高知工科大学
基礎数学ワークブック

(2004年度版)

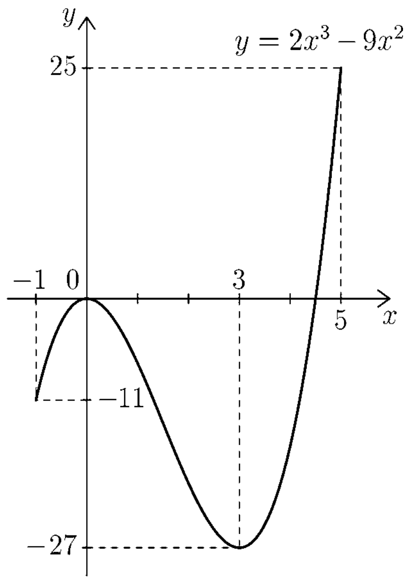
入門編
$No.\ 3$

内容

◎ 整関数の微分

◎ 微分の応用

◎ 整関数の積分



井上 昌昭 著

< 関数の値 >

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例 1　関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \qquad \left(f(\square) = \square^2 + 5 \times \square - 4 \right)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 2^3 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問 1　$f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

(1)　$f(x) = x^2 - 3x + 5$　,　$f(0) =$　,　$f(1) =$　,　$f(2) =$

(2)　$f(x) = x^3 - 2x$　,　$f(1) =$　,　$f(2) =$　,　$f(3) =$

(3)　$f(x) = x^4 - x^3$　,　$f(-3) =$　,　$f(0) =$　,　$f(3) =$

(4)　$f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$　,　$f(0) =$　,　$f(1) =$　,　$f(5) =$

例 2　$f(x) = x^2 + 3x$　のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h)$$

問 2　$f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a+h)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = x^3$　,　$f(a) =$　,　$f(a+h) =$

(2)　$f(x) = x + 1$　,　$f(a) =$　,　$f(a+h) =$

(3)　$f(x) = 2x^2 - 5$　,　$f(a) =$　,　$f(a+h) =$

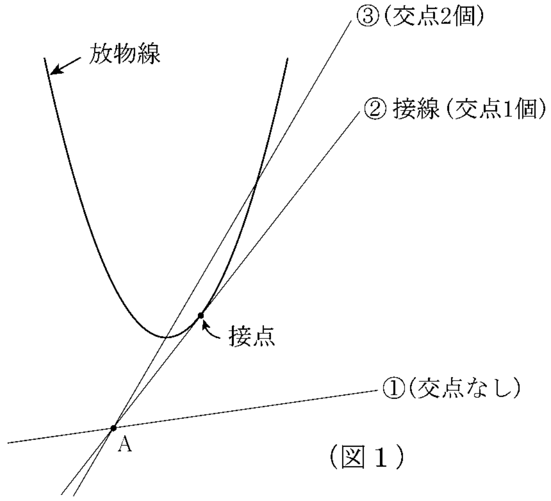
(4)　$f(x) = x^2 + 3x$　,　$f(a) =$　,　$f(a+h) =$

＜接線＞

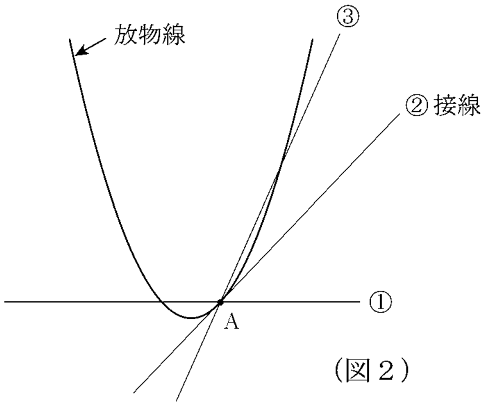
放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると、

①:交点なし
②:交点は 1 個
③:交点は 2 個

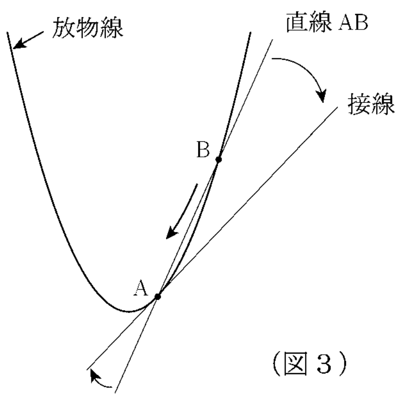
となる。直線②を**接線**といい、そのときの交点を**接点**という。
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線②が接線であり、点 A が接点である。



（図 1）



（図 2）



（図 3）

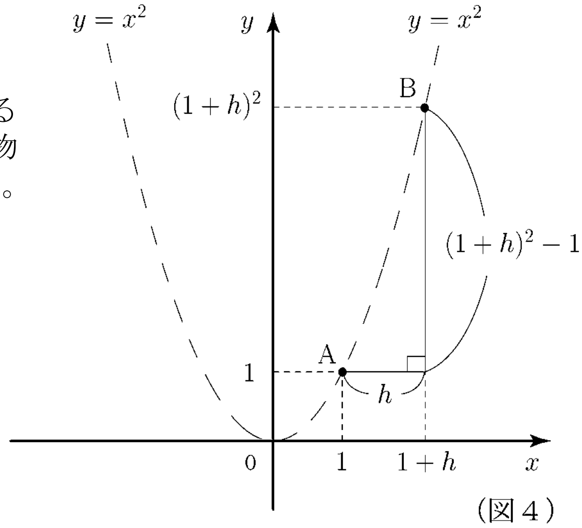
図 2 の接線②を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y = x^2$ 上の点 A $(1\,,1)$ を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(\,1+h\,,(1+h)^2\,)$ とする (図 4)。

(1) 直線 AB の傾きを h で表せ。

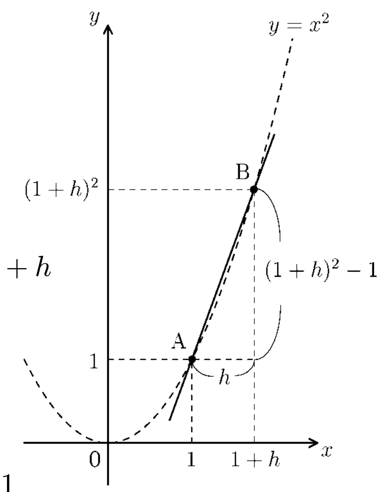
(2) $h = 0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。

(3) $h = 0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。



（図 4）

＜極限 1＞



前ページの問の結果より、放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(1,1)$ と B$(1+h\ ,\ (1+h)^2)$ に対し、直線 AB の傾きは

$$\text{直線 AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

となる。ここで

$$h = 0.1 \text{ のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = 0.01 \text{ のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \text{ のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \text{ のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.0001$$

となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。
このことを記号→を使って

(1) $\quad h \to 0$ のとき 直線 AB の傾き $\to 2$

とか

(2) $\quad h \to 0$ のとき $\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h \ \to\ 2$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の**極限値**
または単に**極限** (limit) という。(2) を記号 lim を使って次のように書く。

(3) $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

問 1 $h \to 0$ のとき直線 AB は放物線上の点 A$(1,1)$ を接点とする接線に近づく。
(3) 式の極限値 2 は接線の何を意味するか？

例 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\frac{1}{4}}{h}$

＜極限 2＞

例 1 (1) $h \to 0$ のとき $3h \to 0$ である。つまり $\lim\limits_{h\to 0} 3h = 0$

(2) $h \to 0$ のとき $(2+h)(3+h) \to 6$ つまり $\lim\limits_{h\to 0}(2+h)(3+h) = 6$

(注) (1) は $\lim\limits_{h\to 0} 3h = 3 \times 0 = 0$, (2) は $\lim\limits_{h\to 0}(2+h)(3+h) = (2+0)\times(3+0) = 6$

と考える。このように $h \to 0$ の極限値は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の式で $h = 0$ を代入

すると $\dfrac{0}{0}$ の形で答がわからないので、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h)$

の形になおしてから $h = 0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+2h+h^2)-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6+3h) = 6$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12$

(注) ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ を用いた。

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(1+h)^2-5}{h}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(2+h)^2-12}{h}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^3-27}{h}$

例 3 (1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(a+h)-5a}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(a+h)^2-3a^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(a^2+2ah+h^2)-3a^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6a+3h) = 6a$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(a+h)-3a}{h}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

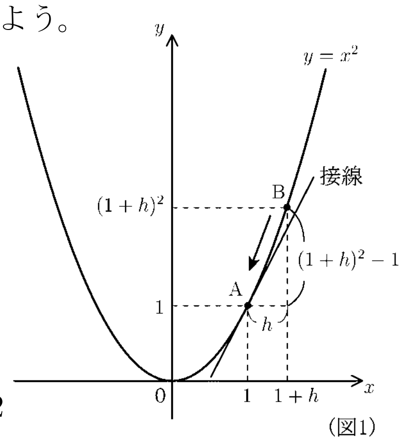
＜接線の傾き 1＞

直線の傾きは常に一定だが、曲線の傾きは場所によって変る。

$$\boxed{\text{曲線の傾き} = \text{接線の傾き}}$$

と考えて。接線の傾きを求めることによって曲線の傾きを調べよう。

例 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(1, 1)$ における放物線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。
この接線の傾きは放物線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。

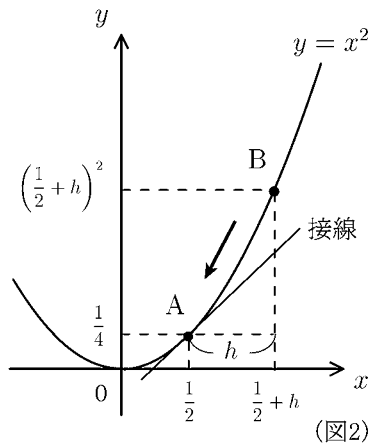


(図1)

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \to 0}(\text{直線 AB の傾き}) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

である。つまり点 $\mathrm{A}(1, 1)$ における放物線の傾きは 2 である。

問 1 図 2 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

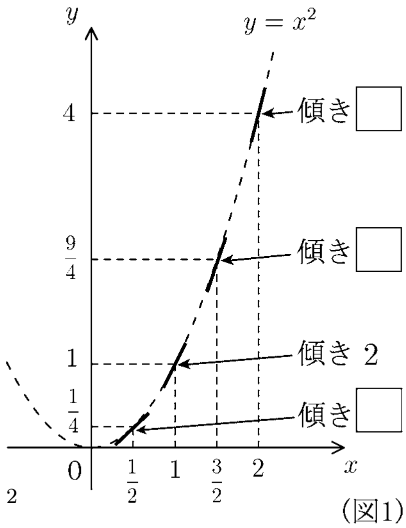


(図2)

