Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

初級編　No. 4

（2003年度版）

内容

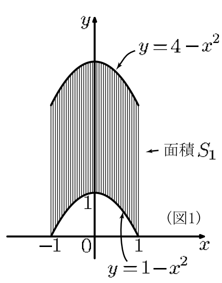
◎　区分求積法

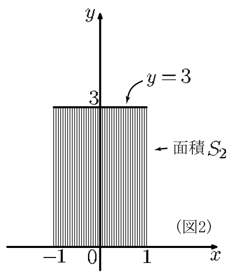
◎　微分積分学の基本定理

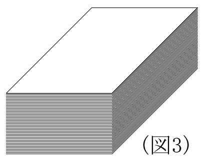
◎　定積分

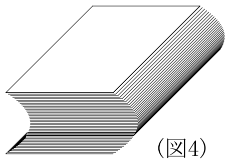
◎　和の極限と定積分

◎　面積・体積・道のり









井上 昌昭　著

< 数列の類推 >

例題 2 つの数列

$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $b_n = n \times (n+1)$

に対し，共に第 5 項まで求め，a_n を類推せよ

(解) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$

$b_1 = 2$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 20$, $b_5 = 30$

より $a_n = \dfrac{1}{2} b_n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$ と類推される。

問 1 2 つの数列

$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, $b_n = \dfrac{6}{n \times (2n+1)} a_n$

に対し，共に第 5 項まで求め，b_n の一般項を類推せよ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

問 2 2 つの数列

$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

に対し，共に第 5 項まで求め，b_n を a_n で表せ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

$<$ 和の記号 $\sum$ 1 $>$

数列の和を表すのに，記号 $\sum$ を使って次のように表す。

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ここで a_k は数列の第 k 項を表し，$\sum_{k=1}^{n}$ は k が $1, 2, 3, \cdots, n$ とかわるときの a_k をすべて加えることを意味する記号である。$\sum$ は，(アルファベットの) S に相当するギリシャ文字で,「シグマ」と読む。

例 1 (1) $\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

(2) $\sum_{k=1}^{6} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

問 1 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。(和は計算しなくてよい)

(1) $\sum_{k=1}^{7} k$

(2) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$

(3) $\sum_{k=1}^{6} k^2$

(4) $\sum_{k=1}^{4} (3k - 1)$

例 2 (1) $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2 = \sum_{k=1}^{50} (2k - 1)^2$

問 2 次の和を $\sum$ を使って表せ。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$

(2) $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) =$

(3) $5 + 10 + 15 + \cdots + 100 =$

例 3 (1) $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$

(2) $\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

(3) $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1}$

問 3 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。(和は計算しなくてよい)

(1) $\sum_{k=3}^{7} (k^2 - 8)$

(2) $\sum_{k=4}^{8} (2k - 1)(2k + 1)$

(3) $\sum_{k=0}^{5} 4^k$

< 和の記号 $\sum$ 2 >

記号 $\sum$ の定義から次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\\ \sum_{k=1}^{n}ca_k&=c\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (c\text{は定数})\end{aligned}}$$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{個の和}}=n$ と 1 ページの例題より

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}1=n} \quad , \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

が成り立つ。

例 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}+3\times n=2n^2+5n$

問 1 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(8k-5)=$

例 2 $1+5+9+13+\cdots+(4k-3)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times n=2n^2-n$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$

(2) $2+7+12+17+\cdots+(5n-3)=$

(3) $3+10+17+24+\cdots+(7n-4)=$

< 和の記号 $\sum$ 3 >

1ページ問1の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

問1　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例1　(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

問2　次の和を求めよ。

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

例2　$\sum_{k=1}^{n}(3+4k+6k^2)=3\sum_{k=1}^{n}1+4\sum_{k=1}^{n}k+6\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=3n+4\times\frac{n(n+1)}{2}+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=3n+2n(n+1)+n(n+1)(2n+1)$$

問3　次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(5-2k+12k^2)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}(3+2k)^2$

＜和の記号 $\sum$ 4＞

1 ページ問 2 の結果より

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

が成り立つ。

問 1 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 1 (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2=55^2=3025$$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3$

$$=\left\{\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=$

例 2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+k)^3=\sum_{k=1}^{n}(1+3k+3k^2+k^3)$

$$=\sum_{k=1}^{n}1+3\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=n+\frac{3}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

問 3 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-k)^3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+k)^3$

