高知工科大学

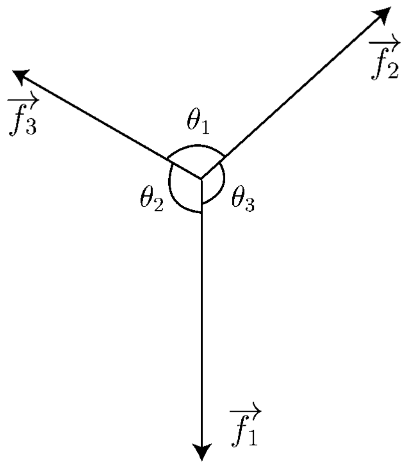
基礎数学ワークブック

(2004年度版)

入門編

$No.\ \mathbf{2}$

内容



◎　三角比

◎　三角関数

◎　平面のベクトル

井上　昌昭・山﨑　和雄　著

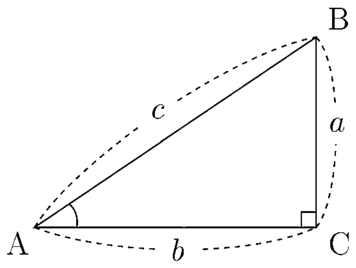
＜三角比 (1)＞

右図の直角三角形 ABC において

$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad (\text{正弦 } sine)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad (\text{余弦 } cosine)$$

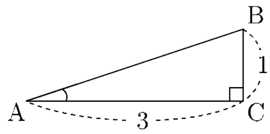
$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad (\text{正接 } tangent)$$



例　(1) 図 1 の場合 $c = \mathrm{AB} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ より

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ \ \cos A = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \ \tan A = \frac{1}{3}$$

$$\sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \ \cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ \ \tan B = 3$$

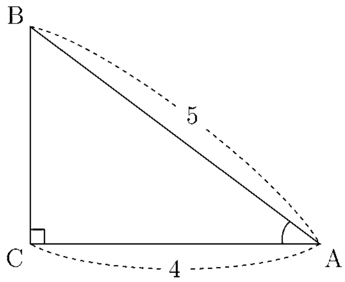


(図 1)

(2) 図 2 の場合 $a = \mathrm{BC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ より

$$\sin A = \frac{3}{5}\ ,\ \ \cos A = \frac{4}{5}\ ,\ \ \tan A = \frac{3}{4}$$

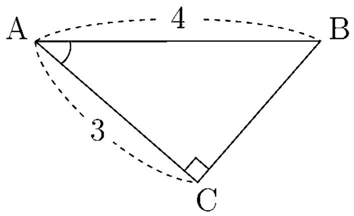
$$\sin B = \frac{4}{5}\ ,\ \ \cos B = \frac{3}{5}\ ,\ \ \tan B = \frac{4}{3}$$



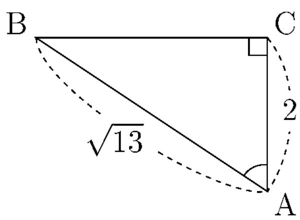
(図 2)

問　次の各場面に $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ を求めよ。

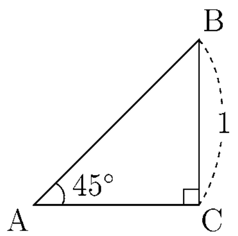
(1)



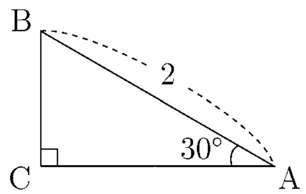
(2)



(3)

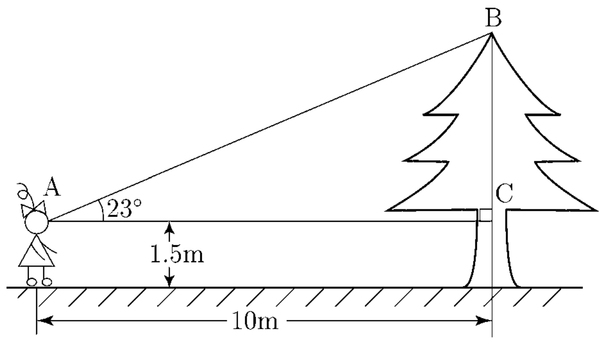


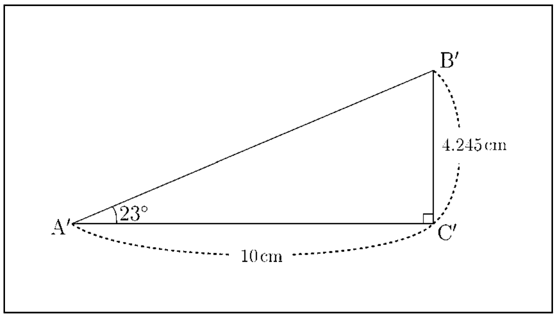
(4)



＜ 三角比 (2) ＞

例 昔の人は三角形の相似を利用して，ピラミッドや山の高さを測った。
ここでは最も簡単な場合を考える。
右図のような木の高さを測りたい。
ある人が木から 10m 離れた場所から木の頂点 B を見上げたら，水平から 23° であった。人の目の位置を A(目の高さは地上 1.5m とする)，木の中心線上で地上 1.5m の位置を C とする。三角形 ABC と相似な三角形を右下図のように紙に正確に描く。





A′C′ の長さを 10 cm にすると B′C′ の長さは 4.245 cm になった。
△ABC と △A′B′C′ は相似より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{4.245}{10} = 0.4245$$

であるから

$$\mathrm{BC} = 0.4245 \times 10 = 4.245\,(\mathrm{m})$$

よって木の高さに 1.5 (m) をたして
(答) 5.745 (m)

(別解) 図を描かずに求める方法を示す。

$\tan A = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ より $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan A = 10 \times \tan 23^\circ$

ここで三角関数表 (8 ページ) より $\tan 23^\circ = 0.4245$ だから

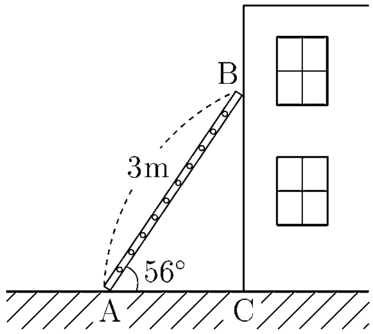
$$\mathrm{BC} = 10 \times \tan 23^\circ = 10 \times 0.4245 = 4.245\,(\mathrm{m})$$

よって (答) 木の高さ $= 4.245 + 1.5 = 5.745\,(\mathrm{m})$

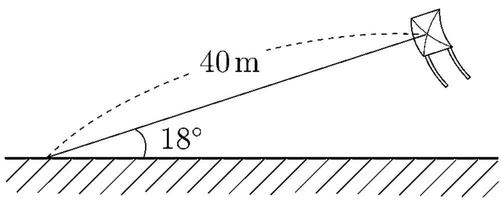
問 例と同じ問題で見上げる角度が 35° のとき，三角関数表を用いて木の高さを求めよ。

< 三角比 (3) >

問 1 長さ 3m のはしご AB が壁に立てかけてある。はしごと地面のつくる角が 56° であるとき，はしごがとどいている高さ BC, およびはしごの端 A から壁までの距離 AC を三角関数表を見て少数第 1 位まで求めよ。



問 2 たこあげをしていて，糸の長さが 40 m になったとき，地面と糸のなす角が 18° であった。三角関数表を見て以下の問題に答えよ。

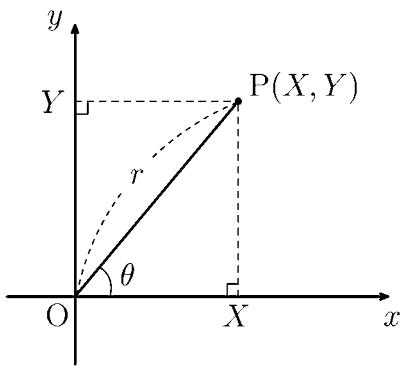


(1) たこの高さを少数第 1 位まで求めよ。

(2) 立っている地点からたこの真下までの距離を少数第 1 位まで求めよ。

問 3 正の数 X, Y に対して，座標平面の点 $\mathrm{P}(X, Y)$ と原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ との距離を r とする。また 線分 OP と x 軸とのなす角を θ とする。
X, Y を r と θ で表せ。

$X =$ 　　　　　　　, $Y =$

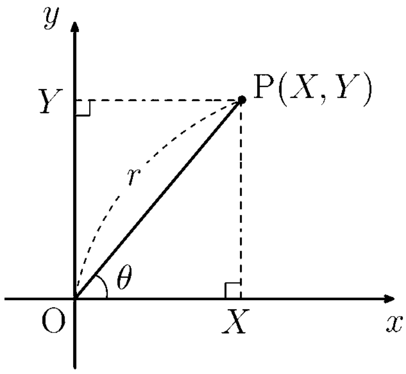


< 三角比 (4) >

右図の場合に

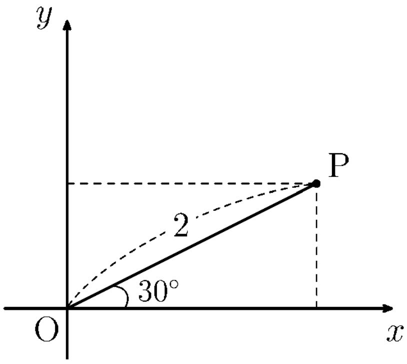
$$\sin\theta = \frac{Y}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{X}{r}\ ,\ \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。



問 次の各場面に点 P の座標を求め，正弦，余弦，正接を求めよ。

(1)



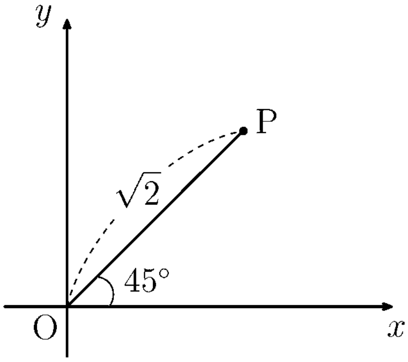
P (　　　,　　　)

$\sin 30^\circ =$

$\cos 30^\circ =$

$\tan 30^\circ =$

(2)



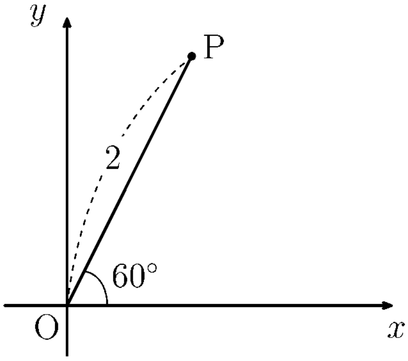
P (　　　,　　　)

$\sin 45^\circ =$

$\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$

(3)



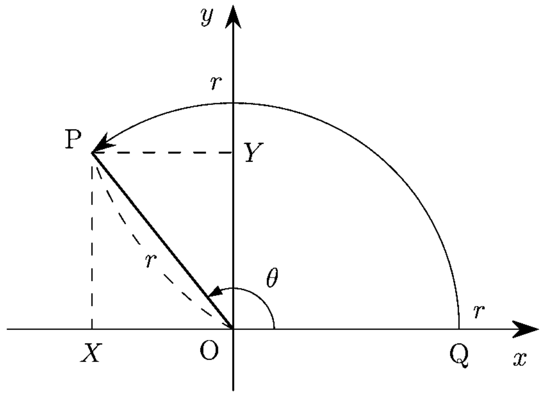
P (　　　,　　　)

$\sin 60^\circ =$

$\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$

＜ 鈍角の三角比 (1) ＞



角度 θ が 90° 以上の場合の三角比を次で定める。

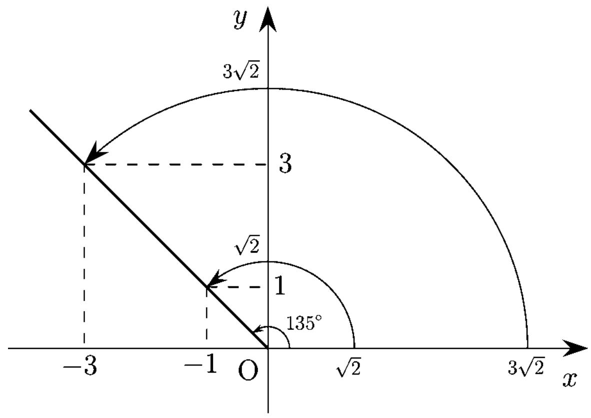
正の数 r に対し，点 $\mathrm{Q}(r, 0)$ を原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を中心として反時計まわりに角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とする。このとき角度 θ における三角比を

$$\boxed{\sin\theta = \frac{Y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{X}{r} \quad , \quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

で定める。

(注) この値は r によらない。

例　$\theta = 135^\circ$ の場合を考える。



(1)　$r = \sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $\mathrm{P}(-1, 1)$ より

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad ,$$

$$\tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

となる。

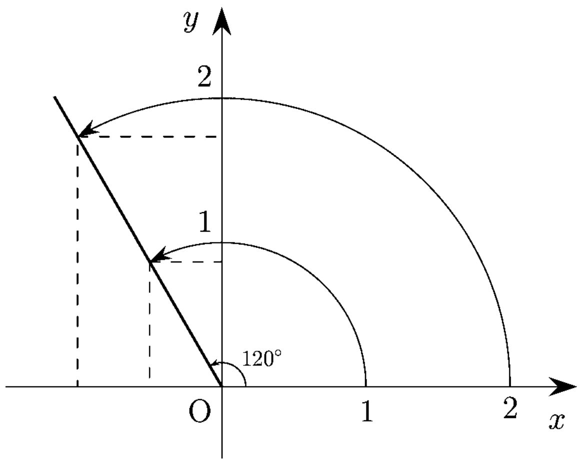
(2)　$r = 3\sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $\mathrm{P}(-3, 3)$ より

$$\sin 135^\circ = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 135^\circ = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,$$

$$\tan 135^\circ = \frac{3}{-3} = -1$$

よって (1) と (2) は同じ結果になる。

問　$\theta = 120^\circ$ の場合に $r = 1$ と $r = 2$ のときの点 P の座標を求め，三角比を計算せよ。



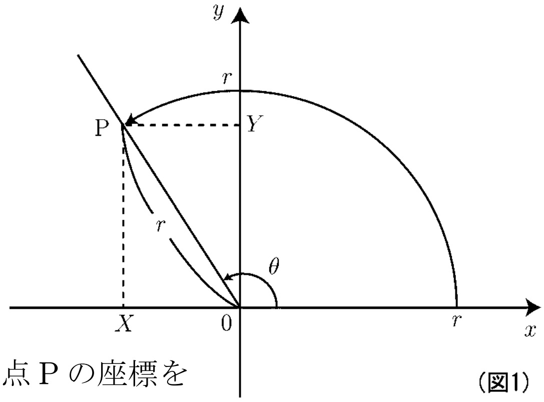
(1)　$r = 1$ のとき　P(　　,　　)