問 2 上の例と問 1 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(2, 4)$ における傾きを求めよ。

問 3 上の例と問 1、問 2 を参考にして放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

＜接線の傾き 2＞



(図1)

問 1　(1) 前ページの例と問の結果をグラフで表すと図 1 のようになる。図 1 の□の中に傾きを表す数を入れよ。

(2) 前ページの例と問の計算をまとめると以下のようになる。□の中に適当な数を入れよ。

$$x = 2\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \boxed{}$$

$$x = \frac{3}{2}\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\boxed{} + h\right)^2 - \left(\boxed{}\right)^2}{h} = \boxed{}$$

$$x = 1\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2$$

$$x = \frac{1}{2}\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\boxed{} + h\right)^2 - \left(\boxed{}\right)^2}{h} = \boxed{}$$

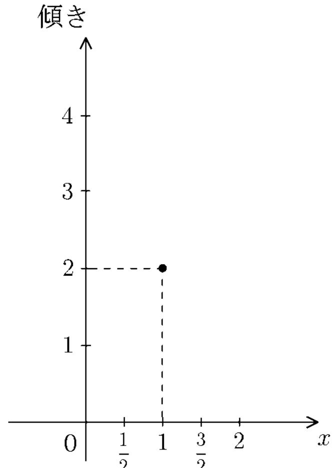
$$x = 0\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\boxed{} + h\right)^2 - \left(\boxed{}\right)^2}{h} = \boxed{}$$

(3) 上の結果を表にまとめたい。下の表の空欄に適当な数を入れよ。

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
傾き			2		

またこの表の結果を図 2 上に黒丸で作図せよ。さらにこの表および図 2 において、x と傾きの関係を式で表せ。(傾きを x の式で表す)

傾き =

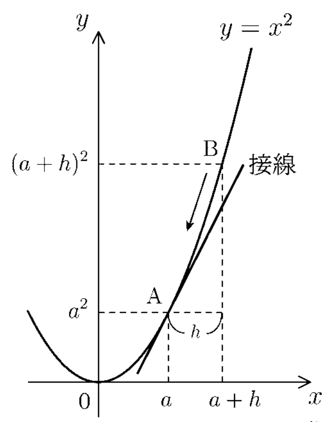


(図2)

問 2　放物線 $y = x^2$ 上の任意の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における傾きを求めたい。図 3 を参考にして接戦の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

$$x = a\text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}$$

$$=$$



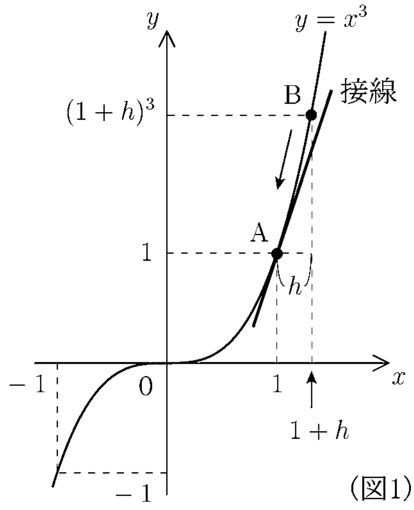
(図3)

問 3　問 2 の結果を用いて放物線 $y = x^2$ における以下の傾きを求めよ。

(1) $x = -1$ のときの傾き =

(2) $x = -2$ のときの傾き =

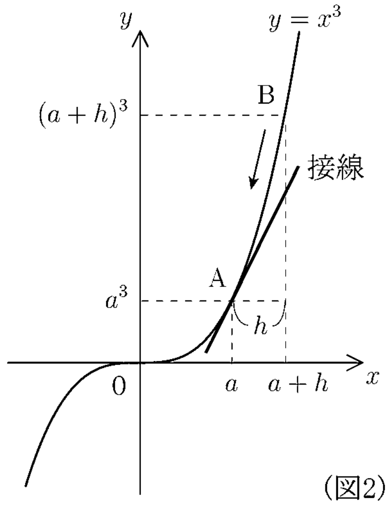
＜接線の傾き 3＞



(図1)

問 1　3 次曲線 $y = x^3$ 上の点 A$(1, 1)$ における 3 次曲線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きは 3 次曲線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。右図を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を用いて、点 A における傾きを求めよ。

(解)　接線の傾き $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} =$

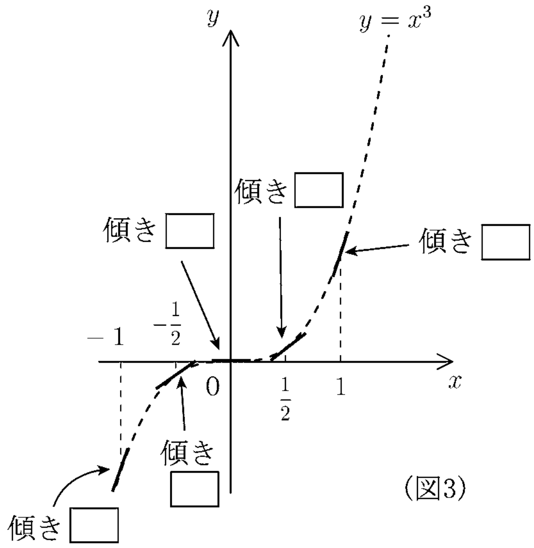


(図2)

問 2　3 次曲線 $y = x^3$ 上の任意の点 A(a, a^3) における 3 次曲線の傾きを求めたい。図 2 を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

接線の傾き $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h}$

$=$



(図3)

問 3　問 2 の結果を用いて 3 次曲線 $y = x^3$ における以下の傾きを求め、図 3 の□内にその傾きを表す数を入れよ。

(1) $x = \dfrac{1}{2}$ のときの傾き $=$

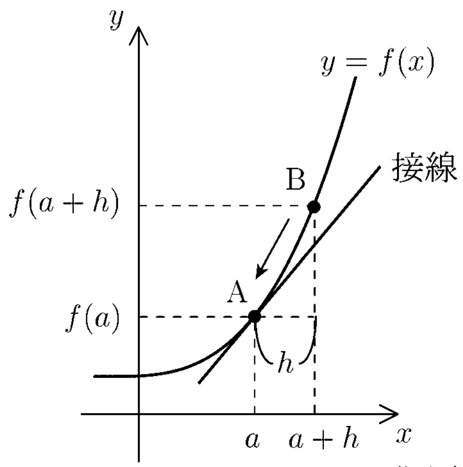
(2) $x = 0$ のときの傾き $=$

(3) $x = -\dfrac{1}{2}$ のときの傾き $=$

(4) $x = -1$ のときの傾き $=$

＜微分係数 1＞

問 1　関数 $y=f(x)$ のグラフが図 1 のような曲線である場合に、点 $\mathrm{A}\big(a, f(a)\big)$ における曲線の傾きは点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きはこの曲線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。図 1 を参考にして接線の傾きを極限の式で表せ。



(図1)

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad\qquad}{h}$$

一般の関数 $y=f(x)$ と任意の数 a に対して次の極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい、記号 $f'(a)$ で表す。すなわち

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad \text{(微分係数)}$$

問 2　関数 $f(x)$ が問 1 のような場合、微分係数 $f'(a)$ は図 1 の何を意味するか答えよ。

例　(1) $f(x)=x^3$ のとき $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

(2) $f(x)=5x^2$ のとき $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{5(a+h)^2-5a^2}{h}$

(3) $f(x)=x^2+3x$ のとき $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2+3(a+h)-a^2-3a}{h}$

問 3　関数 $f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を例のような極限の式で表せ。

(1) $f(x)=x^4$ のとき $f'(a)=$

(2) $f(x)=4x^3$ のとき $f'(a)=$

(3) $f(x)=x^2-4x$ のとき $f'(a)=$

(4) $f(x)=x^3+3x^2$ のとき $f'(a)=$

＜微分係数 2＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

である。$f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ のときの傾きを意味する。このページでは $f'(a)$ の計算方法を示す。

例 1 $f(x)=5x^2$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(a+h)^2-5a^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{5(a^2+2ah+h^2)-5a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10ah+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(10a+5h)=10a
\end{aligned}$$

例 2 $f(x)=x^2-2x$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-2(a+h)-(a^2-2a)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(a^2+2ah+h^2)-2a-2h-a^2+2a}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h-2)=2a-2
\end{aligned}$$

例 3 $f(x)=x^3+x^2$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3+(a+h)^2-(a^3+a^2)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3)+(a^2+2ah+h^2)-a^3-a^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3+2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2+2a+h)=3a^2+2a
\end{aligned}$$

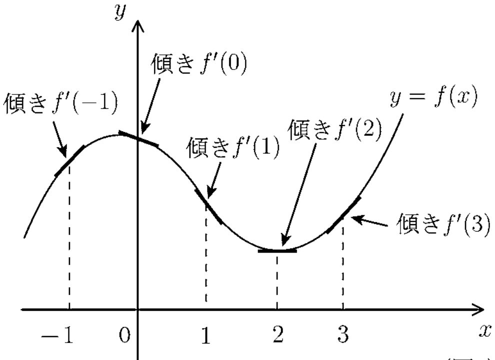
問 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ を極限の計算によって求めよ。

(1) $f(x)=3x^2$, $f'(a)=$

(2) $f(x)=x^2-4x$, $f'(a)=$

(3) $f(x)=x^3+3x^2$, $f'(a)=$

＜微分係数 3＞



(図1)

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ のときの傾きを意味する。$f(x)$ が右図 (図 1) のようなときには $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ のときの傾きは $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ である。

例　$y=x^2-2x$ のグラフは図 2 のようになる。$f(x)=x^2-2x$ のとき前ページの例より

$$f'(a)=2a-2$$

であるから傾きは以下のように計算できる。

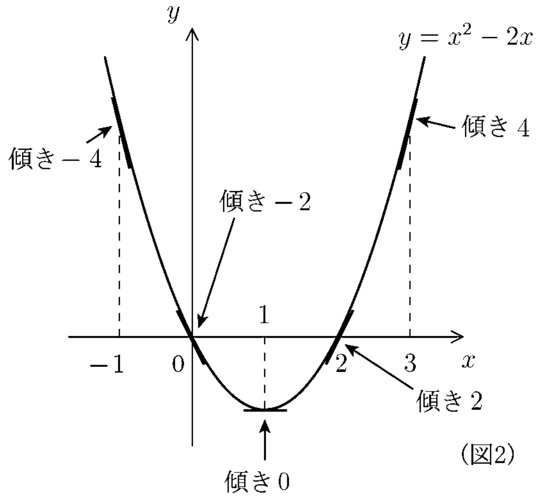
$f'(-1)=2\times(-1)-2=-4 \;\Rightarrow\; x=-1$ のときの傾き -4

