circ$

(3) $\tan 255^\circ$　　(4) $\sin(-75^\circ)$

問6 $\cos^2\alpha$ を $\cos(2\alpha)$ だけを用いて表せ。

問7 $\sin^2\alpha$ を $\cos(2\alpha)$ だけを用いて表せ。

問8 次式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし r は正の数である。α は負の角でもよい。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $-\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta$

(3) $-2\sin\theta - 2\cos\theta$　　(4) $3\sin\theta - 3\cos\theta$

問9 次の関数の周期を求めよ。

(1) $y = \sin(4\theta)$

(2) $y = \cos(3\theta)$

問10 次の関数のグラフを描け。

$$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$

また最大値・最小値を求めよ。