$\sin 120^\circ =$　　　$\cos 120^\circ =$　　　$\tan 120^\circ =$

(2)　$r = 2$ のとき　P(　　,　　)

$\sin 120^\circ =$　　　$\cos 120^\circ =$　　　$\tan 120^\circ =$

＜鈍角の三角比 (2)＞



(図1)

図 1 の場合

$\sin\theta = \dfrac{Y}{r}$ ， $\cos\theta = \dfrac{X}{r}$ ， $\tan\theta = \dfrac{Y}{X}$

である。

問 1 $\theta = 150^\circ$ の場合に $r = 1$ と $r = 2$ のときの点 P の座標を求め，三角比を計算せよ。

(1) $r = 1$ のとき P (,)

$\sin 150^\circ =$ $\cos 150^\circ =$ $\tan 150^\circ =$

(2) $r = 2$ のとき P (,)

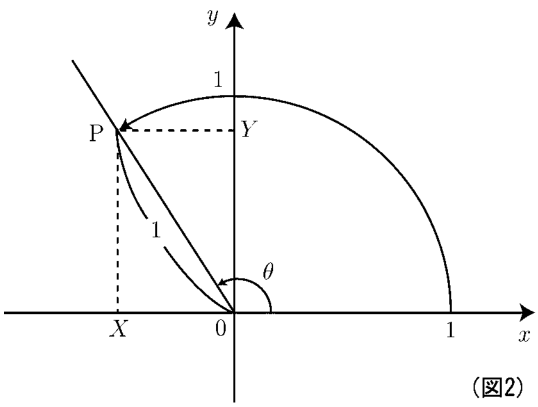
$\sin 150^\circ =$ $\cos 150^\circ =$ $\tan 150^\circ =$

問 2 図 2 の場合の三角比を X，Y で表せ。

$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$



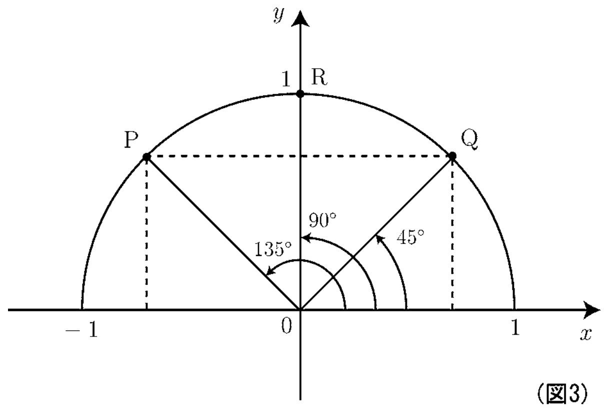
(図2)

問 3 図 3 を見て次の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を求め，135° の三角比を求めよ。

P (,)

$\sin 135^\circ =$ $\cos 135^\circ =$ $\tan 135^\circ =$



(図3)

(2) 点 Q の座標を求め，45° の三角比を求めよ。

Q (,)

$\sin 45^\circ =$ $\cos 45^\circ =$ $\tan 45^\circ =$

(3) 点 R の座標を求め，90° の三角比を求めよ。

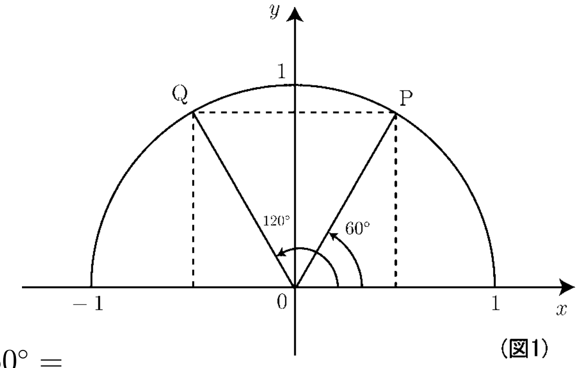
R (,)

$\sin 90^\circ =$ $\cos 90^\circ =$

＜鈍角の三角比 (3) ＞

問 1　図 1 の点 P，Q の座標を求め，
60° と 120° の三角比を求めよ。

P (　　，　　) ，Q (　　，　　)



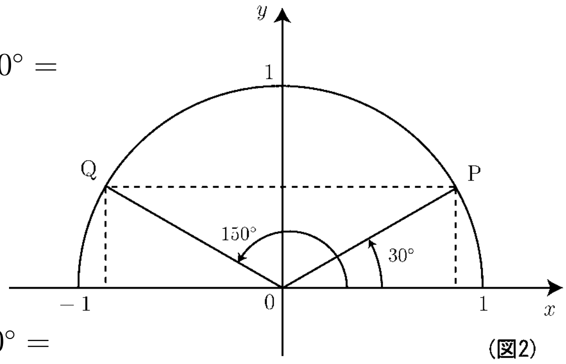
(図1)

$\sin 60^\circ =$　　　$\cos 60^\circ =$　　　$\tan 60^\circ =$

$\sin 120^\circ =$　　　$\cos 120^\circ =$　　　$\tan 120^\circ =$

問 2　図 2 の点 P，Q の座標を求め，
30° と 150° の三角比を求めよ。

P (　　，　　) ，Q (　　，　　)



(図2)

$\sin 30^\circ =$　　　$\cos 30^\circ =$　　　$\tan 30^\circ =$

$\sin 150^\circ =$　　　$\cos 150^\circ =$　　　$\tan 150^\circ =$

例　次ページの三角関数表より

$\sin 25^\circ = 0.4226$, $\cos 25^\circ = 0.9063$, $\tan 25^\circ = 0.4663$

であるから図 3 の点 P の座標は

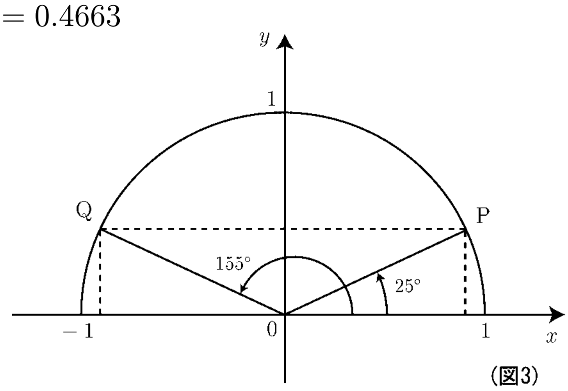
P (0.9063　,　0.4226)

であり $\frac{0.4226}{0.9063} = 0.4663$ である。

従って点 Q の座標は

Q $(-0.9063$, $0.4226)$

であるから 155° の三角比は



(図3)

$$\sin 155^\circ = 0.4226 \quad , \quad \cos 155^\circ = -0.9063 \quad , \quad \tan 155^\circ = \frac{0.4226}{-0.9063} = -0.4663$$

である。

問 3　次ページの三角関数表を見て，次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 110^\circ =$　　　$\cos 110^\circ =$　　　$\tan 110^\circ =$

(2)　$\sin 140^\circ =$　　　$\cos 140^\circ =$　　　$\tan 140^\circ =$

(3)　$\sin 165^\circ =$　　　$\cos 165^\circ =$　　　$\tan 165^\circ =$

< 三角関数表 >

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1,0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

問 前ページの例を参考にして次の三角比の値を求めよ。

(1) $\sin 95^\circ =$ $\cos 95^\circ =$ $\tan 95^\circ =$

(2) $\sin 127^\circ =$ $\cos 127^\circ =$ $\tan 127^\circ =$

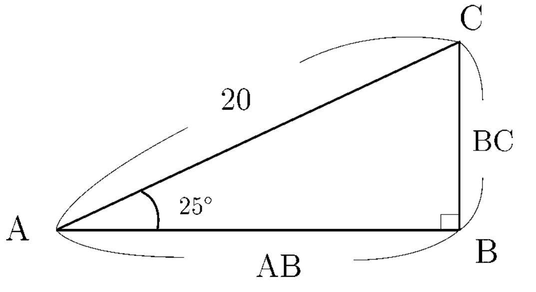
(3) $\sin 143^\circ =$ $\cos 143^\circ =$ $\tan 143^\circ =$

(4) $\sin 180^\circ =$ $\cos 180^\circ =$ $\tan 180^\circ =$

＜三角比と辺の長さ＞

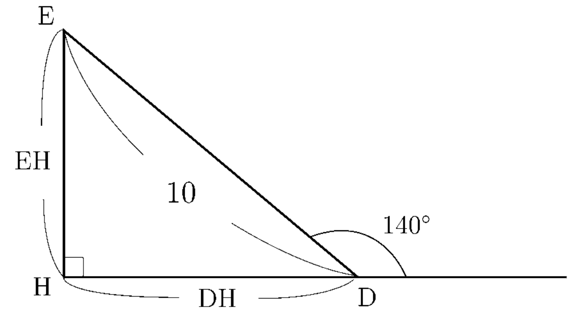
問 1　三角関数表を用いて次の問に答えよ。

(1) 図 1 の AB，BC の長さを求めよ。



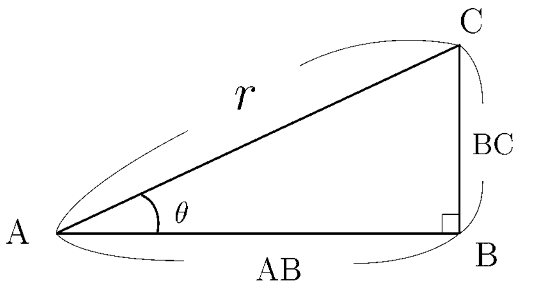
(図1)

(2) 図 2 の DH，EH の長さを求めよ。



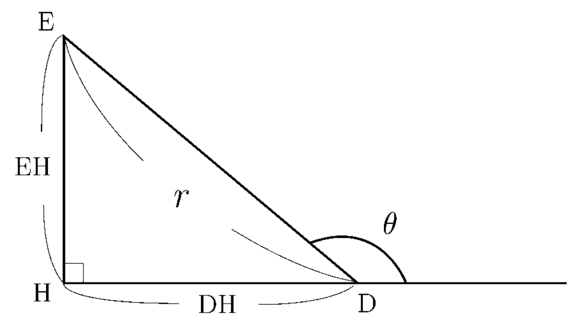
(図2)

問 2　図 3 の三角形 ABC において，
AB と BC を r と θ で表せ。



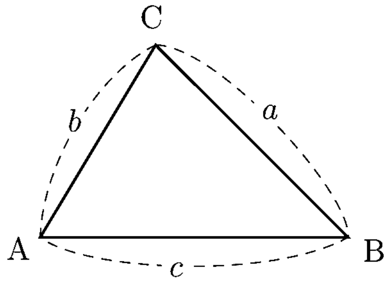
(図3)

問 3　図 4 において EH と DH の
長さを r と θ で表せ。
(ただし θ は鈍角である。)



(図4)

＜ 正弦定理 (1) ＞



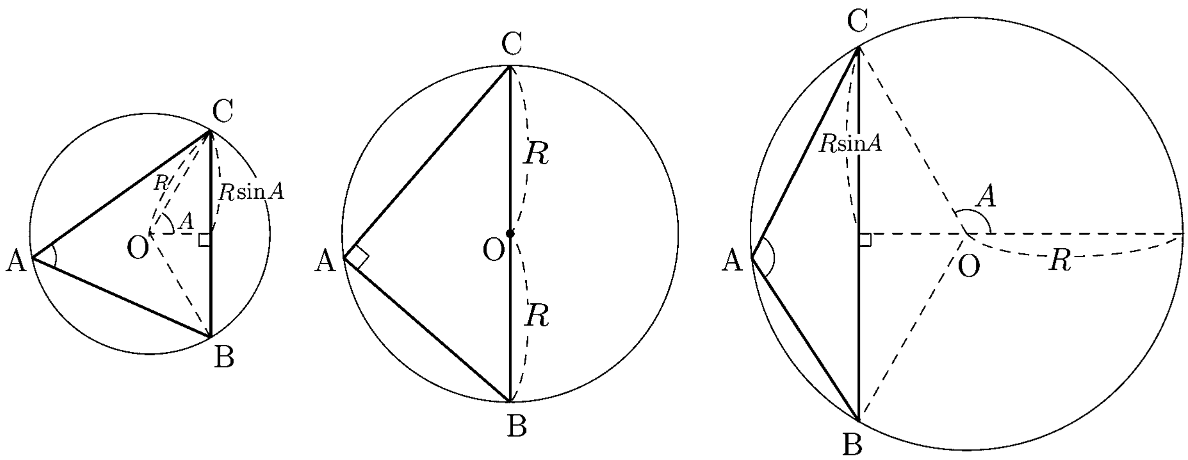
三角形 ABC で, 頂点 A, B, C に対する辺の長さを, それぞれ, a, b, c とする。また ∠A, ∠B, ∠C の大きさを, それぞれ A, B, C と書くことにする。このとき次の定理が成立する。

＜ 正弦定理 ＞

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ここで R は三角形 ABC の外接円の半径である。

[証明] 外接円の中心を O とする。円周角と中心角との関係から図のように ∠BOC の大きさの半分が A になる。



A が鋭角, 90°, 鈍角のどの場合についても

$$\text{BC の長さ} \quad = \quad a \quad = \quad 2R\sin A$$

が成り立つ。従って

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

である。同様にして

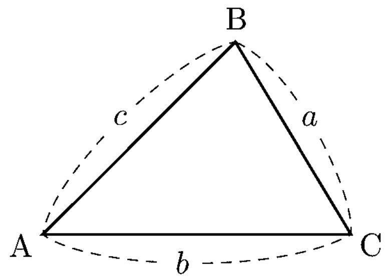
$$\frac{b}{\sin B} = 2R \qquad , \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が得られる。(証明終)

問 角度 A が次の各場合に a を外接円の半径 R で表せ。

(1)$A = 70^\circ$ (2)$A = 90^\circ$ (3)$A = 120^\circ$

＜ 正弦定理 (2) ＞

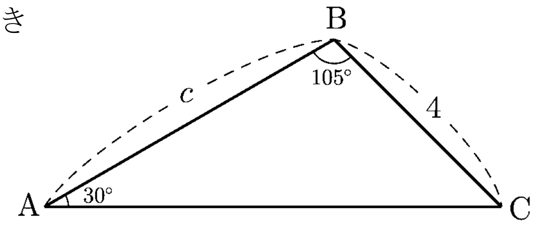


△ABC において

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$ (正弦定理)