$f'(0)=2\times 0-2=-2 \;\Rightarrow\; x=0$ のときの傾き -2

$f'(1)=2\times 1-2=0 \;\Rightarrow\; x=1$ のときの傾きは 0

$f'(2)=2\times 2-2=2 \;\Rightarrow\; x=2$ のときの傾きは 2

$f'(3)=2\times 3-2=4 \;\Rightarrow\; x=3$ のときの傾きは 4



(図2)

問 1　$f(x)=x^2-4x$ に対し以下の微分係数を求め、図 3 の□内に傾きを記入せよ。(前ページ問の結果を使ってよい)

$f'(a)=$

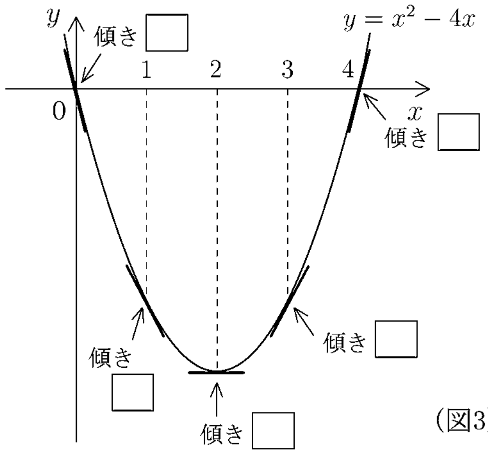
$f'(0)=$

$f'(1)=$

$f'(2)=$

$f'(3)=$

$f'(4)=$



(図3)

問 2　$f(x)=x^3+3x^2$ に対し以下の微分係数を求め、図 4 の□内に傾きを記入せよ。

$f'(a)=$

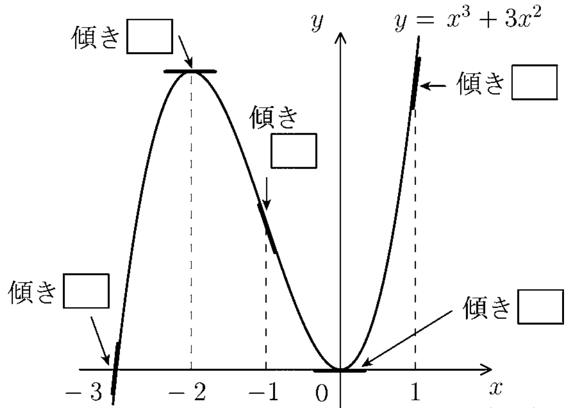
$f'(-3)=$

$f'(-2)=$

$f'(-1)=$

$f'(0)=$

$f'(1)=$



(図4)

＜導関数 1＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \quad \text{(微分係数)}$$

は a の値によって変る。$f'(a)$ を a の関数と考え、 a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \quad \text{(導関数)}$$

を元の関数 $f(x)$ の**導関数**という。

例 $f(x)=x^2-2x$ のとき前ページの例より微分係数は

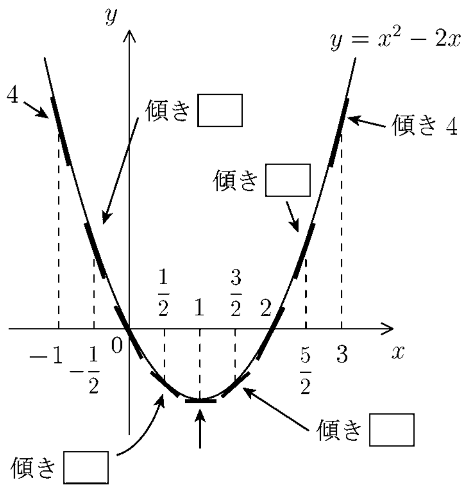
$$f'(a)=2a-2 \quad \text{(微分係数)}$$

であったから、導関数は

$$f'(x)=2x-2 \quad \text{(導関数)}$$

となる。

微分係数 $f'(a)$ はもとの関数 $f(x)$ の傾きを表すから導関数 $f'(x)$ も傾きを表す。



x	-1	0	1	2	3	a	x
傾き $f'(x)$	-4	-2	0	2	4	$2a-2$	$2x-2$

問 1 例の導関数 $f'(x)=2x-2$ に対し以下の値を求め、右図の□の中に傾きを記入せよ。

(1) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=$ (2) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$ (3) $f'\left(\frac{3}{2}\right)=$ (4) $f'\left(\frac{5}{2}\right)=$

問 2 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ と導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(2) $f(x)=x^3$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(3) $f(x)=5x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(4) $f(x)=x^2-4x$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(5) $f(x)=x^3+x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(6) $f(x)=x^3+3x^2$

$f'(a)=$

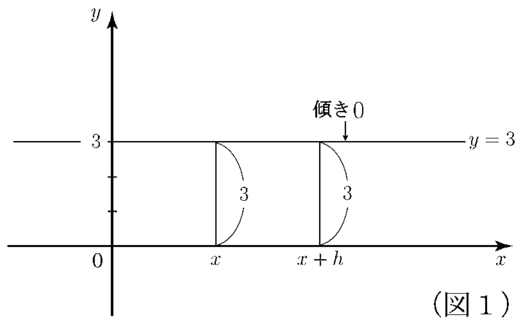
$f'(x)=$

＜ 導関数 2 ＞

例 1　$f(x)=3$ のとき $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$

である。このように関数 $f(x)$ が x によらない数である場合を**定数関数**という。定数関数のグラフは図 1 のように傾きが 0 (ゼロ) の直線である。



（図 1）

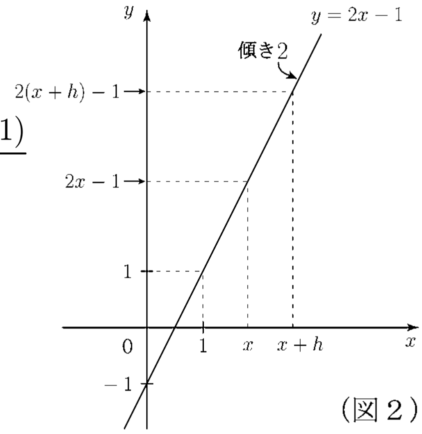
例 2　$f(x)=2x-1$ のとき

$$f(x+h)=2(x+h)-1$$

より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-1-2x+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

(注)　$f(x)$ が一次関数 (または定数関数) の場合 $y=f(x)$ のグラフは図 1、図 2 のような直線である。このとき導関数 $f'(x)$ はその直線の傾きを表す。



（図 2）

問 1　$f(x)$ が以下の場合に導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=2$,　$f'(x)=$　　　　(2)　$f(x)=5x-2$,　$f'(x)=$

例 3　$f(x)=x^3$ のとき導関数は $f'(x)=3x^2$ である。このことを略して

$$\boxed{\left(x^3\right)'=3x^2}$$

と書く。同様にして

$f(x)=x^2$ のとき $f'(x)=2x$ のことを　$\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$

$f(x)=x$ のとき $f'(x)=1$ のことを　$\boxed{\left(x\right)'=1}$

$f(x)=1$ のとき $f'(x)=0$ のことを　$\boxed{\left(1\right)'=0}$

と略記する。

問 2　前ページおよびこのページの結果を利用して、次の導関数を求めよ。

(1)　$\left(3\right)'=$　　(2)　$(2)'=$　　(3)　$\left(2x-1\right)'=$

(4)　$\left(5x-2\right)'=$　　(5)　$\left(5x^2\right)'=$　　(6)　$\left(x^2-2x\right)'=$

(7)　$\left(x^2-4x\right)'=$　　(8)　$\left(x^3+x^2\right)'=$　　(9)　$\left(x^3+3x^2\right)'=$

< 導関数 3 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y = f(x)$ を「**微分**する」という。

例 1 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad , \qquad \left(5x^2\right)' = 10x = 5 \times 2x$$

であった。従って

$$\left(5x^2\right)' = 5 \times \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に定数 k と関数 $f(x)$ に対して

$$\boxed{\left(kf(x)\right)' = k \times \left(f(x)\right)'} \qquad \text{(定数倍の微分)}$$

が成り立つ。

例 2 前ページの結果より

$$\left(x^3\right)' = 3x^2 \quad , \qquad \left(x^2\right)' = 2x \quad , \qquad \left(x^3 + x^2\right)' = 3x^2 + 2x$$

である。従って

$$\left(x^3 + x^2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned} \left(f(x) + g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)' \\ \left(f(x) - g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)' \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\text{(和の微分)} \\ &\text{(差の微分)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

例 3 (1) $\left(5x^3 + 7x^2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(7x^2\right)' = 5 \times \left(x^3\right)' + 7 \times \left(x^2\right)'$

$$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$$

(2) $\left(x^2 - 4x + 3\right)' = (x^2)' - 4 \times \left(x\right)' + \left(3\right)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。
定数関数の傾きは 0(ゼロ) だからである。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(x^3 + 2\right)'$ (2) $\left(3x^2 - 2x^3\right)'$

(3) $\left(x^2 - 3x + 2\right)'$ (4) $\left(3x^3 - x^2 + 5x - 1\right)'$

＜パスカルの三角形＞

例 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

問 1 次の展開式を求めたい。$\boxed{}$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$= \boxed{} \times a^4 + \boxed{} \times a^3b + \boxed{} \times a^2b^2 + \boxed{} \times ab^3 + \boxed{} \times b^4$

(2) $(a\ +\ b)^5 = (a\ +\ b)\left(\boxed{} \times a^4 + \boxed{} \times a^3b + \boxed{} \times a^2b^2 + \boxed{} \times ab^3 + \boxed{} \times b^4\right)$

$= \boxed{} \times a^5 + \boxed{} \times a^4b + \boxed{} \times a^3b^2 + \boxed{} \times a^2b^3 + \boxed{} \times ab^4 + \boxed{} \times b^5$

問 2 $(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$(a+b)^0 = 1$ ………………………… 1