＜ 極限 ＞

自然数 n が限りなく大きくなることを $n \to \infty$ という記号で表す。
また，数列 $\{a_n\}$ に対し，ある実数 α が存在して，n が限りなく大きくなるとき a_n は限りなく α に近づくとき

$$\boxed{n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha}$$

または

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha}$$

と書く。

例 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(2) ① $a > 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

② $a = 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

③ $-1 < a < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{0}{2-0} = 0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1}\right) = 2$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n+4}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-5}{3n^2-2n+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)(n+2)}{(n-1)(n+1)}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$

< 和の極限値 >

例題 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{n}$$

(解)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=1+1+\frac{2}{6}=\frac{7}{3}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

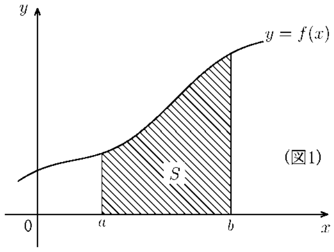
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(2+\frac{n}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{n}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^3\right\}\frac{1}{n}$

< 区分求積法 1 >

曲線で囲まれた領域の面積を求める方法の 1 つとして以下で述べる区分求積法を紹介する。関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲で正 $(f(x) > 0)$ でかつ増加関数とする。図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。



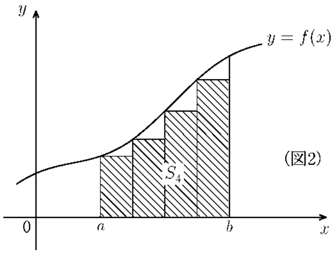
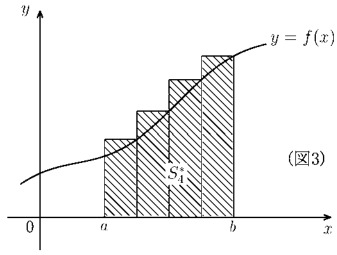


図 2 と図 3 は a から b までを 4 等分して階段状の領域 (斜線部分) の面積を S_4 と S_4^* とする。図より

$$S_4 < S < S_4^*$$

である。



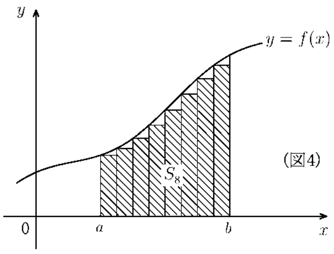
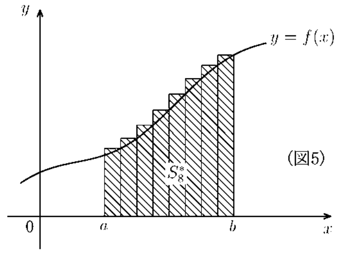


図 4 と図 5 は a から b までを 8 等分し，斜線部分の面積を S_8 と S_8^* とする。図より

$$S_4 < S_8 < S < S_8^* < S_4^*$$

である。



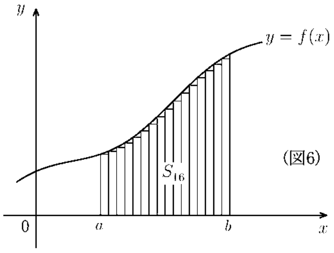
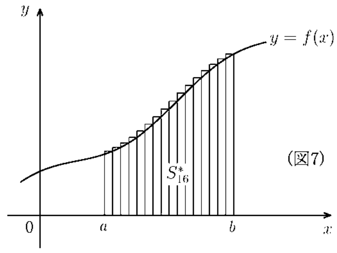


図 6 と図 7 は a から b までを 16 等分し，階段状の領域の面積を S_{16} と S_{16}^* とする。図より

$$S_8 < S_{16} < S < S_{16}^* < S_8^*$$

である。



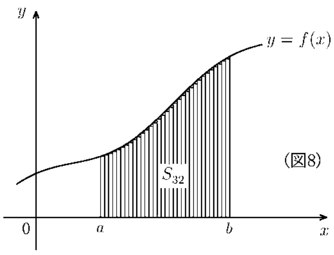
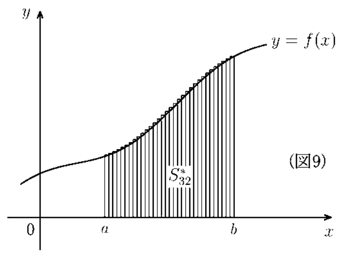