R は △ ABC の外接円の半径である。

例題 △ABC で, $a=4$, $A=30^\circ$, $B=105^\circ$ のとき



(1) c を求めよ。

(2) 外接円の半径 R を求めよ。

(解)

(1) $A+B+C=180^\circ$ より $C=45^\circ$。
正弦定理から

$$\frac{c}{\sin 45^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}$$

よって

$$c=\frac{4}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{4}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

(2) $2R=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=8$ より $\underline{R=4}$

問 1 △ABC で $a=8$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$ のとき b を求めよ。

問 2 △ABC で $b=2$, $B=45^\circ$, $C=120^\circ$ のとき c を求めよ。

問 3 △ABC で $c=10$, $A=60^\circ$, $B=75^\circ$ のとき

(1) a を求めよ。

(2) 外接円の半径 R を求めよ。

＜ 正弦定理の応用 ＞

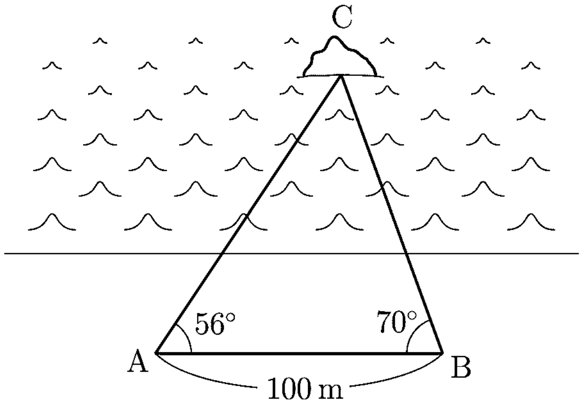
問 1 100m 離れた 2 地点 A, B から島 C を見たところ

$$\angle\mathrm{CAB} = 56^\circ,\ \angle\mathrm{CBA} = 70^\circ$$

であった。A, C 間の距離を求めよ。ただし

$$\sin 54^\circ = 0.8\ ,\quad \sin 70^\circ = 0.94$$

とする。

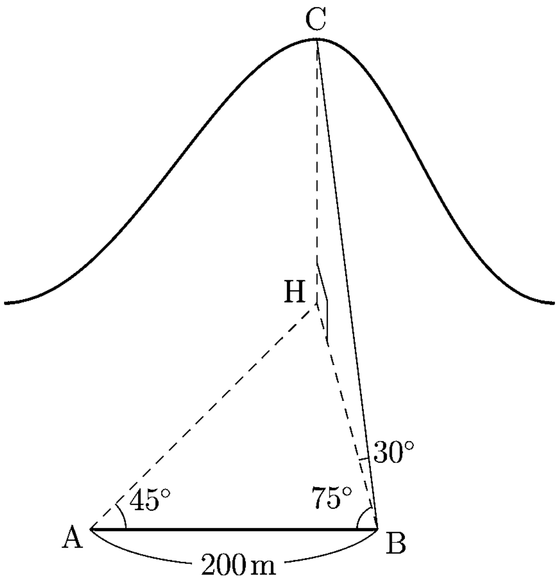


問 2 山の高さ CH を求めたい。ふもとの 2 地点 A, B で測量した結果右図のようになった。

$\angle\mathrm{BAH} = 45^\circ$, $\angle\mathrm{ABH} = 75^\circ$

$\angle\mathrm{HBC} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{BHC} = 90^\circ$

$\mathrm{AB} = 200\mathrm{m}$



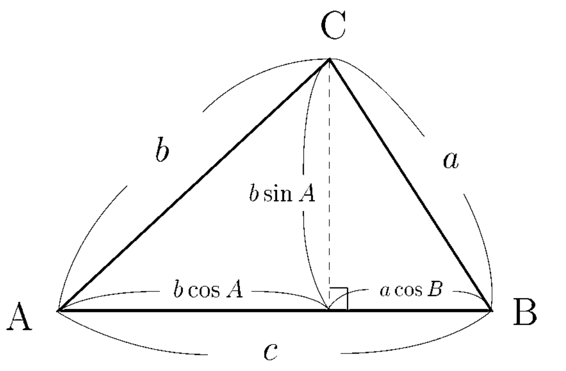
(1) $\angle\mathrm{AHB}$ を求めよ。

(2) BH を求めよ。

(3) CH を求めよ。

< 余弦定理 (1) >

△ABC で，2 辺の長さ b，c とその間の角 A がわかっているとき，残りの辺の長さ a を求めることを考える。



(図1)

図 1 のような場合に

$$a^2 = (a\cos B)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= (c - b\cos A)^2 + b^2\sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$$

であり，　$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$　だから

$$(*) \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

が成り立つ。この関係式を**余弦定理**という。

図 2 の場合，B は鈍角だから

$$\cos B < 0$$

であり

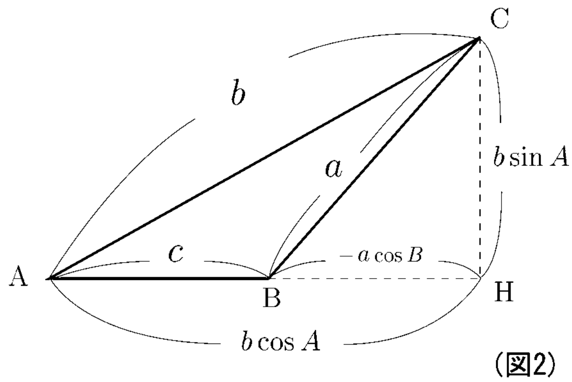
$$\mathrm{BH} = a\cos(180° - B) = -a\cos B$$

となる。

$$b\cos A = c + \mathrm{BH} = c - a\cos B$$

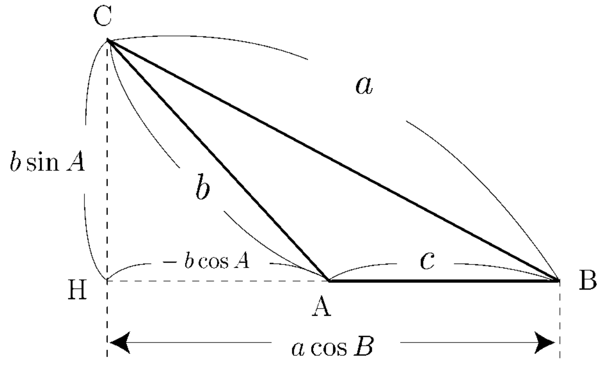
より

$$a^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 = (-a\cos B)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 B = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



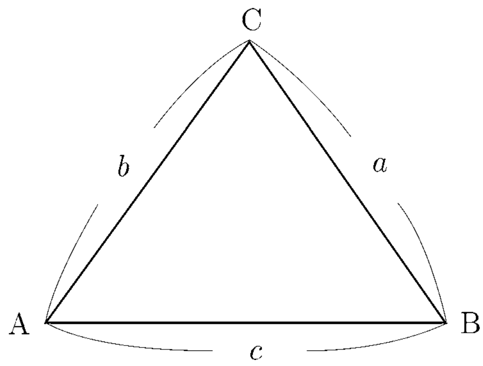
(図2)

問　図 3 の場合に余弦定理 (*) を証明せよ。



(図3)

＜余弦定理 (2)＞



三角形 ABC に対し，前ページより

$(*)$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

が成り立つ。これを**余弦定理**という。

問 1 $(*)$ 式を参考にして，b^2 を a，c と角度 B で表せ。

$b^2 =$

問 2 $(*)$ 式を参考にして，c^2 を a，b と角度 C で表せ。

$c^2 =$

例 $\triangle$ABC において $b = 7$，$c = 6$，$A = 120^\circ$ のとき，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos 120^\circ = 49 + 36 + 42 = 127$$

より $\underline{a = \sqrt{127}}$

問 3 次の $\triangle$ABC について，(　) 内の値を求めよ。

(1) $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{2}$, $A = 30^\circ$ (a)

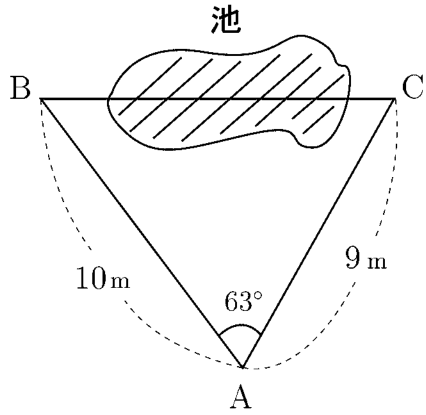
(2) $a = \sqrt{2}$, $c = 3$, $B = 45^\circ$ (b)

(3) $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $C = 150^\circ$ (c)

(4) $a = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}$, $B = 135^\circ$ (b)

< 余弦定理 (3) >

問 1　右図のような 3 つの地点 A , B , C がある。AB=10 m , AC=9 m , ∠BAC=63° のとき B , C 間の距離 BC を求めよ。
ただし $\cos 63° = 0.45$ とする。



例 1　△ABC において余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ である。よって

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

と表される。

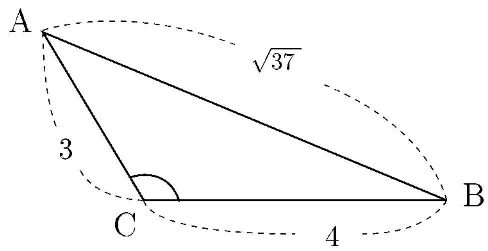
問 2　△ABC において , 次の値を辺の長さ a , b , c で表せ。

$\cos A =$ 　　　　　　　　　　　　, 　$\cos B =$

例 2　△ABC において
$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{37}$
のとき

$$\cos C = \frac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{37}\,)^2}{2 \times 4 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

より角度 C は <u>120°</u> である。

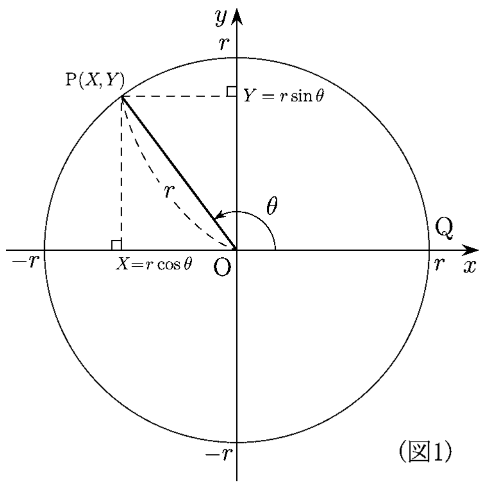


問 3　△ABC が次の各場合に (　) 内の角度を求めよ。

(1) $a = \sqrt{5}$, $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ 　(A)

(2) $a = 3$, $b = \sqrt{39}$, $c = 2\sqrt{3}$ 　(B)

< 三角関数 (1) >



(図1)

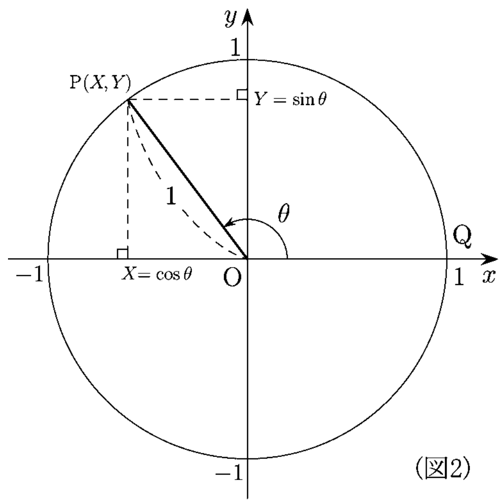
角度 θ が図 1 のようなとき，θ の三角比は

$$\sin\theta = \frac{Y}{r},\ \cos\theta = \frac{X}{r},\ \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

で定義される。

(注) この値は r によらない。

< $r = 1$ のとき >



(図2)

$r = 1$ のとき図 2 の点 P の座標 (X, Y) は

$$(X, Y) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

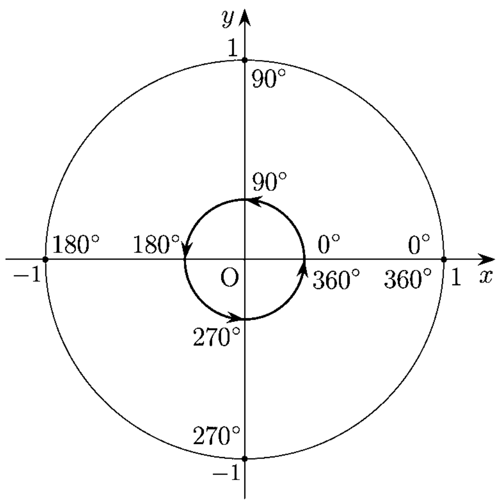
となる。

このとき角度 θ の三角比は図 2 の座標 (X, Y) を用いると

$$\boxed{\sin\theta = Y\ ,\ \cos\theta = X\ ,\ \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

のように簡単になる。この式を θ の三角比の定義としてもよい。

(注) $X = 0$ のとき $\tan\theta$ の値は定義されない。



例 1 $\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0\ ,\ \cos 0^\circ = 1\ ,\ \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

例 2 $\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0,\ Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1\ ,\ \cos 90^\circ = 0$$

である。$\tan 90^\circ$ の値は定義されない。

問 次の値を求めよ。

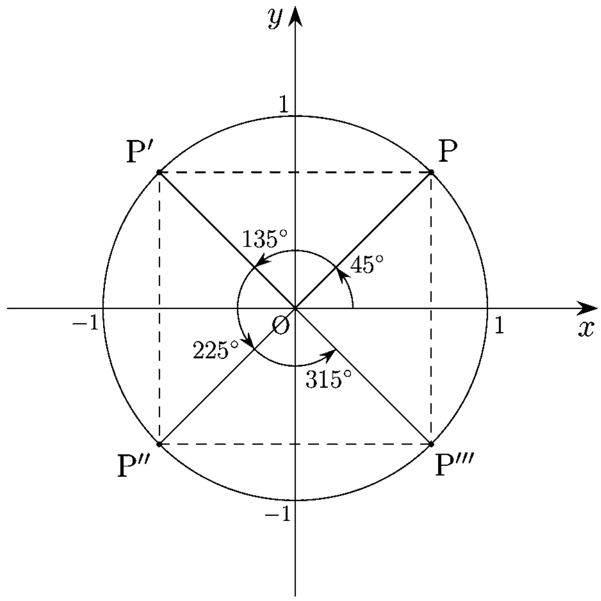
$\sin 180^\circ =$　　　$\cos 180^\circ =$　　　$\tan 180^\circ =$