$(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$ ………………………… 1　1

$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$ ………………………… 1　2　1

$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$ ………………………… 1　3　3　1

$(a+b)^4 = \boxed{} \times a^4 + \boxed{} \times a^3b + \boxed{} \times a^2b^2 + \boxed{} \times ab^3 + \boxed{} \times b^4$ ………… $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$(a+b)^5 = \boxed{} \times a^5 + \boxed{} \times a^4b + \boxed{} \times a^3b^2 + \boxed{} \times a^2b^3 + \boxed{} \times ab^4 + \boxed{} \times b^5$ $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a+b)^6 = \boxed{} \times a^6 + \boxed{} \times a^5b + \boxed{} \times a^4b^2 + \boxed{} \times a^3b^3 + \boxed{} \times a^2b^4 + \boxed{} \times ab^5 + \boxed{} \times b^6$

問 3 次式を展開せよ。

(1) $(x+h)^4 =$

(2) $(x+h)^5 =$

(3) $(x+h)^6 =$

＜ 整関数の微分 1 ＞

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、$f(x)$ を**整関数**という。
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

であった。$f(x)$ が整関数の場合にこの極限値を調べる。

例 1 $f(x) = 1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

例 2 $f(x) = x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

例 3 $f(x) = x^2$ のとき

$$\left(x^2\right)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

例 4 $f(x) = x^3$ のとき

$$\left(x^3\right)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

問 $f(x) = x^4$ のとき $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^4)' = f'(x) =$$

$<$ 整関数の微分 2 $>$

問 1 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^5)' = f'(x) =$

問 2 $f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^6)' = f'(x) =$

問 3 下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$, $x^1 = x$ である。

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問 4 n が一般の自然数のとき， x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$(x^n)' =$

＜ 整関数の微分 3 ＞

導関数の定義から以下の性質がわかる。関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$\bigl(kf(x)\bigr)' = k \times f'(x)$	(定数倍の微分)
$\bigl(f(x)+g(x)\bigr)' = f'(x)+g'(x)$	(和の微分)
$\bigl(f(x)-g(x)\bigr)' = f'(x)-g'(x)$	(差の微分)

が成り立つ。

例 (1) $(x^5+x^6)' = (x^5)'+(x^6)' = 5x^4+6x^5$

(2) $(7x^4)' = 7\times(x^4)' = 7\times 4x^3 = 28x^3$

(3) $(6x^5+5x^4)' = (6x^5)'+(5x^4)' = 30x^4+20x^3$

(4) $(x^7-4x^5+5x^2-8)' = (x^7)'-(4x^5)'+(5x^2)'-(8)'$

$= 7x^6-20x^4+10x$

(5) $\bigl((x^2+3)(x^2-4)\bigr)' = (x^4-x^2-12)' = 4x^3-2x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x-x^3)'$

(2) $(7x^6)'$

(3) $(10x^4+8x^7)'$

(4) $(6x^5-2x^3+3)'$

(5) $(3x^5-6x^2+9)'$

(6) $(4x^7-4x^4+9x^2-5x)'$

(7) $\bigl((x-1)(x+4)\bigr)'$

(8) $\bigl((x^2-3)(x^2-2)\bigr)'$

＜微分の練習＞

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3\,(1+h)^2-3}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}$

(3) $f(x)=x^2+3x$ のとき　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f\,(a+h)-f\,(a)}{h}$

問 2　次の関数を微分せよ。

(1) $y=2\,(x+1)\,(x-4)$　　(2) $y=(x-1)^3$

問 3　次の関数のグラフ上の点 P における接線の傾きを求めよ。

(1) 関数 $y=x^2-2x-8$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(-1,-5)$

(2) 関数 $y=x^3$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(2,8)$

(3) 関数 $y=x^3+x^2$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(1,2)$

問 4　曲線 $y=x^3-x^2$ について次の問に答えよ。

(1) 曲線上の点 $(3,18)$ における接線の傾きを求めよ。

(2) 曲線上の点 (a,b) における接線の傾きが 1 となるように a,b を定めよ。

問 5　3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の 3 つの条件をすべて満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$f(1)\ =3\quad,\quad f'(1)=10\quad,\quad f'(2)\ =25$$

＜関数の増減１＞

例 2 次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは図１のような放物線である。このグラフの頂点の座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y' = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6$$

を求める。次に $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \iff -2x + 6 = 0 \iff x = 3$$

であるから $x = 3$ のとき傾き y' が 0（ゼロ）になるのでそこが頂点である。

$x = 3$ のとき $y = -x^2+6x = -3^2+6\times3 = 9$

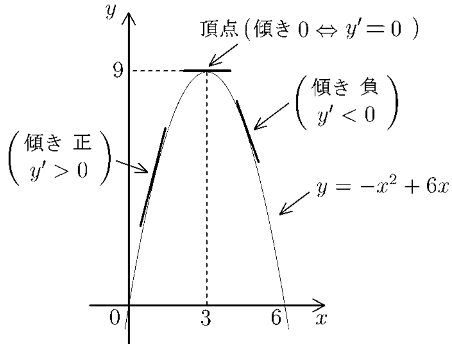
であるから頂点の座標は $(3, 9)$ である。

y' のグラフ（図２）より

$$x < 3 \text{ のとき } y' > 0$$
$$x = 3 \text{ のとき } y' = 0$$
$$x > 3 \text{ のとき } y' < 0$$

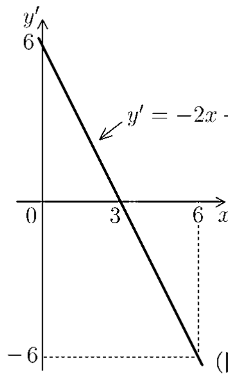
となる。$y' > 0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。$y' < 0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を**増減表**という。

＜元の関数 $y = -x^2 + 6x$ ＞



（図１）

＜導関数 $y' = -2x + 6$ ＞



（図２）

x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	9	↘

（注） 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

(1) $y' = 0$ となる x（この場合は $x = 3$）を求める。

(2) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より小さい数 x（例えば $x = 0$）を代入してプラスであれば（$x < 3$ の列で）y' の欄に $+$ と書き入れ、y の欄に ↗（右上がり）の記号を入れる。

(3) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より大きい数 x（例えば $x = 4$）を代入してマイナスであれば（$x > 3$ の列で）y' の欄に $-$ と書き入れ、y の欄に ↘（右下がり）の記号を入れる。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

< 関数の増減 2 >

例 3 次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。導関数のグラフ (図 2) より

$x < -1$ のとき $y' > 0$
$x = -1$ のとき $y' = 0$
$-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
$x = 1$ のとき $y' = 0$
$1 < x$ のとき $y' > 0$

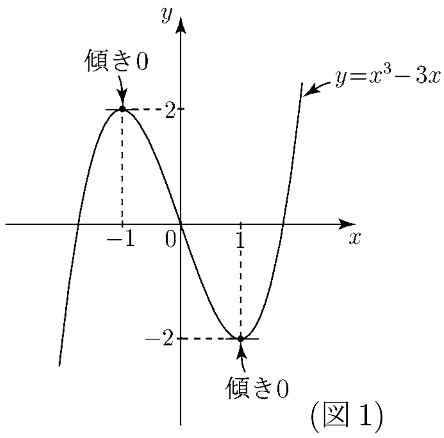
となる。$x = \pm 1$ のとき y の値は

$x = -1$ のとき $y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$
$x = 1$ のとき $y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

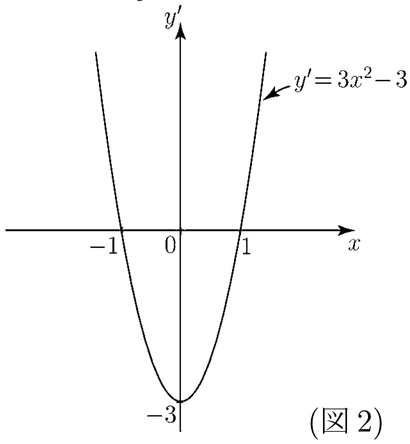
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

< 元の関数 $y = x^3 - 3x$ >



(図 1)

< 導関数 $y' = 3x^2 - 3$ >

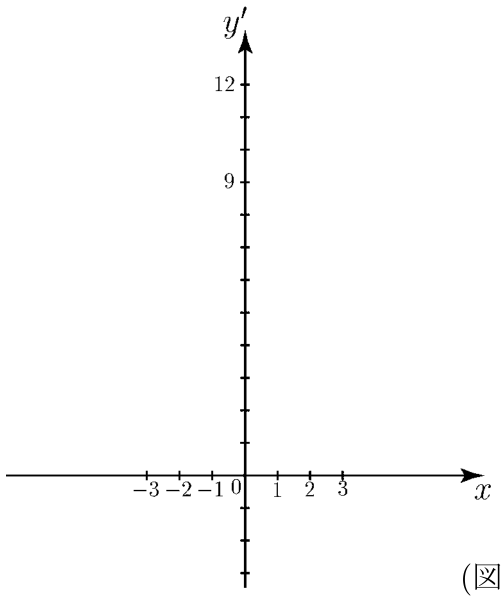


(図 2)

問 関数 $y = 12x - x^3$ を微分し，導関数 y' のグラフを図 3 に書き，増減表を作れ。

$y' =$

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					



(図 3)

＜関数の増減 3＞

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合，たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$x = -2$ のとき
$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に $+$ 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し，$y' < 0$ となれば，y' の欄に $-$ 記号を書き入れる。(表 2)

(6) y' が $+$ であれば傾き正であるから y は右上がり $\nearrow$ となる。
y' が $-$ であれば傾き負であるから y は右下がり $\searrow$ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

(表 1)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

$\Downarrow$

(表 2)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

$\Downarrow$

(表 3)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

(表 4)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

問 次の関数を微分し，増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$, $y' =$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y' =$

x					
y'					
y					

＜極大・極小 1＞

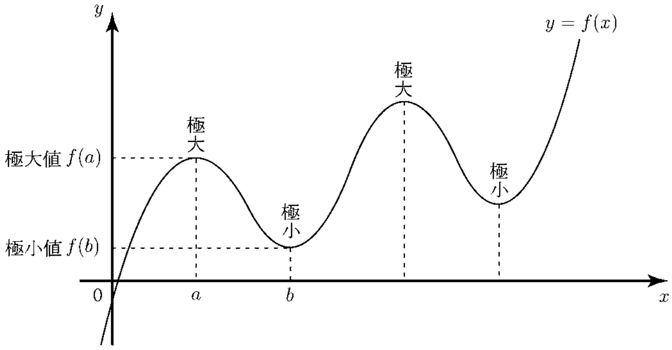
関数 $f(x)$ について，a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい，$f(a)$ を**極大値**という。