図 8 と図 9 は a から b までを 32 等分し，階段状の領域の面積を S_{32} と S_{32}^* とする。図より

$$S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^*$$

である。



以上より $S_4 < S_8 < S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^* < S_8^* < S_4^*$ である。面積 S に最も近いのが S_{32} と S_{32}^* である。等分を細かくしていくほど S に近い値がわかる。そこで a から b までを n 等分し，階段状の領域を作り，その面積を S_n と S_n^* とおくと

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots < S < \cdots < S_n^* < \cdots < S_2^* < S_1^*$$

となり極限をとると

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。この両方の極限が一致する時面積 S が求まる。この方法を**区分求積法**という。

＜区分求積法 2＞

例　曲線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた領域の面積 S(図 1) を求めたい。前ページの区分求積法を適用する。0 から 1 までを n 等分し，分割した分点を

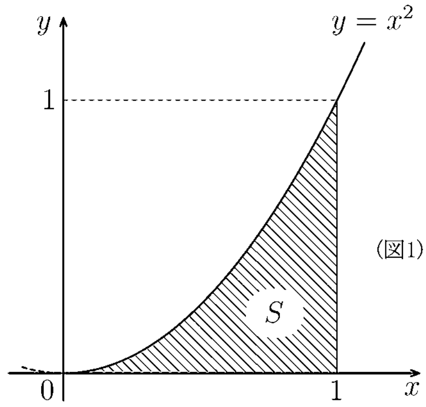
$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

とする。分割した小区間の幅を Δx とおくと

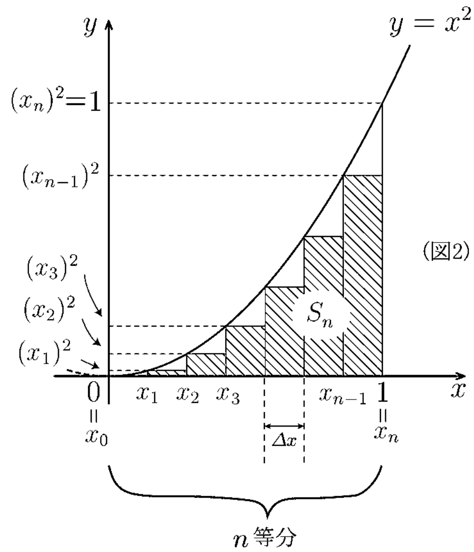
$$x_1=\Delta x\ ,\ x_2=2\Delta x,\cdots\ ,\ x_n=n\Delta x,\quad \Delta x=\frac{1}{n}$$

となる。図 2 の斜線部分の面積を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=(x_1)^2\Delta x+(x_2)^2\Delta x+\cdots+(x_{n-1})^2\Delta x\\&=\Delta x^2\Delta x+(2\Delta x)^2\Delta x+\cdots+\big((n-1)\Delta x\big)^2\Delta x\\&=\left\{1+2^2+\cdots+(n-1)^2\right\}(\Delta x)^3=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}(\Delta x)^3\end{aligned}$$



(図1)



(図2)

4 ページより

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\boxed{}$$

で，$\Delta x=\dfrac{1}{n}$ であるから

$$S_n=\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{6}\Big(1-\square\Big)\Big(2-\square\Big)$$

問 1　上の $\square$ の中に適当な文字式を入れよ。

問 2　次の値を求めよ。

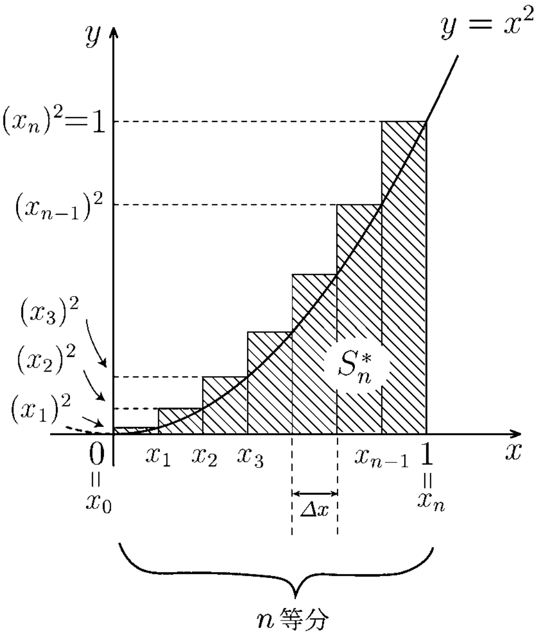
$S_1=$　　　　　　　，$S_2=$　　　　　　　，$S_3=$

問 3　S_n の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=$

< 区分求積法 3 >

問 前ページの図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。以下の問に答えよ。



(1) 右図の斜線部分の面積を S_n^* とする。S_n^* を n 等分点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と小区間の幅 Δx で表せ。