$\sin 270^\circ =$　　　$\cos 270^\circ =$

$\sin 360^\circ =$　　　$\cos 360^\circ =$　　　$\tan 360^\circ =$

＜三角関数 (2)＞

問 1 右図で点 P, P′, P″, P‴ の座標を求め，図の下に記入せよ。また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 45^\circ =$ $\sin 45^\circ =$ $\tan 45^\circ =$

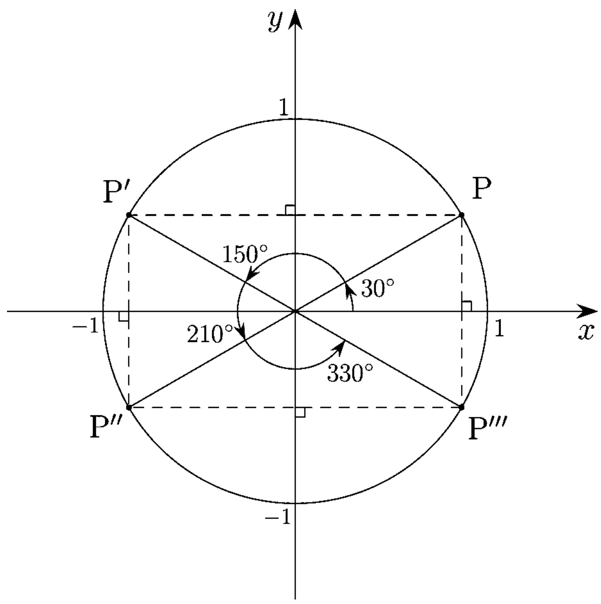
$\cos 135^\circ =$ $\sin 135^\circ =$ $\tan 135^\circ =$

$\cos 225^\circ =$ $\sin 225^\circ =$ $\tan 225^\circ =$

$\cos 315^\circ =$ $\sin 315^\circ =$ $\tan 315^\circ =$

P (,)
P′ (,)
P″ (,)
P‴ (,)

問 2 右図で点 P, P′, P″, P‴ の座標を求め，図の下に記入せよ。また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 30^\circ =$ $\sin 30^\circ =$ $\tan 30^\circ =$

$\cos 150^\circ =$ $\sin 150^\circ =$ $\tan 150^\circ =$

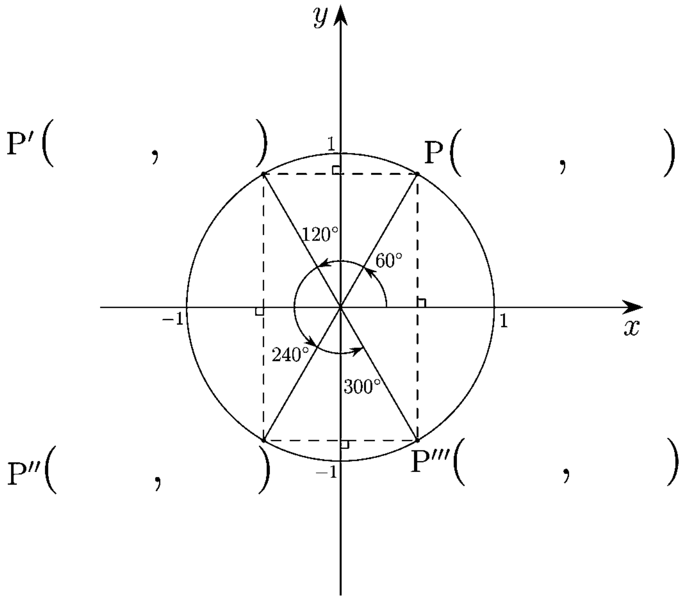
$\cos 210^\circ =$ $\sin 210^\circ =$ $\tan 210^\circ =$

$\cos 330^\circ =$ $\sin 330^\circ =$ $\tan 330^\circ =$

P (,)
P′ (,)
P″ (,)
P‴ (,)

＜ 三角関数 (3) ＞

問 1 右図で点 P, P′, P″, P‴ の座標を求め，図に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 60^\circ =$ $\sin 60^\circ =$ $\tan 60^\circ =$

$\cos 120^\circ =$ $\sin 120^\circ =$ $\tan 120^\circ =$

$\cos 240^\circ =$ $\sin 240^\circ =$ $\tan 240^\circ =$

$\cos 300^\circ =$ $\sin 300^\circ =$ $\tan 300^\circ =$

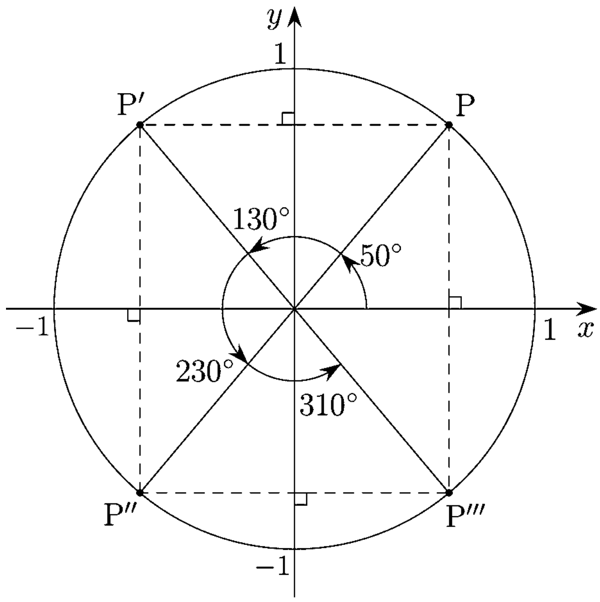
問 2 三角関数表より

$\cos 50^\circ = 0.6428$, $\sin 50^\circ = 0.7660$

であるので右図の点 P の座標は

P(0.6428, 0.766)

である。



(1) 右図の点 P′, P″, P‴ の座標を記入せよ。

P′(,)

P″(,)

P‴(,)

(2) 次の値を求めよ。

$\cos 130^\circ =$ $\sin 130^\circ =$

$\cos 230^\circ =$ $\sin 230^\circ =$

$\cos 310^\circ =$ $\sin 310^\circ =$

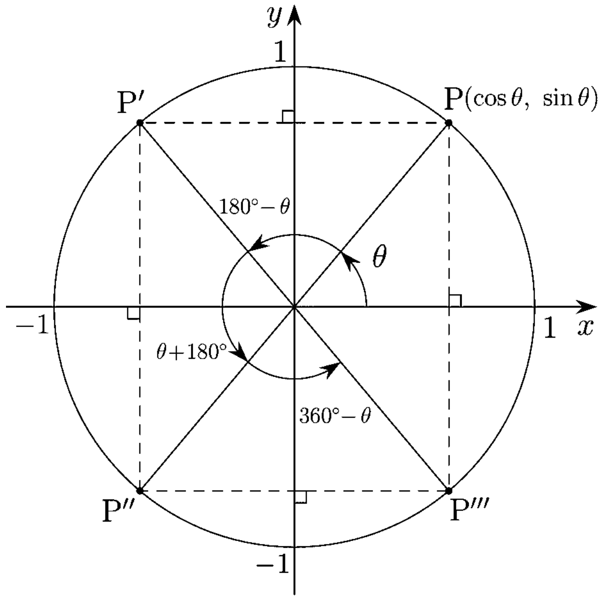
(3) $\tan 50^\circ = \dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \dfrac{0.7660}{0.6428} = 1.1918$ であることを用いて次の値を求めよ。

$\tan 130^\circ =$ $\tan 230^\circ =$ $\tan 310^\circ =$

＜ 三角関数 (4) ＞

問 1 前ページの性質を一般化する。

(1) 右図を参考にして次式を $\cos\theta$ または $\sin\theta$ で表せ。



$\sin(180° - \theta) =$

$\cos(180° - \theta) =$

$\sin(\theta + 180°) =$

$\cos(\theta + 180°) =$

$\sin(360° - \theta) =$

$\cos(360° - \theta) =$

(2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であることを用いて次式を $\tan\theta$ で表せ。

$\tan(180° - \theta) =$

$\tan(\theta + 180°) =$

$\tan(360° - \theta) =$

問 2 三角関数表 (8 ページ) と問 1 の結果より次の値を求めよ。

$\cos 20° =$ $\sin 20° =$ $\tan 20° =$

$\cos 160° =$ $\sin 160° =$ $\tan 160° =$

$\cos 200° =$ $\sin 200° =$ $\tan 200° =$

$\cos 340° =$ $\sin 340° =$ $\tan 340° =$

< 三角関数の相互関係 >

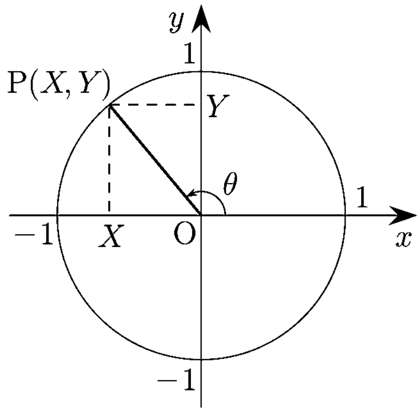
角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(X,Y)$ とすると，三角関数の定義から

$$\sin\theta = Y,\ \cos\theta = X,\ \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。原点 O と点 P の距離は 1 だから $X^2+Y^2=1$ より

$$\boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

が成り立つ。

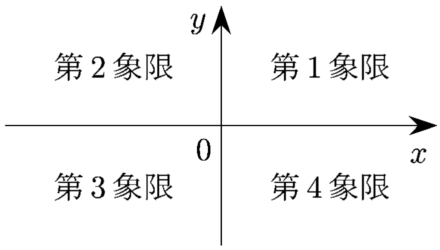


(注) 記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2=(\cos\theta)\times(\cos\theta)$ の意味であり，$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち
$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2\neq\cos(\theta^2)$, $\sin^2\theta=(\sin\theta)^2\neq\sin(\theta^2)$

問 1 $\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2 $1+\tan^2\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問 3 三角関数の定義から，sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり，第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

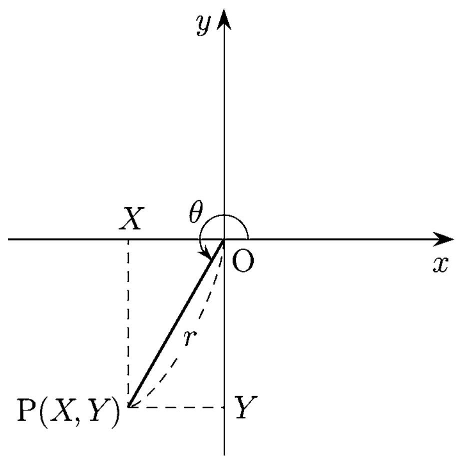
例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ である。このとき

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \text{だから} \quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

よって $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 4 角度 θ は 0° から 180° までの角で，$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

< 平面座標の三角表示 >



座標平面内で原点以外の任意の点を P(X,Y) とする。点 P と原点 O$(0,0)$ との距離を r とする。線分 OP と x 軸との角度 θ を右図のように測る。三角関数の定義 (p14) より

$$\cos\theta = \frac{X}{r}\ ,\quad \sin\theta = \frac{Y}{r}$$

となるので, 点 P の座標は

$$\boxed{\text{P の座標}\quad :\quad (X,Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}\ \text{(平面座標の三角表示)}$$

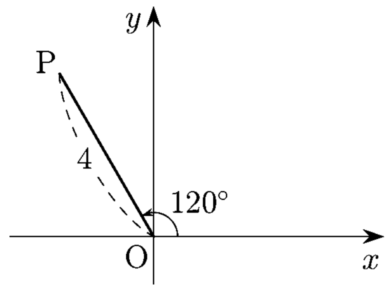
と表される。これを平面座標の三角表示ということにする。

例 右図の点 P の座標は

$$\mathrm{P} : (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta) = (4\cos 120^\circ\ ,\ 4\sin 120^\circ)$$

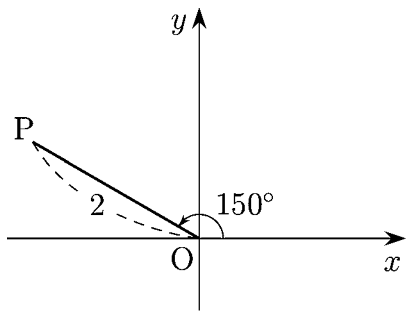
$$= \left(4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\ 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-2\ ,\ 2\sqrt{3}\right)$$

である。

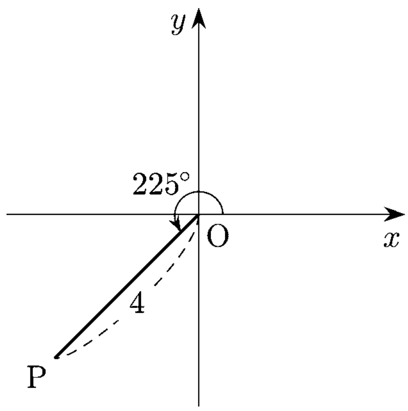


問 次の各場合に点 P の座標を求めよ。((4) は三角関数表を用いる)

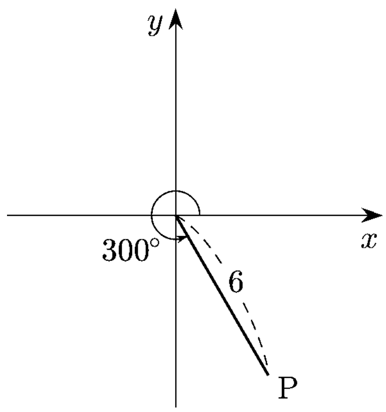
(1)



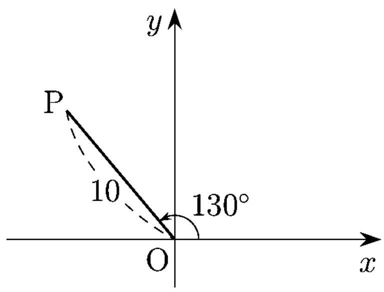
(2)



(3)

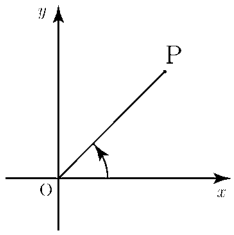


(4)