また，b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



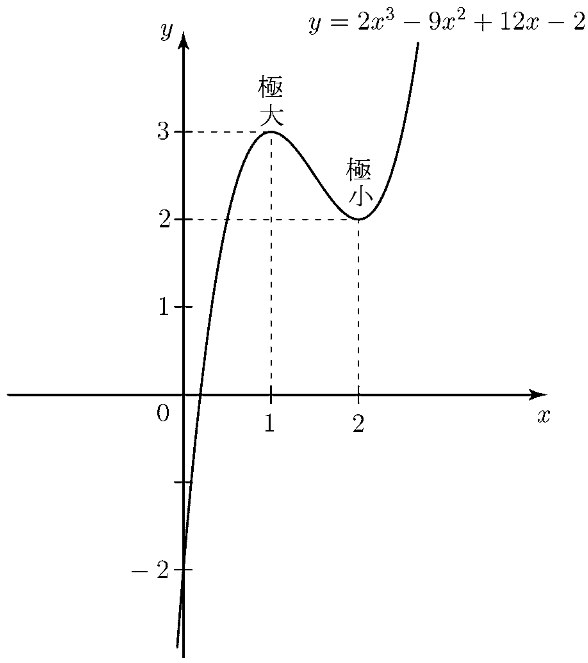
が成り立つとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい，$f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例 3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには，増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
		極大		極小	



増減表より

<u>$x = 1$ のとき　極大値 $y = 3$</u>

<u>$x = 2$ のとき　極小値 $y = 2$</u>

であることがわかる。

(注) 上の増減表の x の欄の $\cdots$ は以下の意味である。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$

$\Longleftrightarrow$

x	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x$

今後はこのように x の範囲を省略してよい。

問 3 次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り，極値を調べよ。

<u>$x =$ 　　　のとき極大値 $y =$ 　　　</u>

<u>$x =$ 　　　のとき極小値 $y =$ 　　　</u>

x	
y'	
y	

＜極大・極小 2＞

例 4 次関数 $y=3x^4-16x^3+18x^2+8$ の極値を調べるには，3 次関数と同様に増減表を作ればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3-48x^2+36x \\ &= 12x(x^2-4x+3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より，$x=0$, $x=1$, $x=3$ のとき $y'=0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	

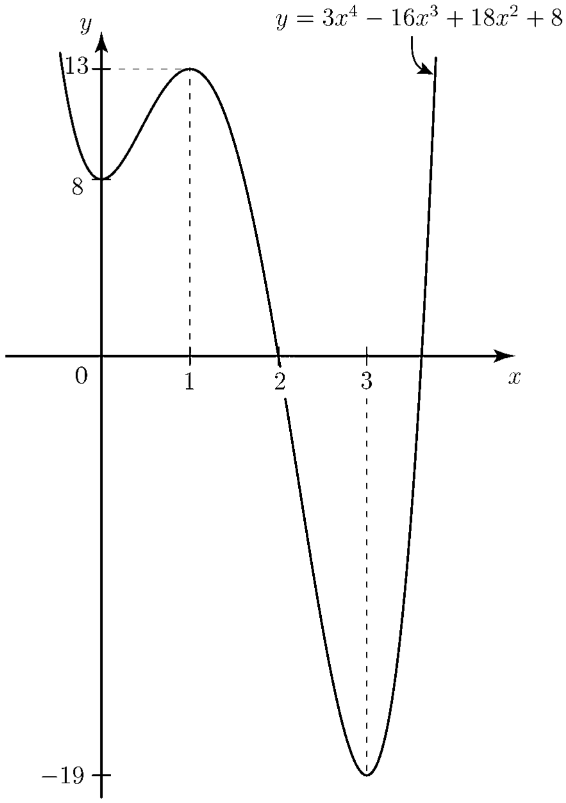
増減表より

$x=1$ のとき極大値 $y=13$

$x=0$ のとき極小値 $y=8$

$x=3$ のとき極小値 $y=-19$

であることがわかる。



問 以下の関数の増減表を作り，極値を調べよ。

(1) $y=-x^4+2x^2+5$

x	
y'	
y	

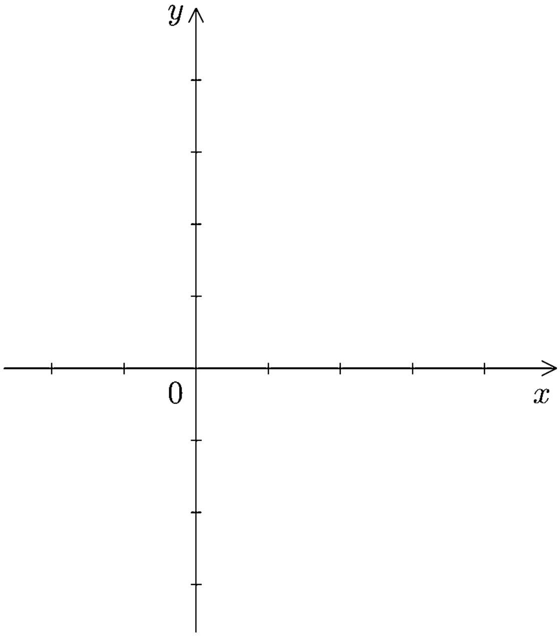
(2) $y=3x^4-8x^3-18x^2$

x	
y'	
y	

＜関数のグラフ＞

問 次の関数を微分し，増減表を作り，極値を調べよ。また右図の上にその関数のグラフを書け。(グラフは極値の座標が分かるように目盛りを書く)

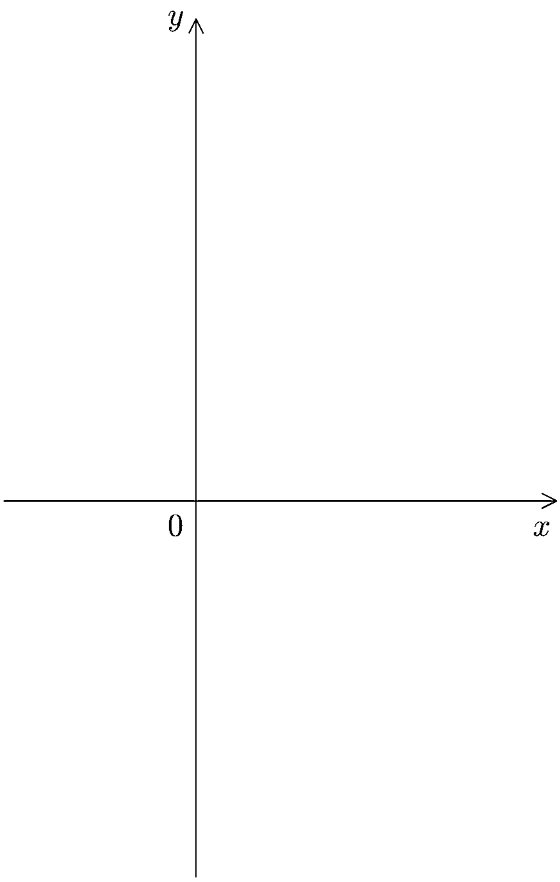
(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$



$y' =$

x	
y'	
y	

(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$



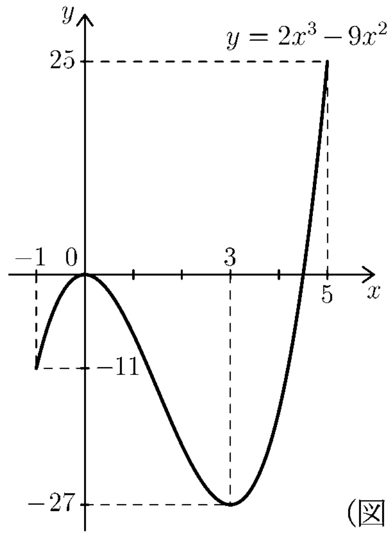
$y' =$

x	
y'	
y	

＜最大・最小 1 ＞

例題 次の関数の最大値と最小値を，指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leqq x \leqq 5)$$



(図1)

(解) 導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

を求め，$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25

この表よりグラフは図 1 のようになるから

(答) $x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり，$x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注) 最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域} -2 \leqq x \leqq 4)$$

のとき 増減表は右表のようになり，

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-52	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-16

この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$，$x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。

問 次の関数に対し，指定された定義域内で増減表を書き，最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \qquad (\text{定義域} \quad -1 \leqq x \leqq 3)$$

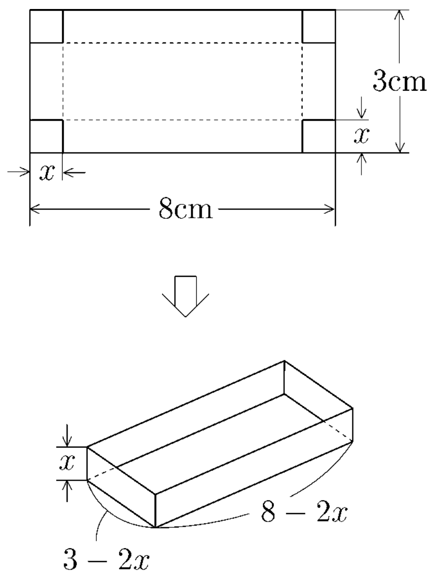
x	-1		3
y'	$\times$		$\times$
y			

(答) $x =$ 　　　　　のとき最大値 $y =$

$x =$ 　　　　　のとき最小値 $y =$

< 最大・最小 2 >

例題 たて 3cm，よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から，一辺 $x$cm の正方形を切り取り，右上図の点線のところを折り曲げて，右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解) 容器のたては $3-2x$(cm)，よこは $8-2x$(cm)，高さは x(cm) だから，容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから，x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。
この範囲内で増減表を作り，y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ，

$$x=\frac{2}{3}\text{ のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より，増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき，最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から，例題と同様にして，ふたのない容器を作るとき，容器の容積 y(cm^3) を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め，その範囲内で増減表を作り，y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

＜微分記号＞

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は，変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。
変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は，変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\dfrac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\dfrac{dS}{dr} =$

(5) $V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$ $\dfrac{dV}{dr} =$

＜ 時間の関数 ＞

時間 $(time)$ を表す文字として t がよく使われるので，時間の関数を表すのに t を変数として使う。例えば $f(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $v(t)$ などである。

例 1 球を静かに手離すとき，落ち始めてから t 秒間に落下した距離を $f(t)$ m とすると

$$f(t) = 4.9t^2$$

の関係がある。従って 3 秒後に落下した距離は

$$f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1 \quad (\mathrm{m})$$

である。

問 1 例 1 の $f(t)$ に対して次の値を求めよ。(単位不要)