$S_n^* =$

(2) $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \cdots, x_n = n\Delta x$ であることを用いて，S_n^* を書き直し，記号 $\sum$ で表せ。

$S_n^* =$

$= \left(\sum \qquad\qquad\qquad \right) \times (\Delta x)^3$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式 (4 ページ) と $\Delta x = \frac{1}{n}$ を用いて，S_n^* を n の式で表せ。

$S_n^* =$

(4) 次の値を求めよ。

$S_1^* =$ ，$S_2^* =$ ，$S_3^* =$

(5) S_n^* の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

(6) 前ページ図 2 の S_n に対し $S_n < S < S_n^*$ であるから

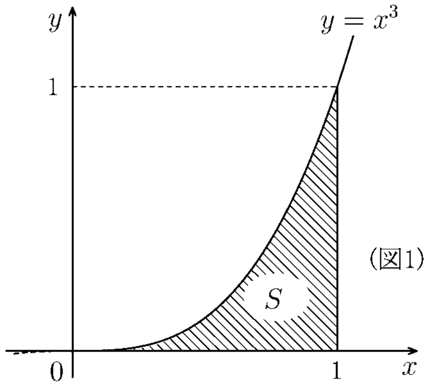
$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。前ページの問 3 と上の (5) の結果を用いて S の値を求めよ。

$S =$

< 区分求積法 4 >

図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。以下の問に答えよ。



(図1)

問 1 0 から 1 を n 等分，分点を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ とする。分割した小区間の幅を Δx とすると図 2 の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n = (x_1)^3\Delta x + (x_2)^3\Delta x + \cdots + (x_{n-1})^3\Delta x$$

である。

(1) $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \cdots, x_{n-1} = (n-1)\Delta x$ を代入して S_n を n と Δx の式で表し，$\sum$ を用いて書き直せ。

$S_n =$

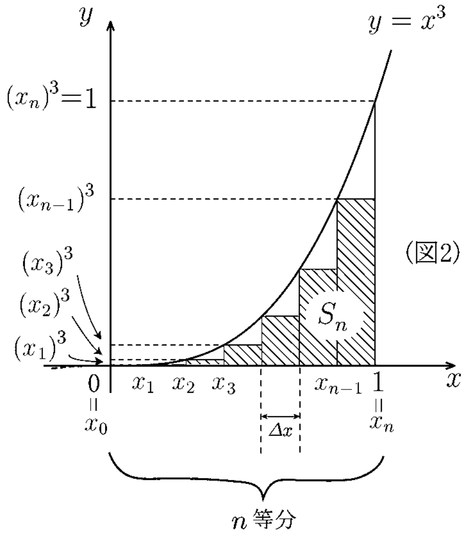
$$= \left\{ \sum \qquad\qquad \right\} (\Delta x)^4$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2$ と $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ を代入して S_n を n だけの式にせよ。

$S_n =$

(3) S_n の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n =$



(図2)

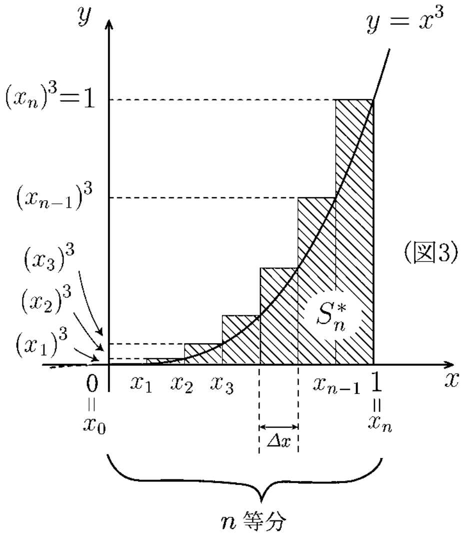
問 2 図 3 の斜線部分の面積を S_n^* とすると

$$S_n^* = (x_1)^3\Delta x + (x_2)^3\Delta x + \cdots + (x_n)^3\Delta x$$

である。S_n^* を n だけの式で表し，その極限値を求めよ。

$S_n^* =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^* =$



(図3)