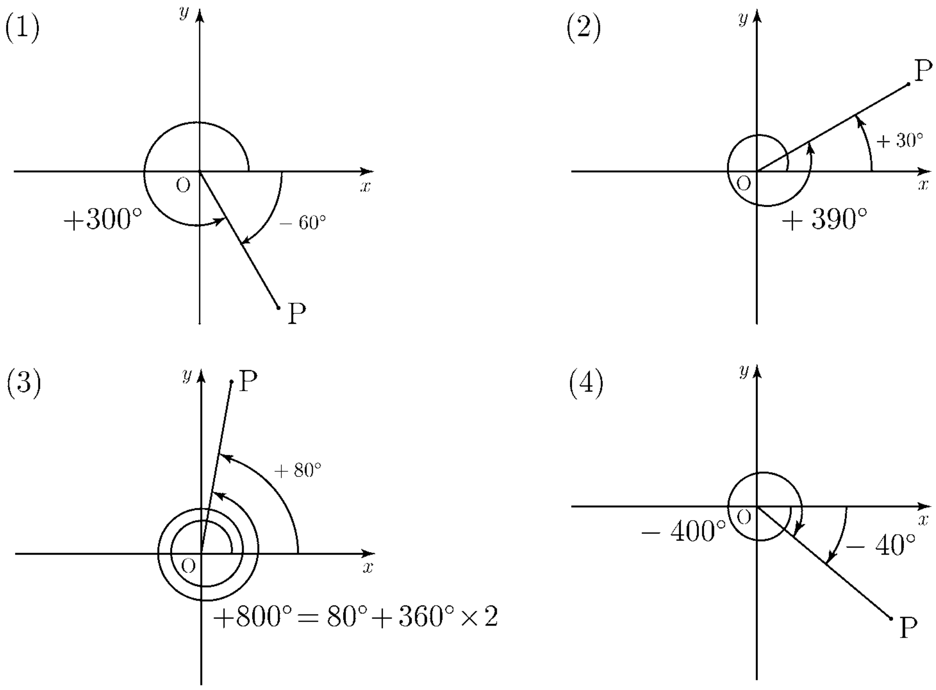


< 一般角 >

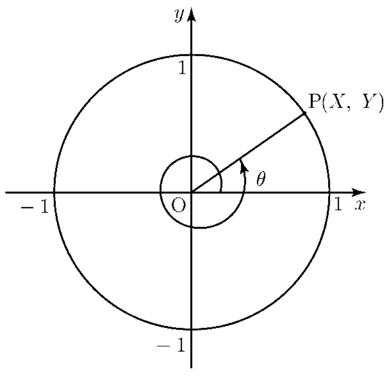
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を**始線**といい，OP を**動径**という。反時計まわりをプラス方向，時計まわりをマイナス方向として，始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



例 1



< 一般角の三角関数 >



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき，一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に，点 P の座標 (X, Y) で

$$\cos\theta = X, \qquad \sin\theta = Y, \qquad \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

(注) $X = 0$ のとき $\tan\theta$ の値は定義されない。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 460^\circ$　　(2) $\cos(-70^\circ)$　　(3) $\tan 500^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ)$　　(5) $\cos 650^\circ$　　(3) $\tan 860^\circ$

＜一般角の三角関数＞

問 1 19 ページおよび前ページを参考にして，次の値を $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

$\cos(\theta+360^\circ)=$ $\sin(\theta+360^\circ)=$ $\tan(\theta+360^\circ)=$

$\cos(\theta-360^\circ)=$ $\sin(\theta-360^\circ)=$ $\tan(\theta-360^\circ)=$

$\cos(180^\circ-\theta)=$ $\sin(180^\circ-\theta)=$ $\tan(180^\circ-\theta)=$

$\cos(\theta+180^\circ)=$ $\sin(\theta+180^\circ)=$ $\tan(\theta+180^\circ)=$

$\cos(360^\circ-\theta)=$ $\sin(360^\circ-\theta)=$ $\tan(360^\circ-\theta)=$

$\cos(-\theta)=$ $\sin(-\theta)=$ $\tan(-\theta)=$

例 1 $\cos 405^\circ=\cos(45^\circ+360^\circ)=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin 540^\circ=\sin(180^\circ+360^\circ)=\sin 180^\circ=0$,

$\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

問 2 次の値を求めよ。

$\sin 420^\circ=$ $\cos 450^\circ=$ $\tan 495^\circ=$

$\sin(-45^\circ)=$ $\cos(-90^\circ)=$ $\tan(-120^\circ)=$

例 2 $\cos 400^\circ=\cos 40^\circ=0.766$, $\sin 500^\circ=\sin 140^\circ=\sin 40^\circ=0.6428$

$\tan(-100^\circ)=-\tan 100^\circ=\tan 80^\circ=5.6713$

問 3 三角関数表を見て，次の値を求めよ。

$\sin 380^\circ=$ $\cos 400^\circ=$ $\tan 510^\circ=$

$\sin(-40^\circ)=$ $\cos(-100^\circ)=$ $\tan(-50^\circ)=$

＜ 三角関数の値 ＞

問 1 角度 θ が次の各場合の三角関数の値を求めて表に記入せよ。

角度 θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$	×								×				

角度 θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$					×								×

問 2 三角関数表をみて，次の値を求めよ。

$\sin(-50^\circ)$ $\cos(-40^\circ)$ $\tan(-20^\circ)$

$\sin 130^\circ$ $\cos 140^\circ$ $\tan 160^\circ$

$\sin 200^\circ$ $\cos 190^\circ$ $\tan 220^\circ$

$\sin 280^\circ$ $\cos 290^\circ$ $\tan 310^\circ$

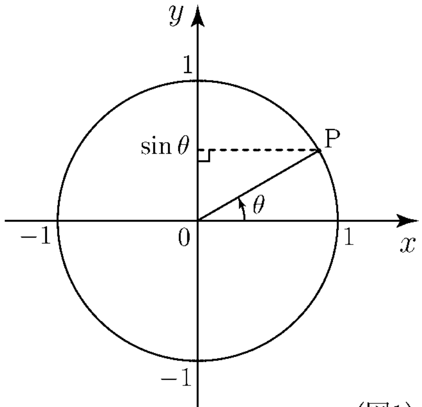
$\sin 370^\circ$ $\cos 380^\circ$ $\tan 410^\circ$

< 三角方程式 (1) >

16 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点をＰとすると，

$$\boxed{\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

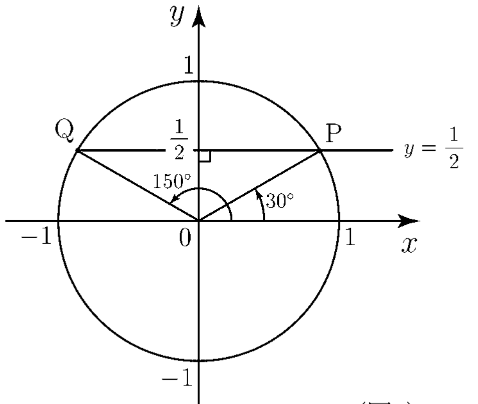
例題１ $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き，y 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点をＰ，Ｑとする。x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答) $\theta = 30^\circ$ または $\theta = 150^\circ$



(図2)

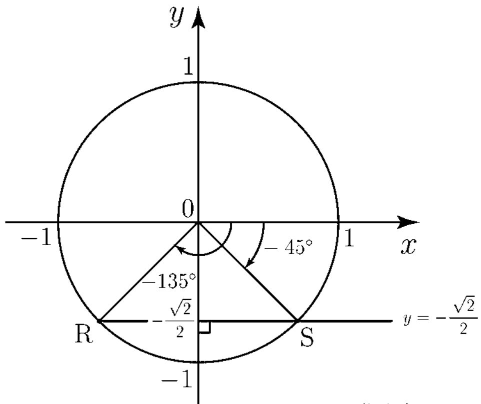
例題２ $-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 例題 1 と同様に単位円に直線 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き，単位円との交点をＲ，Ｓとすると図 3 のようになる。

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = -135^\circ$



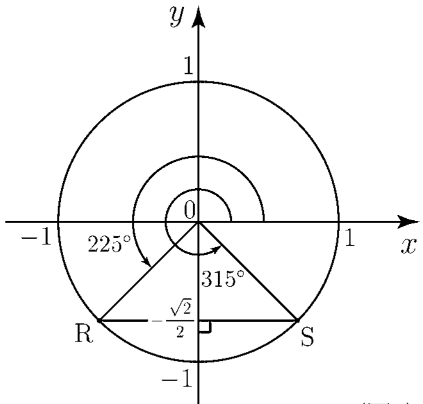
(図3)

例題３ $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 図 4 より (答) $\theta = 225^\circ$ または $\theta = 315^\circ$



(図4)

問 次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

(2) $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

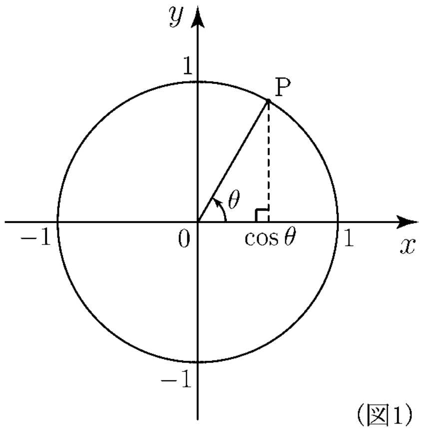
(3) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2} \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

＜三角方程式(2)＞

16 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると，

$$\boxed{\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

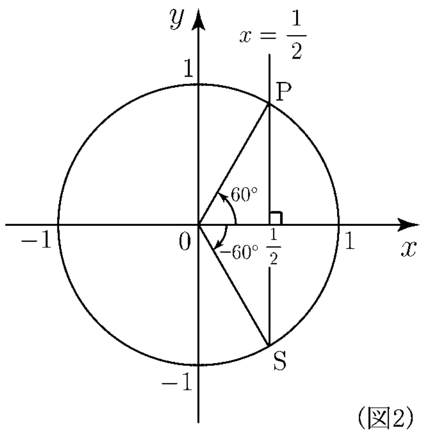
例題 1　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，x 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , S とする。x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答)　$\theta = 60^\circ$ または $\theta = -60^\circ$



(図2)

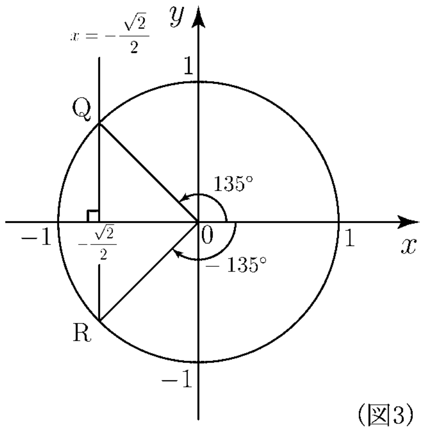
例題 2　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　単位円に直線 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き，単位円との交点を Q , R とすると図 3 のようになる。

(答)　$\theta = 135^\circ$ または $\theta = -135^\circ$



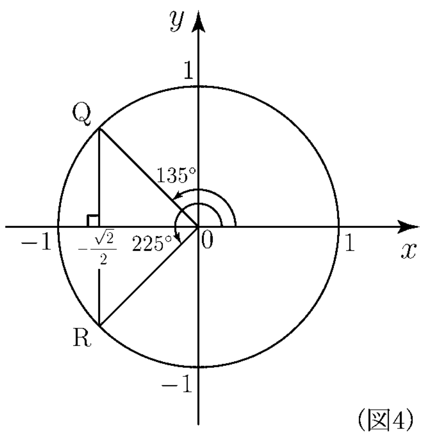
(図3)

例題 3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 より　(答)　$\theta = 135^\circ$ または $\theta = 225^\circ$



(図4)

問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

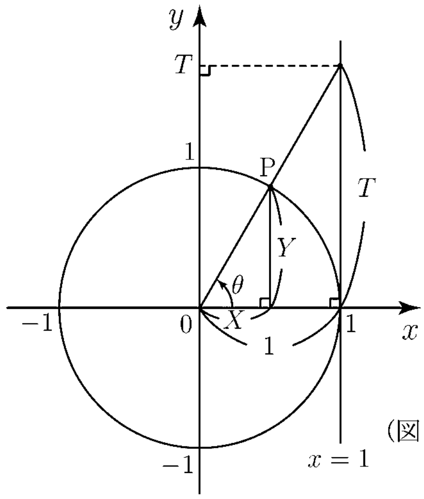
(3)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

< 三角方程式 (3) >

単位円と角 θ を表す動径との交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とすると

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。



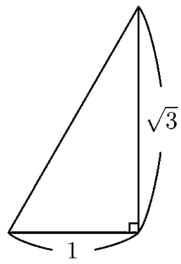
(図1)

問 1　図 1 の場合に

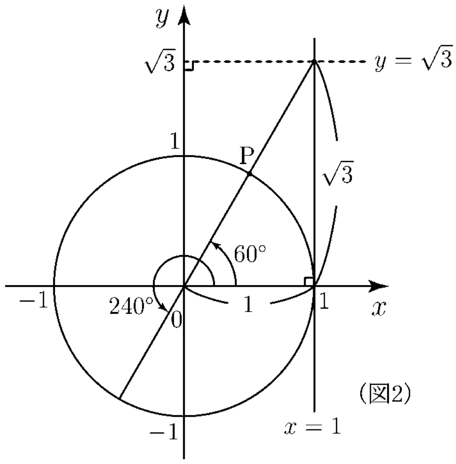
$$\boxed{\tan\theta = T}$$

であることを示せ。

(証明)



(図3)



(図2)

例題 1　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

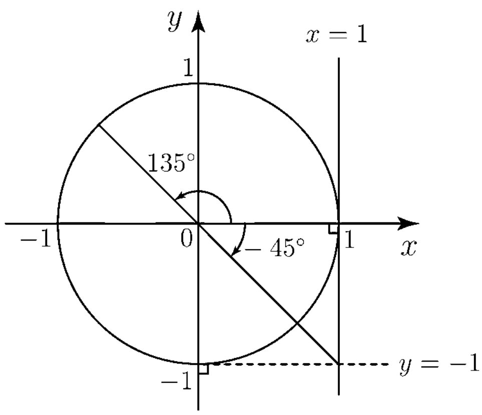
$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，y 軸上に $\sqrt{3}$ をとる。$y = \sqrt{3}$ と $x = 1$ との交点から原点に直線を引くと図 3 の直角三角形ができる。この直角三角形は斜辺の長さが 2 になるので内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形になる。図 2 より

(答) $\theta = 60^\circ$ または $\theta = 240^\circ$

(注)　19 ページより $\tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$ であるから $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ である。



(図4)