(1) $f(2) =$ (2) $f(4) =$ (3) $f(3.5) =$

問 2 $x(t) = 19.6t, \quad y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ のとき次の値を求めよ。

$x(0) =$ $y(0) =$

$x(1) =$ $y(1) =$

$x(2) =$ $y(2) =$

例 2 x を変数とする関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (x についての導関数)

である。同様にして変数 t についての導関数 $f'(t)$ は

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} \quad (\text{変数 } t \text{ についての導関数})$$

で定義される。同様に t の関数 $y(t)$ の導関数は

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

で定められる。

問 3 変数 t の関数 $x(t)$, $v(t)$ の導関数の定義を例 2 のような極限の式で表せ。

$x'(t) = \lim_{h \to 0}$ ―――――― , $v'(t) = \lim_{h \to 0}$ ――――――

例 3 $f(t) = 4.9t^2$ のとき，$t = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次の極限式になる。

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9 \times (2+h)^2 - 4.9 \times 2^2}{h}$$

問 4 $f(t) = 4.9t^2$ に対し次の微分係数を例 3 の右辺のような極限の式で表せ。

(1) $f'(3) = \lim_{h \to 0}$ ―――――― (2) $f'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\qquad}{h}$

例 4 $f(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ の導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = (-4.9t^2 + 19.6t)' = -4.9 \times 2t + 19.6 \times 1 = -9.8t + 19.6$$

問 5 $x(t) = 29.4t, \; y(t) = -4.9t^2 + 29.4t, \; v(t) = 29.4$ の導関数を求めよ。

$x'(t) =$ $y'(t) =$ $v'(t) =$

< 平均速度 >

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{\text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}}$$

例 1 車が 144 km を 2 時間で走ったときの平均速度は

$$\text{平均速度} = \frac{144\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 72\ (\text{km/h}) \quad \left(= \text{時速}\ \ 72\ \text{km}\right)$$

問 1 72 (km/h) を分速 (km/min) および秒速 (m/s) になおせ。

$$72\ (\text{km/h}) = \frac{72\ \text{km}}{60\ \text{min}} = \boxed{}\ (\text{km/min}) = \boxed{}\ (\text{m/s})$$

例 2 (自由落下)

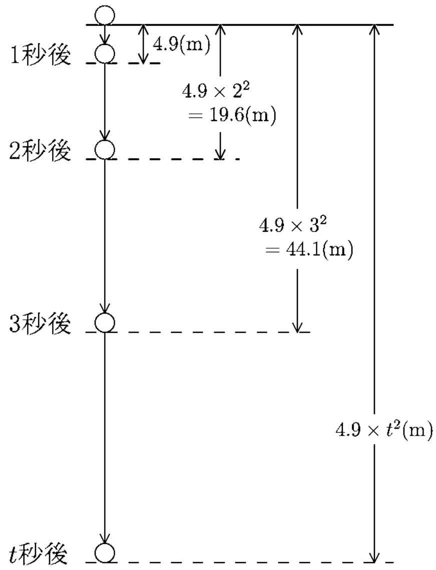
球を静かに手離すとき落ち始めてから t 秒間の落下距離は

$$t\ \text{秒後の落下距離} = 4.9 \times t^2\ (\text{m})$$

となる。2 秒後から 4 秒後の 2 秒間の平均速度は

$$2\ \text{秒後から}\ 4\ \text{秒後の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{時間}}$$

$$= \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{4 - 2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4\ (\text{m/s})$$



問 2 例 2 の場合に以下の平均速度を求めよ。

(1) 1 秒後から 3 秒後までの平均速度

(2) 3 秒後から 4 秒後までの平均速度

(3) 3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度

(4) 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度

＜瞬間の速度 1＞

車が 144 (km) を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 (km/h) であるが，常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし，72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると，スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。

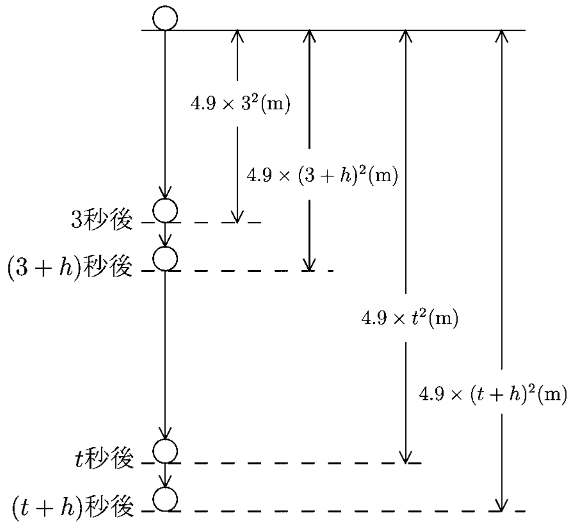
このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「**瞬間の速度**」といい,「平均速度」と区別する。

このページでは「瞬間の速度」を求めることを目標にする。

問 前ページの例 2(自由落下) の場合に 3 秒後の瞬間の速度を求めたい。
前ページ問 2(4) より 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は

$$\frac{4.9\times 3.1^2 - 4.9\times 3^2}{3.1-3} = \frac{2.989}{0.1} = 29.89 \text{ (m/s)}$$

である。



(1) 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度を求めよ。

(2) 3 秒後から 3+h 秒後までの平均速度を求めよ。

(3) t 秒後から t+h 秒後までの平均速度を求めよ。

(4) 次の極限値を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{4.9\times(3+h)^2 - 4.9\times 3^2}{h} =$

② $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{4.9\times(t+h)^2 - 4.9\times t^2}{h} =$

(5) 瞬間の速度を次で定める。

$$\boxed{t\text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h\to 0}\,(t\text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度})}$$

次の瞬間の速度を求めよ。

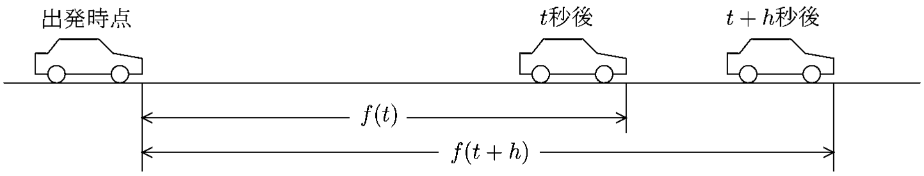
① 3 秒後の瞬間の速度

② t 秒後の瞬間の速度

③ 4 秒後の瞬間の速度

＜瞬間の速度 2＞

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。$t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ である。
「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから，時間間隔 h を 0(ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

$$t\text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h\to 0}(t\text{ 秒後から }t+h\text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$$

となる。この「瞬間の」というのを略して，単に「t 秒後の速度」という。

例 1　前ページの問では $f(t) = 4.9t^2$ だから

$$t\text{ 秒後の速度} = f'(t) = 4.9 \times 2t = 9.8t \text{ (m/s)}$$

であり　$$3\text{ 秒後の速度} = f'(3) = 9.8 \times 3 = 29.4 \text{ (m/s)}$$

となる。

問 1　例 1 の場合に以下の速度を求めよ。

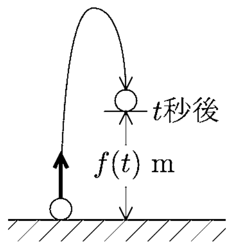
(1)　2 秒後の速度　　　(2)　5 秒後の速度

例 2　地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。
t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えないと)

$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad \text{(m)}$$

となる。t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad \text{(m/s)}$$



となる。ボールが最高点に達するとき速度は 0(ゼロ) になるから

$$v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \iff t = 2$$

より 2 秒後に最高点に達する。このときの高さは $f(2) = -4.9\times 2^2 + 19.6 \times 2 = 19.6$ (m) である。

問 2　地上 39.2 (m) の高さから真上にボールを投げ上げたとき t 秒後の高さ $f(t)$ は

$$f(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 39.2 \text{ (m)}$$

となった。

(1)　t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2)　初速 ($t=0$ のときの速度) を求めよ。

(3)　ボールが最高点に達するのは何秒後か。

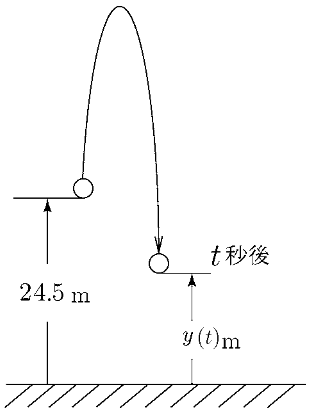
(4)　最高点の高さを求めよ。

＜速度の応用 1＞

問 地上 24.5m から物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 \text{ (m)}$$

となったとせよ。



(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$v(t) = y'(t) =$

(2) 初速度何 m/s で物体を投げ上げたか？ $t = 0$ のときの v の値で答えよ。

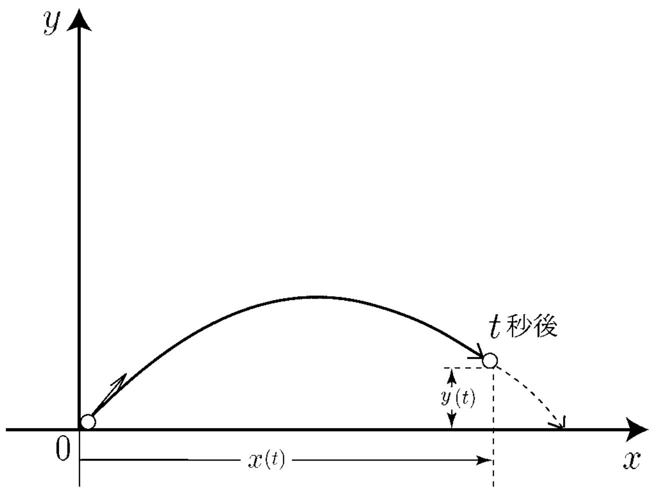
$v(0) =$

(3) 何秒後に最も高くなるか？ 速度が 0 ($v = 0$) のときの t の値で答えよ。

(4) 最高点は地上何 m か？

(5) 何秒後に地上に落下するか？

＜ 速度の応用 2 ＞



問 ボールを投げたとき t 秒後のボールの位置を座標平面の点として表すことにする。
t 秒後の水平距離を $x(t)$
t 秒後の垂直距離を $y(t)$
とする。今

$$\begin{cases} x(t) = 14.7t \\ y(t) = -4.9t^2 + 19.6t \end{cases}$$

の場合に次の問に答えよ。

(1) t 秒後の水平方向の速度 $v_x(t)$ を $x(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$