問 3 図 1 の斜線部分の面積 S に対し，図 2 と図 3 より $S_n < S < S_n^*$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。S の値を求めよ。

$S =$

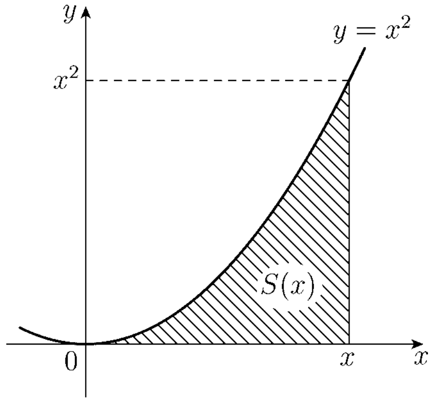
＜ 区分求積法 5 ＞

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。

問 1 0 から x までを n 等分し，分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を $\Delta x = \frac{x}{n}$ とする。



(図 1)

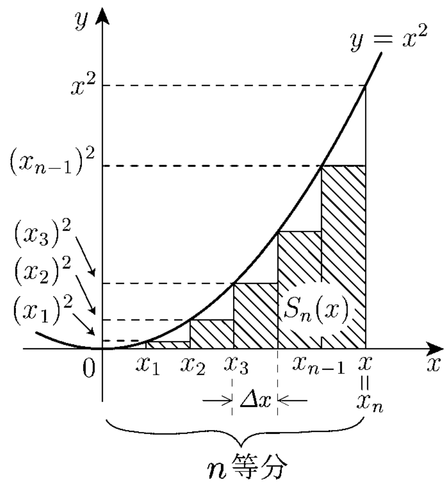
(1) 図 2 の斜線部分の面積 $S_n(x)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ と Δx で表せ。

$S_n(x) =$

(2) $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \cdots, x_{n-1} = (n-1)\Delta x$ を代入して $S_n(x)$ を n と Δx の式で表し，$\sum$ を用いて書き直せ。

$S_n(x) =$

$$= \left\{ \sum \qquad\qquad \right\} (\Delta x)^3$$



(図 2)

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ の公式と $\Delta x = \dfrac{x}{n}$ を用いて，$S_n(x)$ を n と x だけの式にせよ。

$S_n(x) =$

(4) $S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) =$

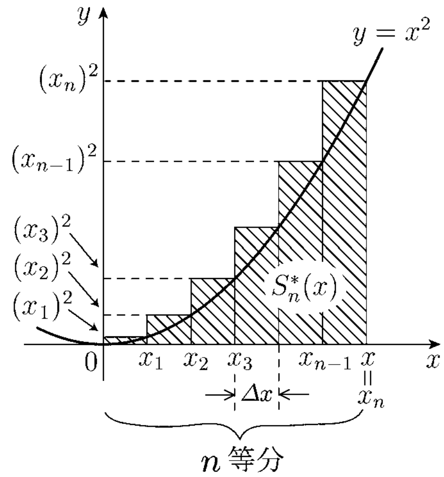
問 2 図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。

(1) $S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x) =$

(2) $S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) =$



(図 3)

問 3 図より $S_n(x) < S(x) < S_n^*(x)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \leqq S(x) \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

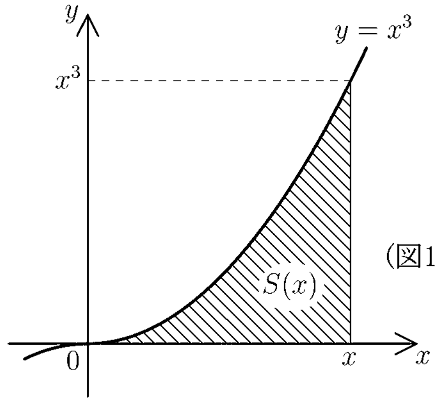
< 区分求積法 6 >

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。

問1 0 から x までを n 等分し，分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を $\Delta x = \frac{x}{n}$ とする。



(図1)