例題 2　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

$$\tan\theta = -1$$

を満たす角度 θ を求めよ。

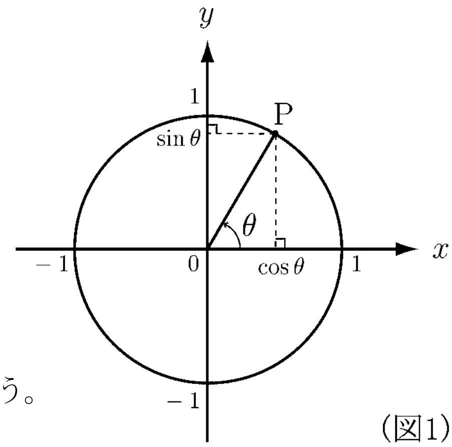
(解)　図 4 のように直線 $x = 1$ と $y = -1$ の交点から原点に直線を引く。図 4 より

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = 135^\circ$

問 2　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で次式を満たす角度 θ を求めよ。

(1)　$\tan\theta = 1$　　,　(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　,　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

＜三角関数のグラフ (1)＞



単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると

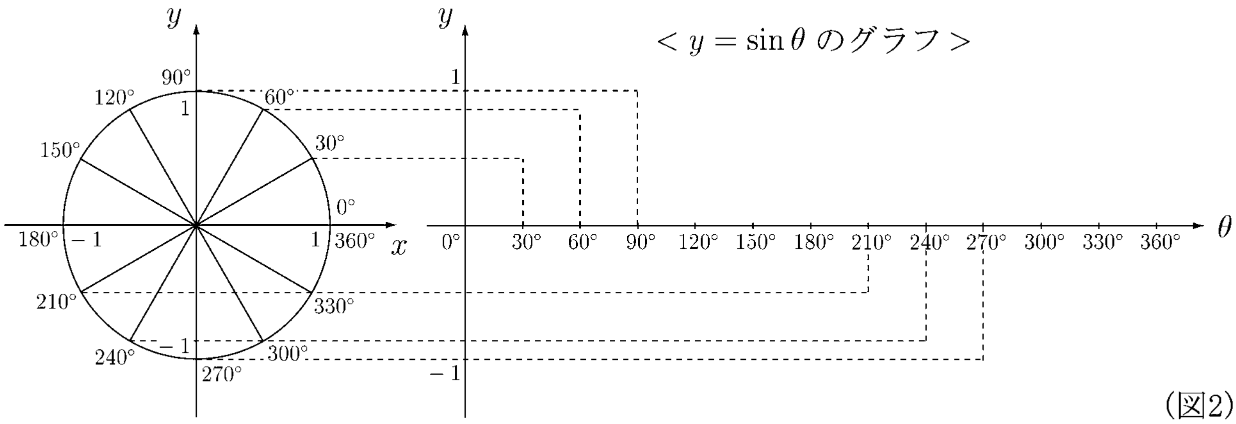
$$\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}$$

$$\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}$$

である。この性質を用いて $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のグラフを描こう。

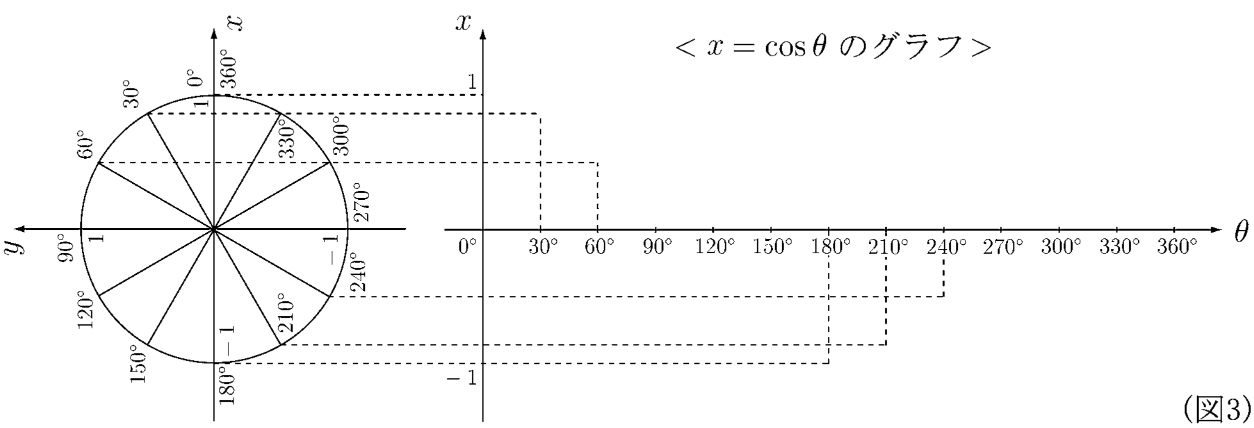
(図1)

問 1　図 2 に 30°，60°，90°，210°，240°，270° のときの $y = \sin\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $y = \sin\theta$ の通る点を点線で作図し，0° から 360° までの範囲で $y = \sin\theta$ のグラフを (図 2 に) 実線で描け。



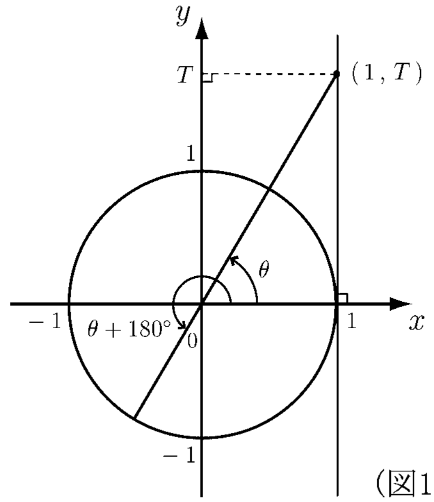
(図2)

問 2　図 3 に 0°，30°，60°，180°，210°，240° のときの $x = \cos\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $x = \cos\theta$ の通る点を点線で作図し，0° から 360° までの範囲で $x = \cos\theta$ のグラフを (図 3 に) 実線で描け。



(図3)

＜三角関数のグラフ (2)＞



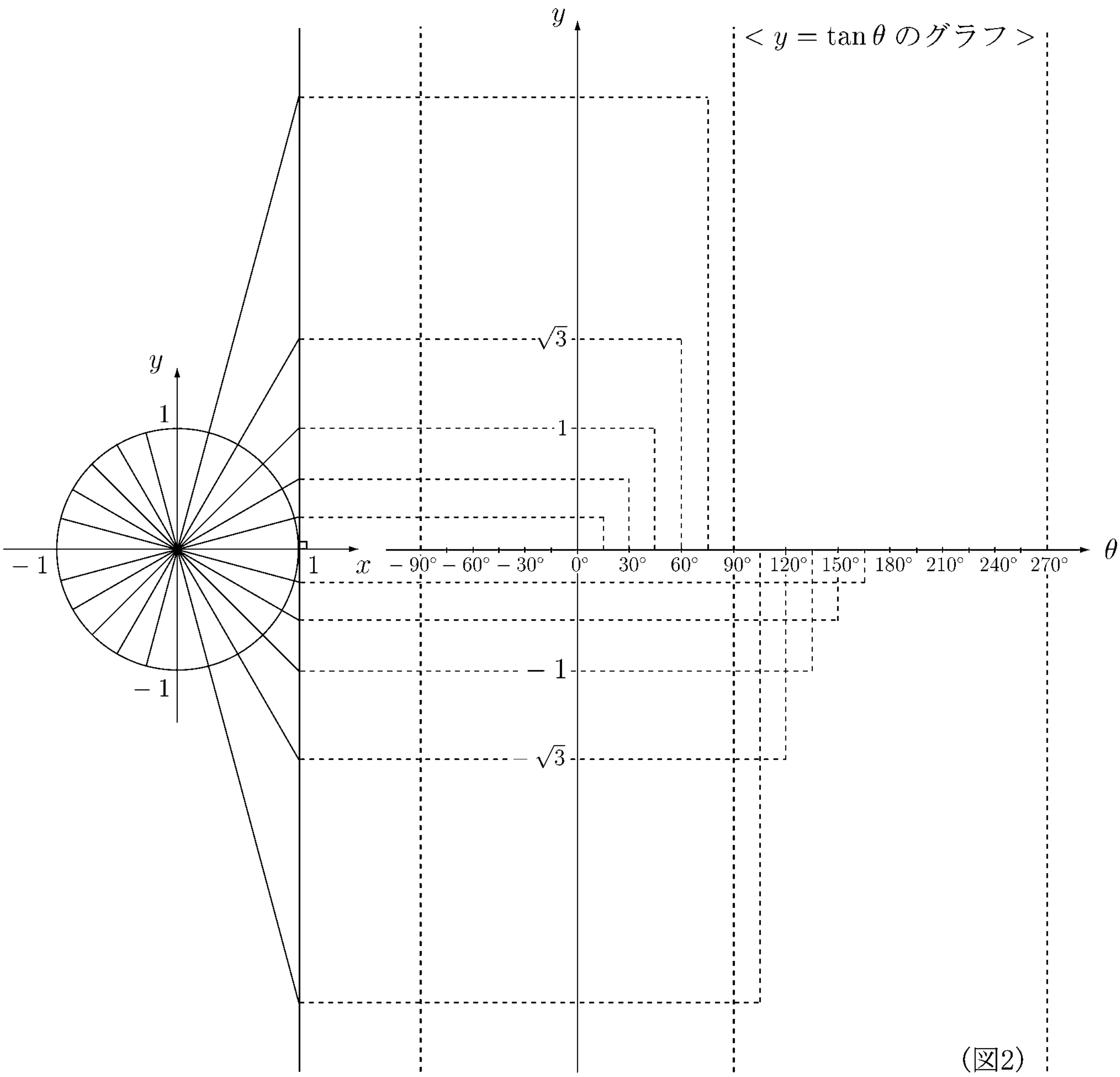
(図1)

図 1 のように角 θ を表す動径と直線 $x = 1$ との交点の座標を $(1\ ,\ T)$ とすると，27 ページより

$$\boxed{T = \tan\theta = \tan(\theta + 180^\circ)}$$

となる。この性質を用いて $y = \tan\theta$ のグラフを描こう。

問　図 2 は 15° おきに角度を目もり，その一部について $y = \tan\theta$ の通る点を点線で作図してある。他の角度についても $y = \tan\theta$ の通る点を点線で作図し，グラフを実線で描け。



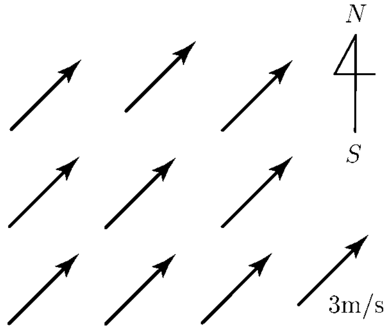
(図2)

(注) $\theta = \pm 90^\circ$, $\theta = 270^\circ$ のときは $\tan\theta$ の値は定義されない。

＜スカラーとベクトル＞

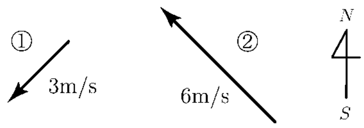
長さ，質量，温度などは，ある単位を基準に 1 つの実数で表すことができる。このような量を**スカラー**（scalar）という。しかし風の速度のように，大きさ（速さ）だけでなく，その方向を考えなければならないものがある。天気図などで風を表すときは，風の方向を ↗，↘ のような矢印で表す。このように線分の片方の端に矢印をつけたものを**有向線分**という。

例　「南西の風 3m/s」と言えば，その地域の各点で南西の方角から秒速 3m の風が吹くことを意味する。このことを有向線分を用いて右図のように描くことができる。



（注）実際の天気図では 1 つの地域の風を 1 本の有向線分で表す。同じ方向と同じ長さをもった有向線分をたくさん描くことはない。

問 1　右図の有向線分①, ②が表す風を例のような「○○の風○ m/s」の形で表せ。



①　　　　　　　　②

風を有向線分で表す場合に，同じ方向と同じ大きさ（＝長さ＝風の速さ）を持つ有向線分は同じ風を表す。このように有向線分について，位置を考えないで，方向と大きさ（＝長さ）だけを考えるとき，これを**ベクトル**（vector ）という。

(注) 有向線分をベクトルとみなす場合もある。「1 点に働く力」は有向線分で表されるが，位置を無視することはできないのでベクトルとはいえない。しかしこれもベクトルとみなす場合がある。

問 2　次の量はスカラーであるかベクトルであるか答えよ。

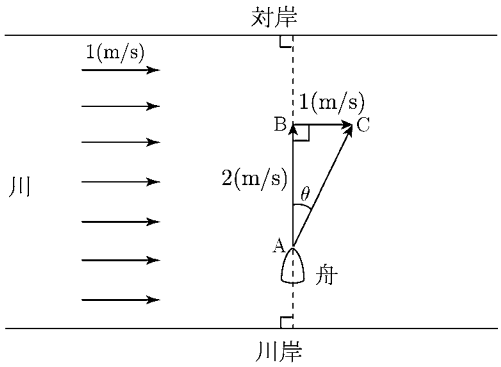
(1) 面積　　(2) 体積　　(3) 時間

(4) 湿度　　(5) 海流の速度　　(6) 重力

＜速度の合成＞

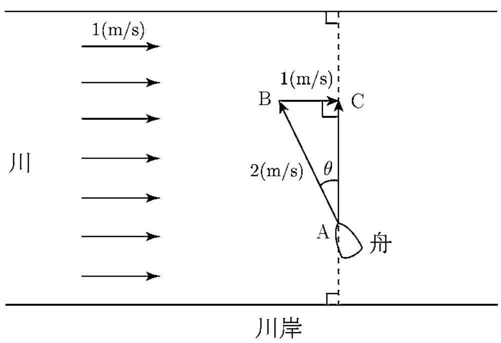
例 1　静水中を 2m/s の速さで進む舟が，流速 1m/s の川を，一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まですすむはずであるが，かわのながれのため，実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。この角度 θ を正確に求めるためには，AB の長さを 2(=舟の速さ)，BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると，三平方の定理より　AC= $\sqrt{5}$ となるから，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$

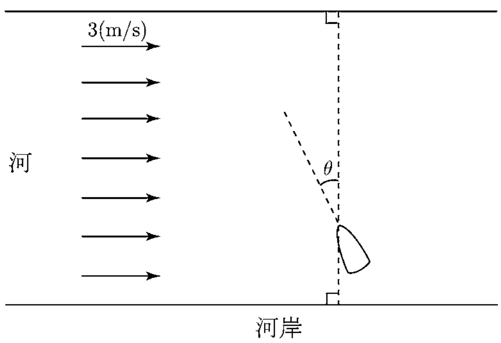


例 2　例 1 と同じ場合に，この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき，舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。例 1 と同様に，舟の速度を有向線分 AB (長さ 2)，川の速度を有向線分 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると，直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$



問　静水中を 5m/s で走る船がある。この船で，流れの速さが 3m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために，船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