(2) t 秒後の垂直方向の速度 $v_y(t)$ を $y(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_y(t) = y'(t) =$

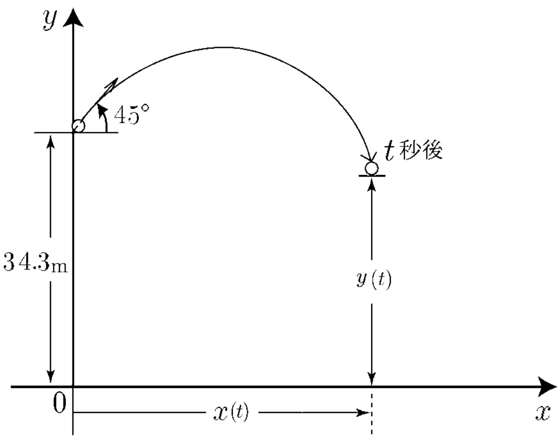
(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か？

(4) 最高点の高さを求めよ。

(5) 地上に落下するのは何秒後か？

(6) 落下したとき，投げた地点からの水平距離を求めよ。

＜速度の応用 3＞



問 地上 34.3m の高さから物体を 45° の角度で投げ上げた。
t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 29.4t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 & (\text{垂直距離}) \end{cases}$$

であるとする。

(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$、垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$ 　　　　　　　　　　　, $v_y(t) = y'(t) =$

(2) 最高点に達するのは何秒後か？

(3) 最高点の高さとそのときの水平距離を求めよ。

高さ ＝

水平距離 ＝

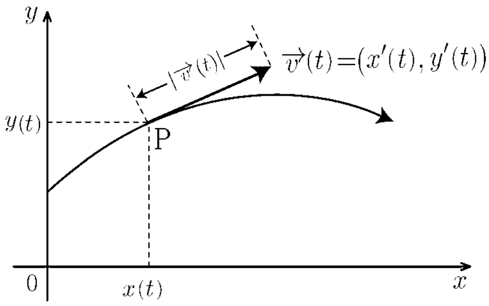
(4) 地上に落下するのは何秒後か？

(5) 落下したときの水平距離を求めよ。

＜速度と速さ＞

33 ページや 34 ページの問題の場合、水平方向と垂直方向をそれぞれ考えていた。このような場合は水平方向を x 軸、垂直方向を y 軸として xy 平面上の運動と考えるとわかりやすい。

一般に xy 平面上の点 P の運動で、t 秒後の位置が $\mathrm{P}(x(t), y(t))$ であるとき、x 軸方向の速度 $x'(t)$ と y 軸方向の速度 $y'(t)$ を成分にもつベクトル

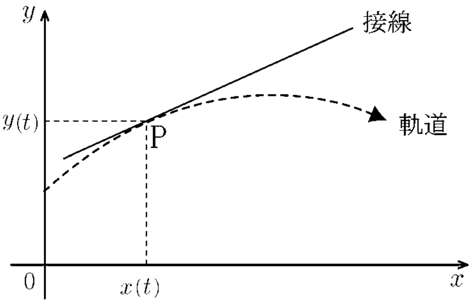


$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \Big(x'(t)\ ,\ y'(t)\Big)} \qquad (速度)$$

を t 秒後の「**速度ベクトル**」または単に「**速度**」という。物理学では「速度」は「方向をもったベクトル」と考える。これに対し、速度の大きさ

$$\boxed{|\overrightarrow{v}(t)| = \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}} \qquad (速さ＝速度の大きさ)$$

を単に「**速さ**」といい、「速度」と区別する。



(注) 速度ベクトル $\overrightarrow{v}(t)$ の方向は軌道 (右図点線) 上の点 P における接線と同じ方向である。ただし、このことを証明するためには後で習う「合成関数の微分法」の知識が必要である。

例 t 秒後の位置が $\Big(x(t)\ ,\ y(t)\Big) = (2t\ ,\ -4t^2 + 8t)$ であるとき

$$x(t) = 2t \qquad \Rightarrow \quad x'(t) = 2$$
$$y(t) = -4t^2 + 8t \qquad \Rightarrow \quad y'(t) = -8t + 8$$

より t 秒後の速度は $\overrightarrow{v}(t) = (2\ ,\ -8t + 8)$ である。0.5 秒後の速度と速さは

速度 $\overrightarrow{v}(0.5) = (2, 4)$, 速さ $|\overrightarrow{v}(0.5)| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

である。

問 1 例の場合に 1.5 秒後の速度と速さを求めよ。

問 2 t 秒後の位置が $\Big(x(t)\ ,\ y(t)\Big) = (4t\ ,\ -3t^2 + 9t)$ であるとき、1 秒後の速度と速さを求めよ。

＜微分の応用＞

問 1　次の関数の極値を求め , グラフをかけ。

(1)　$y = x^3 - 3x^2 - 9x$

(2)　$y = x^2(2x - 3)$

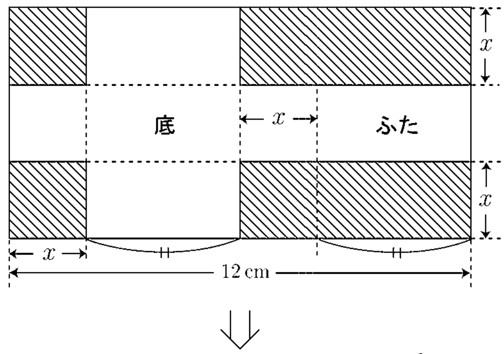
(3)　$y = x^2(x - 3)^2$

問 2　次の関数の (　) 内に示した範囲における最大値および最小値を求めよ。

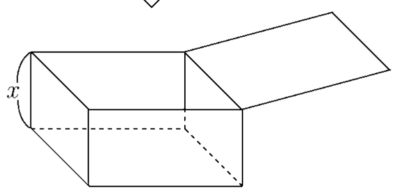
(1)　$y = -x^2 - 4x + 3$　　　$(-2 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$y = -x^3 + 3x^2 + 9x$　　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

問 3　縦 6 cm , 横 12 cm の長方形のブリキの板から図 1 の斜線部分を切り取り , 点線のところを折り曲げて , 図 2 のような高さ x cm のふた付き容器を作る。



(図 1)



(図 2)

(1)　容器の容積を y cm^3 とする。y を x で表せ。

(2)　x が何 cm のとき y が最大になるか。

問 4　地上 78.4 m の高さから物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 78.4 \quad \text{(m)}$$

となった。

(1)　t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2)　何秒後に最も高くなるか。またそのときの高さを求めよ。

(3)　何秒後に地上に落下するか。

< 原始関数 >

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき，すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又，

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが，全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より，x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

である。

問 次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 =

(2) x^5 の原始関数の一般形 =

(3) x^6 の原始関数の一般形 =

< 不定積分 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり，その一般形は

$$F(x) + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい，

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち，

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 $\int$ はインテグラル $(integral)$ と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注) 記号 $\int \boxed{}\, dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4 dx =$

(2) $\displaystyle\int x^5 dx =$

(3) $\displaystyle\int x^6 dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

＜不定積分 2＞

前ページより n が正の整数のとき

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

が成り立つ。

また微分の性質より次の不定積分の性質がわかる。

$F'(x) = f(x)$ ，　$G'(x) = g(x)$ のとき

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = kF(x) + C$　　(k は定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}dx = F(x) + G(x) + C$
3. $\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}dx = F(x) - G(x) + C$

(不定積分の性質)

＜1の証明＞ 1 式右辺の関数を微分すると , 17 ページの微分の公式より

$$\Big(kF(x)\Big)' = k \times \Big(F(x)\Big)' = kf(x)$$

であるから $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数である。　(証明終)

問 1　上の不定積分の性質 2 を証明せよ。

例　(1) $\displaystyle\int 4x^2 dx = 4 \times \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{4}{3}x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int (3x^2 - 5x)dx = 3 \times \frac{1}{3}x^3 - 5 \times \frac{1}{2}x^2 + C = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 6x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int (x^2 + 4x + 3)dx$　　(4) $\displaystyle\int (2x^2 - x - 1)dx$

＜ 不定積分 3 ＞

例 $\int (x-3)(x+2)dx = \int (x^2-x-6)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし α，β は定数)

(1) $\int (x-2)^2 dx$

(2) $\int (3x+1)^2 dx$

(3) $\int (x-1)(x-2)dx$

(4) $\int (x+1)(x-3)dx$

(5) $\int (2-x)(x-3)dx$

(6) $\int (x-\alpha)(x-\beta)dx$

例題 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$F'(x) = x^2 + 2x$ ， $F(2) = 5$

(解) $F(x) = \int (x^2+2x)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$

$F(1) = \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + C = 5$

より $C = -\frac{5}{3}$ よって $\underline{\text{(答)}\ F(x) = \frac{1}{3}x^2 + x^2 - \frac{5}{3}}$

問 2 次式を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x) = 3$ ， $F(1) = 2$

(2) $F'(x) = 5x + 4$ ， $F(2) = 6$

(3) $F'(x) = 2x^2 - 7x$ ， $F(4) = -5$

(4) $F'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 5$ ， $F(0) = 0$

＜不定積分 4＞

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば,

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1 $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ より $\displaystyle\int 3x^2dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$ より $\displaystyle\int 3t^2dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$ より $\displaystyle\int 3u^2du = u^3 + C$

例 2 (1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int (4u^3 - 6u^2 + 5u)du = u^4 - 2u^3 + \frac{5}{2}u^2 + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問 (1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int (6t^2 - 4t + 5)dt =$

(4) $\displaystyle\int (u-1)(u-2)du =$

(5) $\displaystyle\int (t+3)^2dt =$

< 不定積分の応用 1 >

例題 次の 2 条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

① $F'(t) = 3(t-1)^2$ ② $F(1) = 0$

解 ①より $F(t) = \displaystyle\int 3(t-1)^2 dt = \int (3t^2 - 6t + 3)dt = t^3 - 3t^2 + 3t + C$