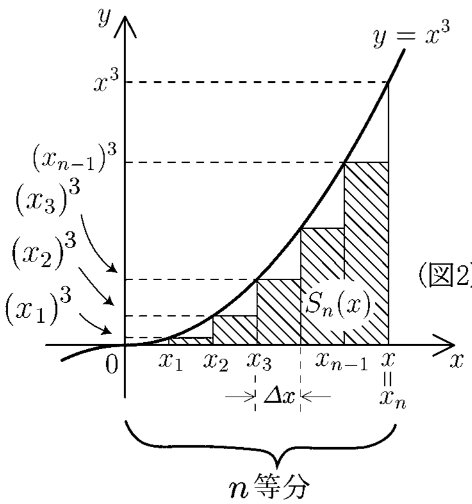
(1) 図 2 の斜線部分の面積 $S_n(x)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ と Δx で表せ。

$S_n(x) =$

(2) $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \cdots, x_{n-1} = (n-1)\Delta x$ を代入して $S_n(x)$ を n と Δx の式で表し，$\sum$ を用いて書き直せ。

$S_n(x) =$

$$= \left\{ \sum \qquad\qquad \right\} (\Delta x)^4$$



(図2)

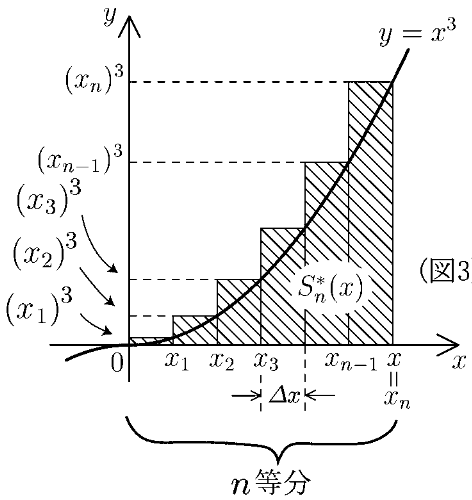
(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3$ の公式と $\Delta x = \dfrac{x}{n}$ を用いて，$S_n(x)$ を n と x だけの式にせよ。

$S_n(x) =$

(4) $S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) =$

問2 図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。



(図3)

(1) $S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x) =$

(2) $S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) =$

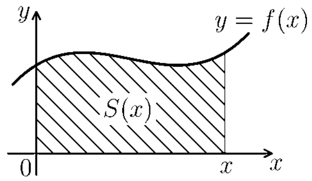
問3 図より $S_n(x) < S(x) < S_n^*(x)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \leqq S(x) \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

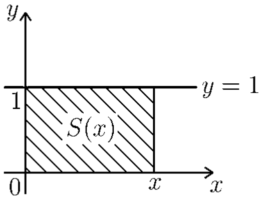
< 面積関数 1 >



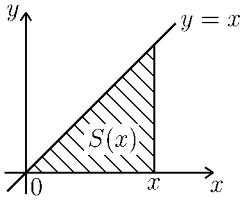
正の値をとる関数 $f(x)$ に対し，右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

問 1 下図を参考にして，次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 1$ のとき $S(x) =$

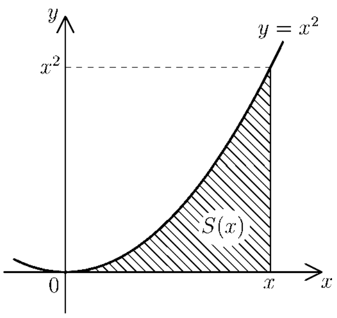


(2) $f(x) = x$ のとき $S(x) =$

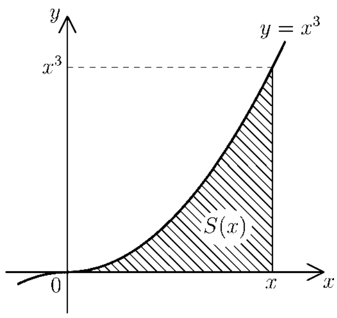


問 2 下図と 12，13 ページの結果を参考にして，次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2$ のとき $S(x) =$



(2) $f(x) = x^3$ のとき $S(x) =$



問 3 上記の結果を参考にして，次の場合の $S(x)$ を類推せよ。

(1) $f(x) = x^4$ のとき $S(x) =$

(2) $f(x) = x^n$ のとき $S(x) =$

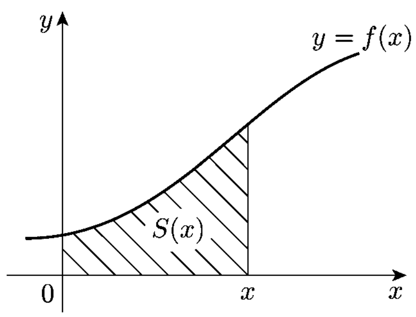
問 4 上の結果から考えて，一般の正の関数 $f(x)$ に関する面積関数を $S(x)$ とするとき，$f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか類推せよ。