＜ベクトルの表記＞

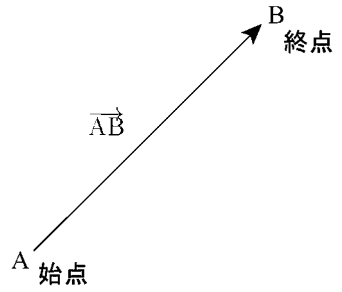
速度や力などの場合は，その大きさ（強さ）だけでなく，その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を有向線分で示し，その大きさは有向線分の長さで表す。

川の流れなどで，場所によって速度が変らないときは，一本の有向線分で流れの速度を表すことができる。このように，有向線分で，向きと大きさだけを考え，位置を問題にしないとき，これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの有向線分 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き，ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい，B を**終点**という。ベクトルは $\vec{a}$ のような記号で表したり，太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする（本書では $\vec{a}$ と書くことにする)。



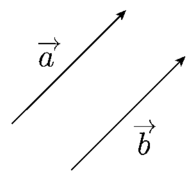
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，向きが同じで，大きさが等しいとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**等しい**といい，

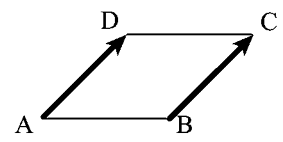
$$\vec{a} = \vec{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



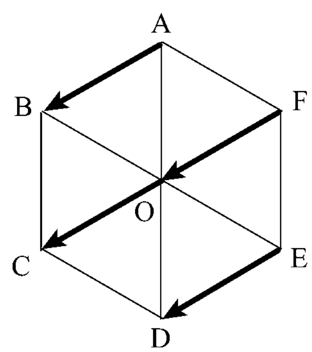


例　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると，

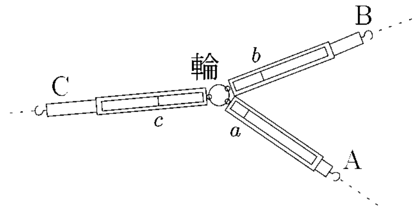
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

である。

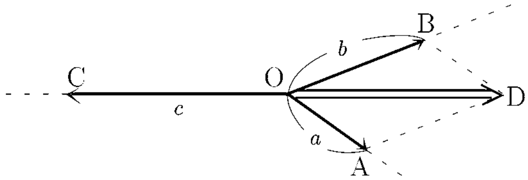
問　右の正六角形で，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。



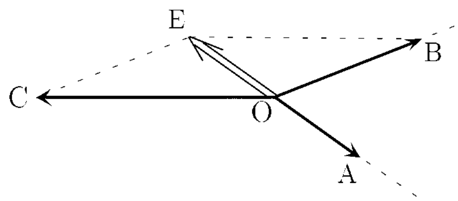
＜力の合成＞



例　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3 本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。

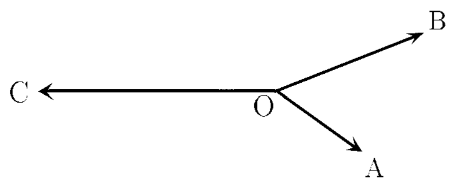


輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ有向線分をひき, その有向線分の先を A, B, C とする。次に OA,OB を 2 辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 有向線分 OD と有向線分 OC は方向が同じ (有向線分の向きは逆) で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を有向線分 ($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$) で表すと, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ との合力が $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とつりあっていることがわかる。

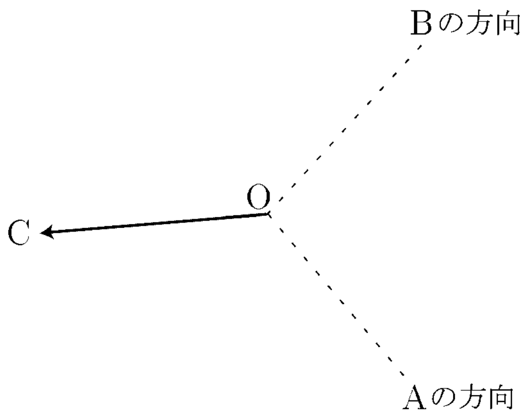


同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 有向線分 OE と OA は方向が同じ (向きが逆) で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の合力が $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とつりあっている。

問 1　右図に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ との合力 $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を作図せよ。



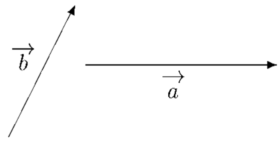
問 2　ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の有向線分の長さがわからない。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ がつりあうように, 右図に有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を作図せよ。



＜平面のベクトル (1)＞

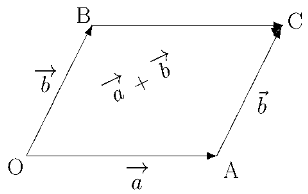
31 ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や，前ページでやった 2 つの力の合力を求める方法は，ベクトルとして同じ概念である。

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられているとする。

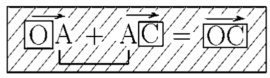


$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，終点を A，B とし，OA，OB を 2 辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{OC}$ が決まる。これを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**和**といい，

$$\vec{a}+\vec{b}$$



と書く。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 2 つの力であれば $\vec{a}+\vec{b}$ はその合力を表す。又，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 2 つの速度であれば，$\vec{a}+\vec{b}$ はその合成速度を表す。



ここで，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$ であるから，

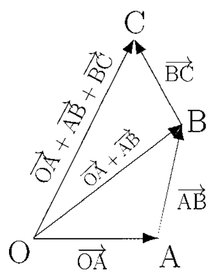
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと，A から出発して C に行くベクトルとの和は，途中の中継点 A を略して最初の到着点 C に行くベクトルになる。

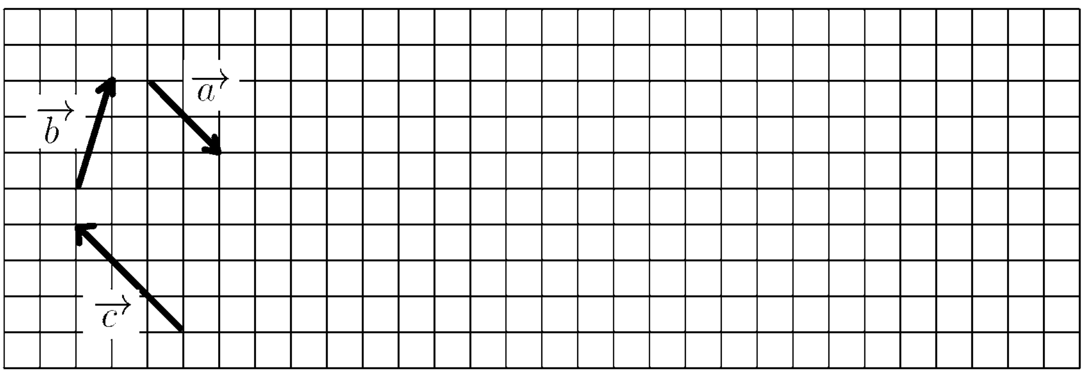
同様にして，4 点 O，A，B，C に対し

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

が成り立つ。



問 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，が下図の場合に，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を作図せよ。



＜平面のベクトル (2) ＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。

これを**零ベクトル**といい，$\overrightarrow{0}$ で表す。つまり

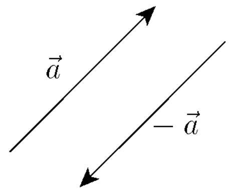
$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で，その向きは考えないものとする。

ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して，大きさが同じで，

向きが反対であるベクトルを，$\overrightarrow{a}$ の

逆ベクトルといい，$-\overrightarrow{a}$ で表す。



$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき，$-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。

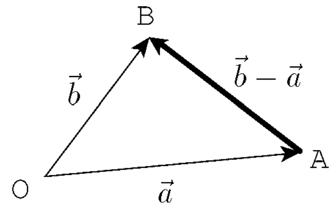
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ の**差**といい，

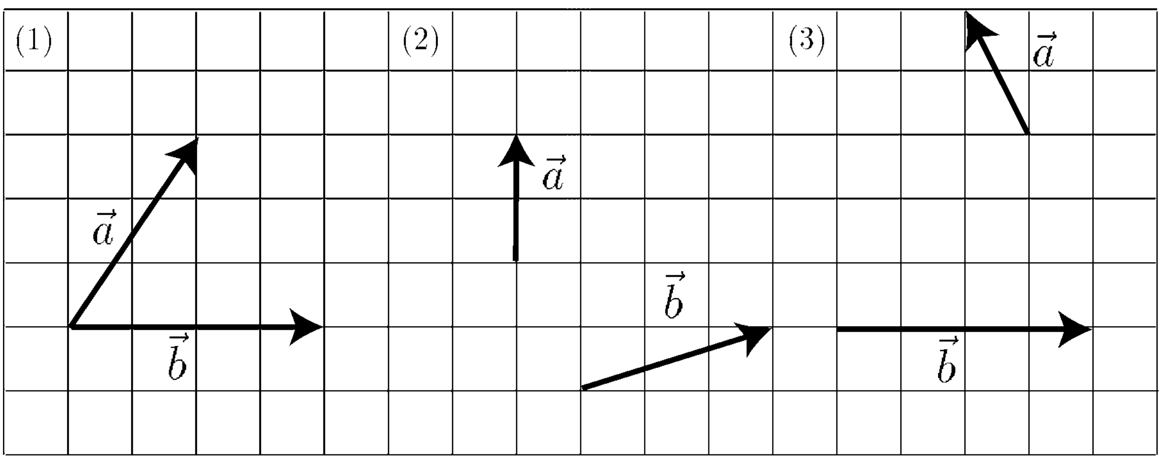
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$



と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には

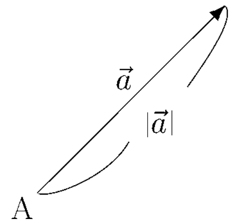
「終点 (B)− 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問　$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が次のように与えられている場合に $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ を図示せよ。



＜ 平面のベクトル (3) ＞

ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを $|\overrightarrow{a}|$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは，$|\overrightarrow{a}|$ は線分 AB の長さである。

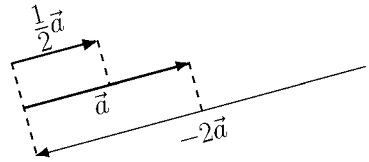


大きさが 1 であるベクトルを **単位ベクトル** という。

$\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{a}$ と正数 k に対して

(1) $k\overrightarrow{a}$ は，$\overrightarrow{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル

(2) $-k\overrightarrow{a}$ は，$\overrightarrow{a}$ と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

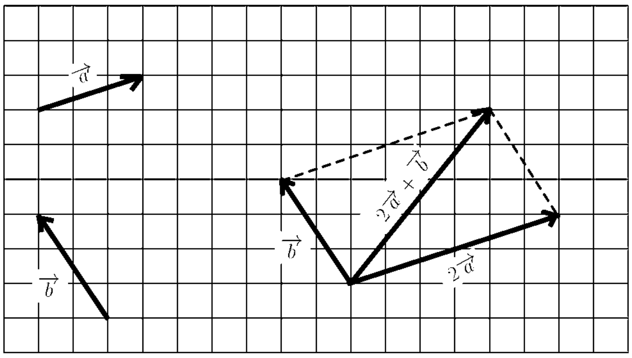


と定める。このようなベクトルを $\overrightarrow{a}$ の**実数倍**という。

例　ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が右図の様に与えられているとき

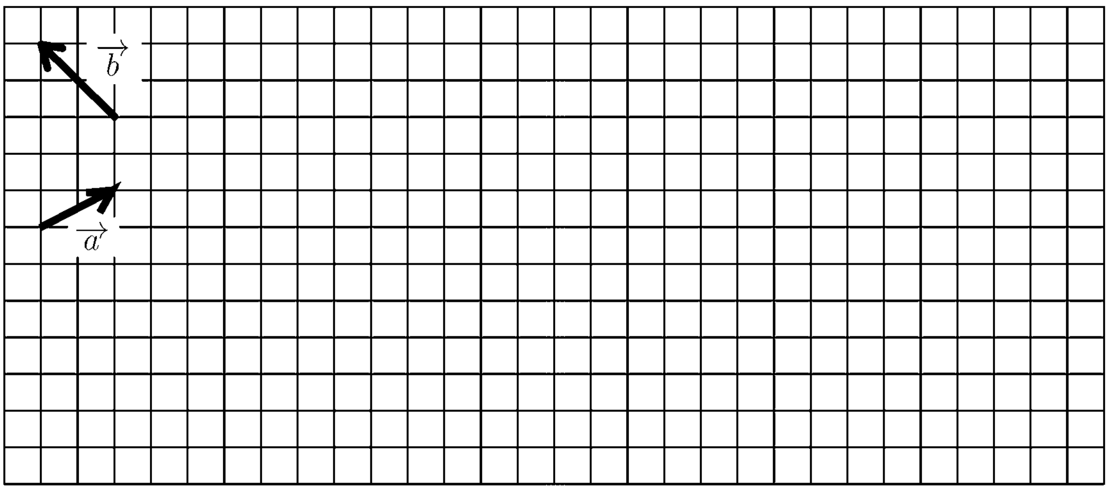
$$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

を図示すると、右の様になる。



問　ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が下の図の様に与えられているとき，次のベクトルを図示せよ。

(1) $-3\overrightarrow{a}$，(2) $\dfrac{5}{2}\overrightarrow{b}$，(3) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$，(4) $2\overrightarrow{a} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{b}$



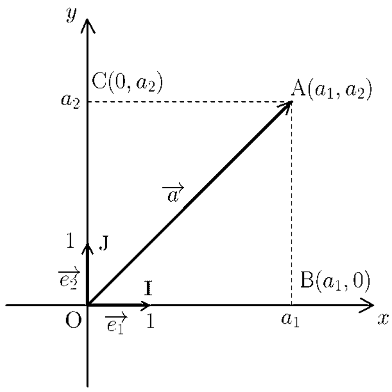
< 平面ベクトルの成分 (1) >

O を原点とする座標平面上の 2 点 I(1, 0), J(0, 1) に対して,

$$\vec{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ,\ \ \vec{\boldsymbol{j}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

を **基本ベクトル** という。

平面上の任意の点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ に対し，2 点 $\mathrm{B}(a_1, 0)$，$\mathrm{C}(0, a_2)$ をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1\vec{\boldsymbol{i}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_2\vec{\boldsymbol{j}}$ だから，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}}$$