よって $F(1) = 1 - 3 + 3 + C = C + 1$

②より $F(1) = C + 1 = 0$ となり $C = -1$

従って <u>(答) $F(t) = t^2 - 3t^2 + 3t - 1$</u>

問 1 次の 2 条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

(1) ① $F'(t) = 5$ ② $F(0) = 8$

(2) ① $F'(t) = -4t + 6$ ② $F(1) = 7$

問 2 次の 2 条件をともに満たす関数 $v(t)$ を求めよ。

① $v'(t) = -10$ ② $v(0) = 20$

問 3 問 2 で求めた $v(t)$ に対し，次の 2 条件をともに満たす関数 $y(t)$ を求めよ。

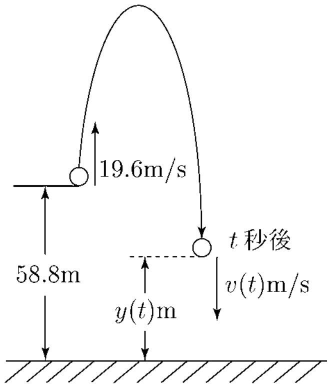
① $y'(t) = v(t)$ ② $y(0) = 25$

問 4 問 3 で求めた $y(t)$ に対し，増減表を作り，最大値を求めよ。

$t =$ のとき最大値 $y(t) =$

t			
y'			
y			

＜不定積分の応用 2 ＞



問 1 地上 58.8m の高さからボールを初速 19.6 m/s で真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y(t)$ m，t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると，物理的考察より

$$[1]\ y'(t) = v(t) \quad , \qquad [2]\ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

(1) [2] 式と $v(0) = 19.6$ より t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) [1] 式と $y(0) = 58.8$ および (1) の結果より t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) 関数 $y(t)$ の増減表を作れ。

t			
y'			
y			

(4) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さ $y(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ。

(5) 2 次方程式 $y(t) = 0$ の解を求めよ。　　$t =$

(6) 地面に落下するのは何秒後か。

問 2 地上 44.1m の高さからボールを初速 39.2 m/s で真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y(t)$ m，t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると，物理的考察より

$$[1]\ y'(t) = v(t) \quad , \qquad [2]\ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さを求めよ。

(4) 地面に落下するのは何秒後か。

$<$ 定積分 1 $>$

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき

$$F'(x) = f(x) \qquad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

となる。今 , 与えられた定数 a , b に対し $F(b) - F(a)$ の値は原始関数 $F(x)$ の選び方によらない。

例 $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$F(b) - F(a) = b^3 - a^3 \qquad \cdots\cdots (1)$$

となる。

$G(x) = x^3 + C$ (C は定数) も $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$G(b) - G(a) = (b^3 + C) - (a^3 + C) = b^3 - a^3 \qquad \cdots\cdots (2)$$

となる。(1) と (2) の値は一致する。

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき , 与えられた定数 a , b に対し , $F(b) - F(a)$ の値を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい , 記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。すなわち

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{のとき} \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

(不定積分) (定積分)

である。なお $F(b) - F(a)$ のことを $\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b$ と書くことがある。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)} \qquad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

と表す。

例 2 $\displaystyle\int_a^b 3x^2 dx = \Big[\ x^3\ \Big]_a^b = b^3 - a^3$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_a^b 2x dx$ (2) $\displaystyle\int_a^b 4x^3 dx$

< 定積分 2 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{のとき} \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

(不定積分) (定積分)

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ において，a を**下端**，b を**上端** とよぶ。また，この定積分を求めることを $f(x)$ を $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで積分する** という。

例 (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\,\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int (x^3 - 6x + 5)dx = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x + C$ より

$$\int_1^2 (x^3 - 6x + 5)dx = \left[\,\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x\right]_1^2$$

$$= \frac{16}{4} - 12 + 10 - (\frac{1}{4} - 3 + 5) = 2 - (2 + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^9 1dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 xdx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2 dx$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3 dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 + 3x^2 - 5x)dx$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx$

(8) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

< 定積分 3 >

定積分の定義より次の性質が導かれる。

(定積分の性質)

[1] $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k$ は定数)

[2] $\displaystyle\int_a^b \Big\{\, f(x) + g(x) \,\Big\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

[3] $\displaystyle\int_a^b \Big\{\, f(x) - g(x) \,\Big\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

[4] $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$, [5] $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

[6] $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

＜ [1] の証明＞ $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ とすれば $\displaystyle\int kf(x)dx = kF(x) + C$ より

$$\int_a^b kf(x)dx = \Big[\, kF(x) \,\Big]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\Big\{\, F(b) - F(a) \,\Big\} = k \times \int_a^b f(x)dx$$

＜ [6] の証明＞ $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b + \Big[\, F(x) \,\Big]_b^c = \Big\{\, F(b) - F(a) \,\Big\} + \Big\{\, F(c) - F(b) \,\Big\}$$

$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

問 1 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, $\displaystyle\int g(x)dx = G(x) + C$ とおいて上の性質 [2] を証明せよ。

問 2 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ とおいて上の性質 [5] を証明せよ。

問 3 次の定積分を求めよ。ただし k は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_1^3 kx^2dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 3x)dx + \int_0^1 (x^2 - 3x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} (x^2 + x + 4)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2 + 2x)dx + \int_0^1 (x^2 + 2x)dx + \int_1^3 (x^2 + 2x)dx$

(5) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - x)dx + \int_3^1 (x^2 - x)dx$

＜ 定積分 4 ＞

$F'(x) = f(x)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$F'(t) = f(t)$ より $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$

のように積分の値は変わらない。従って次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \qquad \boxed{\int_a^b f(\square)d\square = \int_a^b f(\bigcirc)d\bigcirc}$$

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4dx = \left[\ \frac{1}{5}x^5\ \right]_1^3 = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4dt = \left[\ \frac{1}{5}t^5\ \right]_1^3 = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_0^R 4\pi r^2dr = \left[\ \frac{4\pi}{3}r^3\ \right]_0^R = \frac{4\pi}{3}\times R^3 - \frac{4\pi}{3}\times 0^3 = \frac{4\pi}{3}R^3$

(4) $\displaystyle\int_a^x (t^2+t)dt = \left[\ \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\ \right]_a^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4-9.8t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^2 t(t-2)dt$

(4) $\displaystyle\int_1^4 (t-1)(4-t)dt$

(5) $\displaystyle\int_1^x (t^2+t)dt$

(6) $\displaystyle\int_a^x (6t^2-4t)dt$

＜ 定積分 5 ＞

関数 $f(t)$ と定数 a に対して , $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は x の値を決めると , その値が定まるから , x の関数である。 $F'(t) = f(t)$ とすると ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

両辺の関数を x について微分すれば次の等式が得られる。

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)} \qquad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

例 1 定数 a に対し

$$\int_a^x (t^2+t)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は x の関数である。両辺を x で微分すると , a は定数だから

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (t^2+t)dt = x^2 + x$$

となる。

問 1 次式を計算せよ。ただし a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_1^x (2t+3)dt =$, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x (2t+3)dt =$

(2) $\displaystyle\int_0^x (6t^2+4t+5)dt =$, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (6t^2+4t+5)dt =$

(3) $\displaystyle\int_a^x (5t^2-6t)dt =$, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x (5t^2-6t)dt =$

上の (∗) 式で変数 x と t を入れ変えても同様な式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)} \qquad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

例 2 定数 a に対し

$$\int_a^t (x^2+x)dx = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は t の関数である。両辺を t で微分すると , a は定数だから

$$\frac{d}{dt}\int_a^t (x^2+x)dx = t^2 + t$$

となる。

問 2 定数 a に対し , 次式を計算せよ。

$\displaystyle\int_a^t (6x^2+8x)dx =$ $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^t (6x^2+8x)dx =$

＜ 変位と道のり ＞

x 軸上を動く点の時刻 t における位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$ とすると
$x'(t) = v(t)$ より

$$\boxed{\int_a^b v(t)dt = x(b) - x(a)} \qquad \text{(変位)}$$

となる。この値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**変位**という。これに対し ,

$$\boxed{\int_a^b |\ v(t)\ |dt} \qquad \text{(道のり)}$$

の値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**道のり**という。ここで記号 $|v|$ は v の絶対値であり $v \geqq 0$ のときは $|v| = v$, また $v \leqq 0$ のときは $|v| = -v$ を表す。

例題 $v(t) = 2 - t$ のとき次式の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 v(t)dt$ (2) $\displaystyle\int_0^4 |v(t)|dt$

(解) (1) $\displaystyle\int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (2-t)dt = \left[\ 2t - \frac{t^2}{2}\ \right]_0^4 = \left(2 \times 4 - \frac{4^2}{2}\right) - \ 0 = 0$

(2) $v(t) = 2 - t$ は $t = 2$ のときを境に＋ , −が入れかわる。
そこで積分範囲を２つにわけて

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^4 |2-t|dt = \int_0^2 |2-t|dt + \int_2^4 |2-t|dt$$

とする。

① $0 \leqq t \leqq 2$ のとき $2 - t \geqq 0$ より $|2 - t| = 2 - t$ だから

$$\int_0^2 |2-t|dt = \int_0^2 (2-t)dt = \left[\ 2t - \frac{t^2}{2}\ \right]_0^2 = 4 - \frac{4}{2} = 2$$

② $2 \leqq t \leqq 4$ のとき $2 - t \leqq 0$ より $|2 - t| = -(2 - t) = t - 2$ だから

$$\int_2^4 |2-t|dt = \int_2^4 (t-2)dt = \left[\ \frac{t^2}{2} - 2t\ \right]_2^4 = \left(\ \frac{16}{2} - 8\ \right) - \left(\ \frac{4}{2} - 4\ \right) = 2$$

よって① , ②より

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^2 |2-t|dt + \int_2^4 |2-t|dt = 2 + 2 = 4$$

(注) 「道のり」は動いた距離を表す。

問 次式の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2-t)dt$ (2) $\displaystyle\int_1^3 |2-t|dt$

< 積分の練習 >

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x-5)dx$

(2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{4}x^2-5x+7\right)dx$

(3) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{3}x^2+4x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int (x-1)(2x+1)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \left(t^2-4t+3\right)dt$

(6) $\displaystyle\int (2t+1)^2\,dt$

問 2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-4x+3)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2} (t-1)^2dt$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{3} |10-5t|\,dt$

問 3 次の条件をみたす関数 $F(t)$ を求めよ。

(1) $F'(t)=10-5t$, $F(1)=3$

(2) $F'(t)=t^2-4t+7$, $F(0)=0$

問 4 地上 0m の地点から初速 19.6m/s でボールを真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y(t)$m, 速度を $v(t)$m/s とすると物理的考察より

$$y'(t)=v(t) \qquad , \qquad v'(t)=-9.8$$

が成り立つ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さを求めよ。

(4) 1 秒後から 3 秒後の間にボールが動いた距離を求めよ。