＜ 面積関数 2 ＞

　正の値をとる関数 $f(x)$ に対し，右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

$$(*) \quad \boxed{S'(x) = f(x)}$$

が成り立つ。



(図 1)

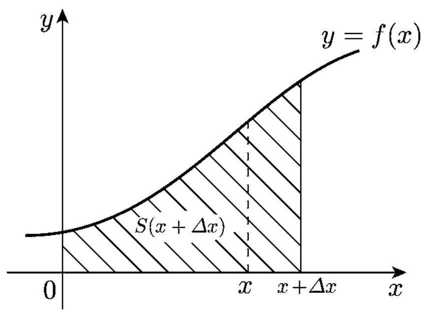
[証明のアイデア]

関数 $f(x)$ が**単調増加**すなわち

$$\boxed{x_1 < x_2 \text{ のとき } f(x_1) < f(x_2)}$$

であるとき $(*)$ を証明する。
導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$



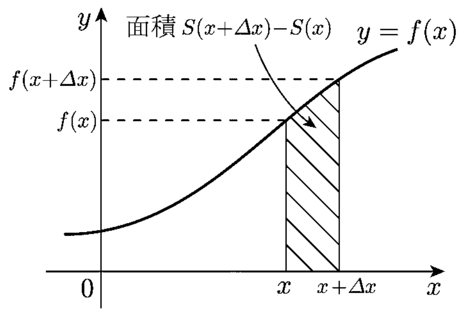
(図 2)

である。ここで $S(x+\Delta x) - S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積を意味する。図 4 の 2 つの長方形の面積と比べると

$$f(x) \times \Delta x \leqq S(x+\Delta x) - S(x) \leqq f(x+\Delta x) \times \Delta x$$

であるから

$$f(x) \leqq \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \leqq f(x+\Delta x)$$



(図 3)

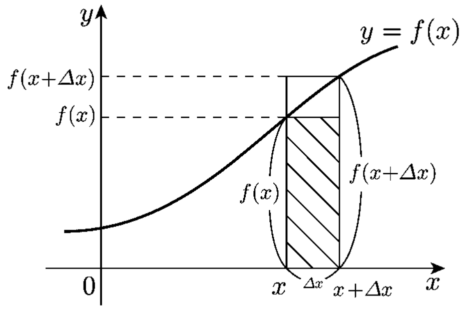
となる。ここで $\Delta x \to 0$ の極限値を考えると

$$f(x) \leqq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \leqq \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

であるから

$$f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$$

となって $(*)$ が成立する。

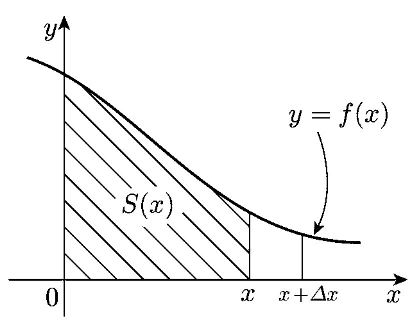


(図 4)

問　$f(x)$ が**単調減少**すなわち

$$\boxed{x_1 < x_2 \text{ のとき } f(x_1) > f(x_2)}$$

　であるとき (図 5),「$S'(x) = f(x)$」を証明せよ。



(図 5)

< 定積分の定義 >

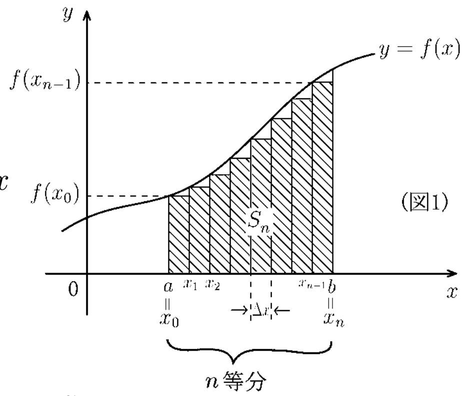
定数 a, b $(a < b)$ に対し，区間 $[a,\ b] = \{x : a \leqq x \leqq b\}$ で有限な値をとる関数 $f(x)$ の定積分を以下で定義する。任意の自然数 n に対し