と表す事が出来る。この a_1，a_2 を $\vec{a}$ の **成分** といい，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分という。このとき $\vec{a}$ を成分を使って

$$\vec{a} = (\,a_1\,,\ a_2\,)$$

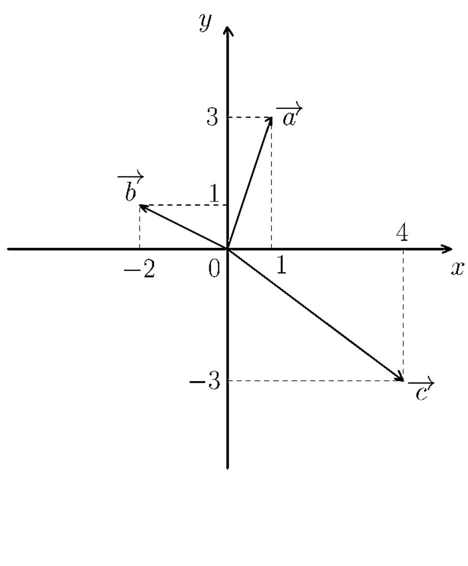
と表す。

例 1 $\vec{\boldsymbol{i}} = (\,1,\ 0\,)$, $\vec{\boldsymbol{j}} = (\,0,\ 1\,)$, $\vec{0} = (\,0,\ 0\,)$ …… 零ベクトル

例 2 2 点 A(2 , 3)，B(4 , −1) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分で表すと

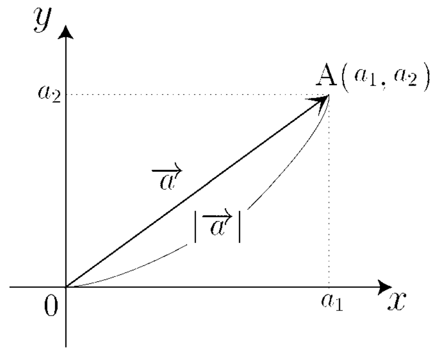
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\,2,\ 3\,)\ ,\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\,4,\ -1\,)$$

問 右図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を成分で表せ。



＜ 平面ベクトルの成分 (2) ＞

右図のように $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ は,
線分 OA の長さと一致するから



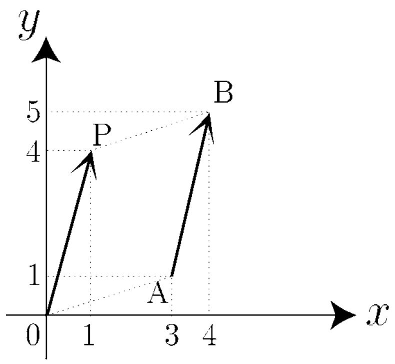
$$\boxed{\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2) \text{ のとき } \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

例題 2 点 A(3, 1), B(4, 5) が与えられたとき,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように

x 軸方向に -3
y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に
なるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (4-3\,,\ 5-1) = (1\,,\ 4)$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

(別解)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots(\text{終点} - \text{始点})\\ &= (4\,,\ 5) - (3\,,\ 1) = (1\,,\ 4)\end{aligned}$$

問 次の 2 点 A，B に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(1) A(5, 2), B(7, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2) A(4, −1), B(3, 1)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

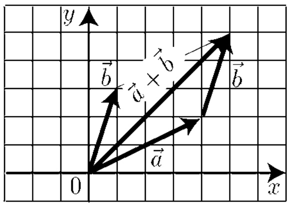
＜平面ベクトルの成分 (3)＞

例題 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$，　(2) $\vec{a}-\vec{b}$，　(3) $\dfrac{1}{2}\vec{a}$，　(4) $2\vec{b}$

（解）　(1) 右図より

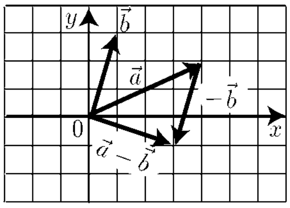
$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 2)+(1,\ 3)=(5,\ 5)$



(2) 右図より

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$=(4,\ 2)+(-1,\ -3)=(3,\ -1)$

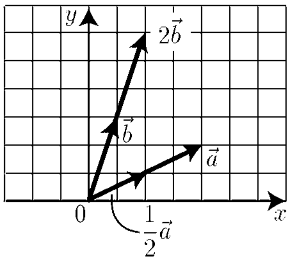


(3) 右図より

$\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{1}{2}(4,\ 2)=(2,\ 1)$

(4) 右図より

$2\vec{b}=2(1,\ 3)=(2,\ 6)$



問 1 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。（k は定数）

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=$

(3) $k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=$

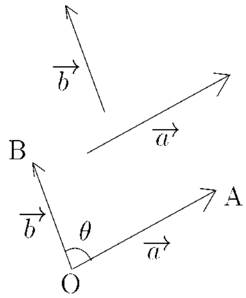
問 2 $\vec{a}=(2,\ 6)$，$\vec{b}=(-1,\ -3)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\vec{a}=$　　　　(2) $-\vec{b}=$

(3) $\vec{a}-\vec{b}=$　　　　(4) $\vec{a}+2\vec{b}=$

< ベクトルの内積 (1) >

$\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ に対し，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，終点をそれぞれ A,B とするとき，$\angle$ AOB の大きさ θ は，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ によってきまる。この角 θ をベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角という。



ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角が θ のとき

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\ \cos\theta$$

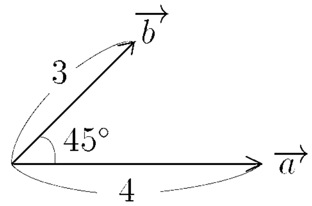
を，ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の**内積**といい，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\ \cos\theta}$$ (内積の定義)

例 (1) $|\overrightarrow{a}| = 4, |\overrightarrow{b}| = 3$ で

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角が 45° のとき

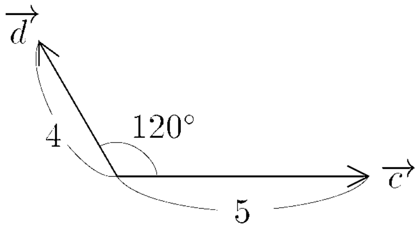
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 4\times 3\times\cos 45^\circ$$
$$= 4\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$



(2) $|\overrightarrow{c}| = 5, |\overrightarrow{d}| = 4$ で

$\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ のつくる角が 120° のとき

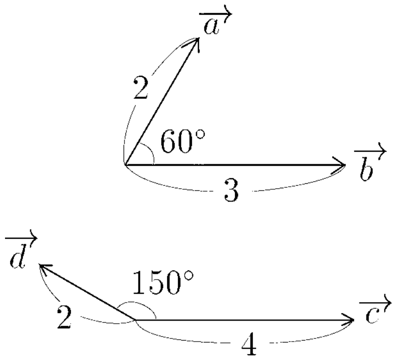
$$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} = 5\times 4\times\cos 120^\circ$$
$$= 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -10$$



問 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{d}$ が右図の場合に内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}$ を求めよ。

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} =$



< ベクトルの内積 (2) >

例　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で、$\vec{a}=\vec{b}$ のときは，$\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ だから

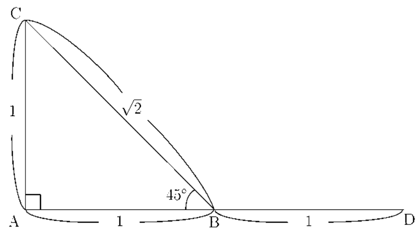
$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \text{ つまり，} |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

又，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **垂直** であるといい，
$\vec{a}\perp\vec{b}$ と書く。$\cos 90^\circ=0$ であるから，次が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}\neq\vec{0}\text{、}\vec{b}\neq\vec{0}\text{ のとき}\\ \qquad\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{array}}$$

(ベクトルの垂直と内積)

例　右図の直角二等辺三角形において

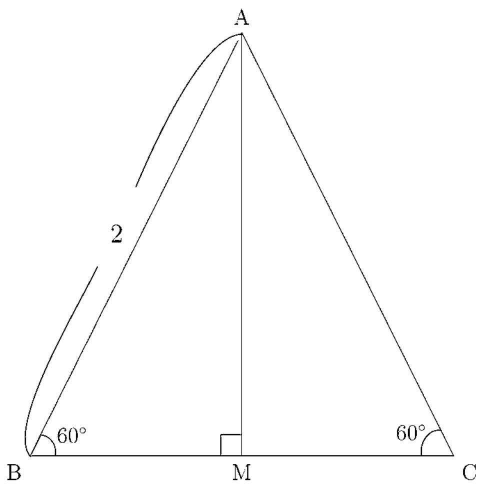


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1\times\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-1$

問　右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき，次の内積の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=$

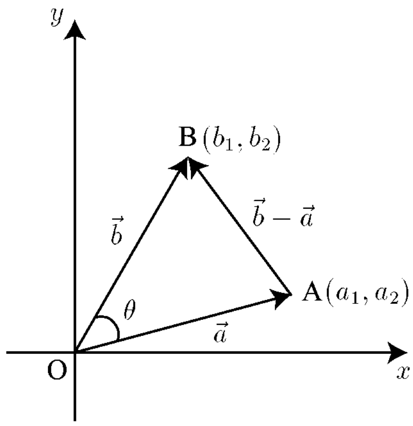
(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}=$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

(5) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=$

< 内積の成分表示 (1) >

座標平面上の 2 点 A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) と原点 O に対し，2 点間の距離の公式より



$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

問 1　線分 OA と OB の長さの 2 乗を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　　, $\mathrm{OB}^2 =$

問 2　$(*)$ 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 3　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1\,,\ a_2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1\,,\ b_2)$ とすると，内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問 1 の結果を使って，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$<$ 内積の成分表示 (2) $>$

前ページの結果より

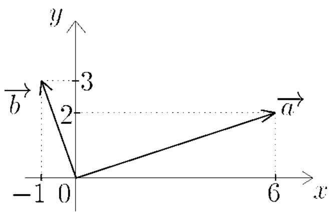
$$\boxed{\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2),\ \overrightarrow{b} = (b_1\,,\ b_2)\ \text{のとき}\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

である。

例 1 $\overrightarrow{a} = (6\,,\ 2), \overrightarrow{b} = (-1\,,\ 3)$ のとき 内積 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 6\times(-1) + 2\times 3 = 0$$

であるから, $\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{b}$ は垂直 ($\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$) である。



問 1 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直である場合は $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ と書け。

(1) $\overrightarrow{a} = (2\,,\ 3),\quad \overrightarrow{b} = (4\,,\ 5),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

(2) $\overrightarrow{a} = (4\,,\ 6),\quad \overrightarrow{b} = (-3\,,\ 2),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

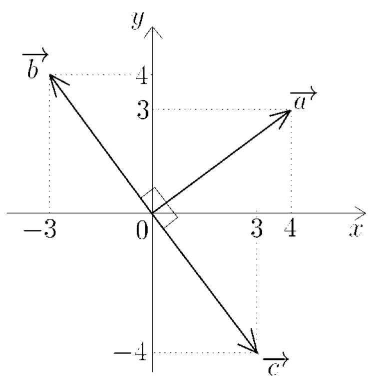
(3) $\overrightarrow{a} = (1\,,\ 0),\quad \overrightarrow{b} = (0\,,\ 1),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

例 2 $\overrightarrow{a} = (4\,,\ 3), \overrightarrow{b} = (-3\,,\ 4), \overrightarrow{c} = (3\,,\ -4)$ のとき

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 4\times(-3) + 3\times 4 = 0$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 4\times 3 + 3\times(-4) = 0$$

より $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ である。



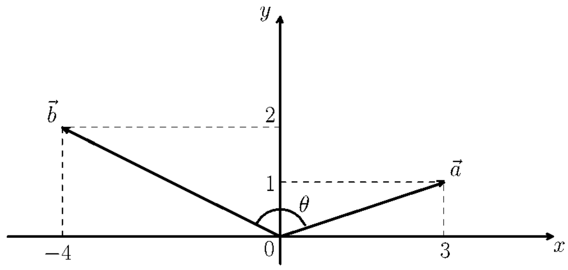
問 2 $\overrightarrow{a} = (-1\,,\ 1)$ と垂直なベクトルの例を２つあげよ。

＜平面ベクトルのなす角＞

例 $\overrightarrow{a} = (3\,,\ 1)$ と，$\overrightarrow{b} = (-4\,,\ 2)$ のなす角 θ を求めたい。

内積の定義から

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$



より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2 + 1^2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = 135^\circ$ である。

問 1 $\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2)$，$\overrightarrow{b} = (b_1\,,\ b_2)$ のなす角 θ を求めたい。
上の例にならって，$\cos\theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$\cos\theta =$

問 2 以下の場合に，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

(1) $|\overrightarrow{a}| = 1$，$|\overrightarrow{b}| = 2$，$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{a} = (-2\,,\ 1)$，$\overrightarrow{b} = (3\,,\ 1)$

(3) $\overrightarrow{a} = \left(\sqrt{3}\,,\ 3\right)$，$\overrightarrow{b} = \left(\sqrt{3}\,,\ 1\right)$

＜まとめの問題＞

問1　△ABC が次の各場合に , (　) 内の値を求めよ。

(1) $a=\sqrt{6}$,　$B=45^\circ$,　$C=75^\circ$, (b)

(2) $a=5$,　$b=4$,　$C=120^\circ$, (c)

(3) $a=\sqrt{7}$,　$b=1$,　$c=\sqrt{3}$, (A)

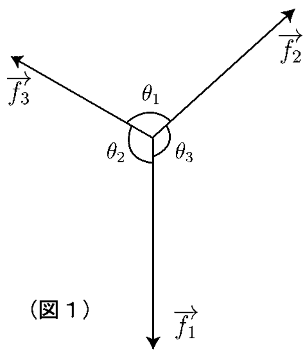
問2　次の三角方程式をみたす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1) $\sin\theta=\frac{1}{2}$　　($-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$)

(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　($0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$)

(3) $\tan\theta=\sqrt{3}$　　($-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$)

問3



（図１）

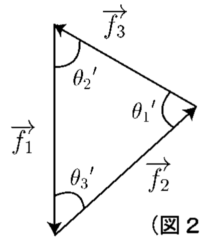
図1のように1点に力 $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$ が働いてつり合っているとき

$$\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3}=\overrightarrow{0}$$

である。図1の θ_1 , θ_2 , θ_3 に対し

$$\frac{|\overrightarrow{f_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\overrightarrow{f_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\overrightarrow{f_3}|}{\sin\theta_3}$$

が成りたつことを示せ。　(ヒント・・・図2)



（図２）

問4　座標平面の2点 A(3 , 1) , B(−2 , 1) に対し， 次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$　　　　　　　　　　, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=$

(2) 原点 O (0 , 0) と2点 A , B に対し $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 C の座標を求めよ。

C (　　,　　)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを求めよ。

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=$　　　　　　　　　　, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めよ。