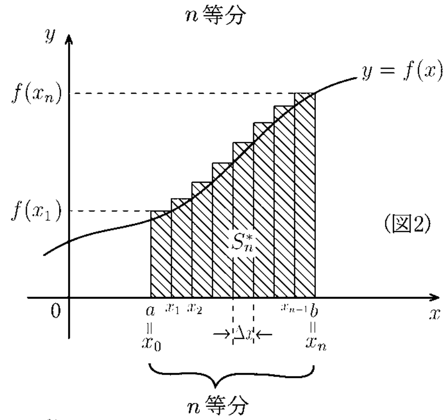
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \big\{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big\}\Delta x$$

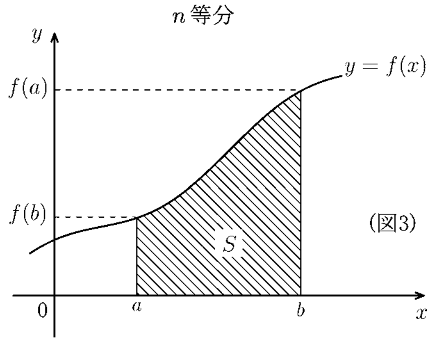
$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \big\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big\}\Delta x$$

とおく。ただし $x_0, \cdots, x_n$ は $[a,\ b]$ を n 等分した分点であり，Δx は小区間の幅である。すなわち

$$x_k = a + k\Delta x\ (k = 0, 1 \cdots, n), \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$







[**定理 1**]　f が連続な関数ならば，次の極限値

$$\lim_{n\to\infty} S_n\ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

が両方とも存在する。
(証明略)

[**定理 2**] $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^*}$

[証明] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_n^* - S_n) = \lim_{n\to\infty}\big\{f(x_n) - f(x_0)\big\}\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}\big\{f(b) - f(a)\big\}\frac{b-a}{n} = 0 \quad \text{(証明終)}$$

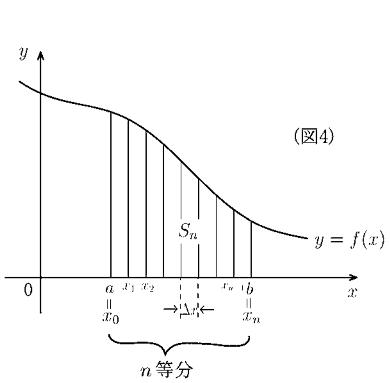
< **定積分の定義** >　定理 2 の極限値を

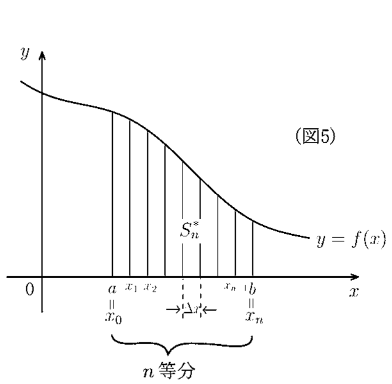
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}$$

と書き，$f(x)$ の a から b までの**定積分**という。

(注) $f(x)$ が正 $(f(x) > 0)$ で増加関数のとき，S_n と S_n^* は図 1 と図 2 の斜線部分の面積を表す。図 3 の斜線部分の面積を S とすると $S_n \leqq S \leqq S_n^*$ である。従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$ である。定理 2 から両方の極限値が等しいので $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = S$ となる。

問　$f(x)$ が減少関数のとき，S_n と S_n^* はどの領域の面積を表すか?図 4 と図 5 にその領域を作図せよ。





< 和の極限の定積分表示 1 >

例題 定積分の定義式

$$(*)\quad \int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = a + k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \end{pmatrix}$$

を利用して次の和の極限値を定積分で表せ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left\{\left(4+\frac{3}{n}\right)^5+\left(4+\frac{6}{n}\right)^5+\cdots+\left(4+\frac{3n}{n}\right)^5\right\}\frac{3}{n}$

(解) (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = 1 + k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$

と書けるので定積分の定義式と比べると

$$f(x_k) = x_k^2 \quad\Rightarrow\quad f(x) = x^2$$
$$x_k = 1 + k\Delta x \quad\Rightarrow\quad a = 1$$
$$\Delta x = \frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad b - a = 1 \quad\Rightarrow\quad b = 2$$

より (答) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} \;=\; \int_1^2 x^2 dx$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{3}{n}k\right)^5\frac{3}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^5\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = 4 + k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{3}{n} \end{pmatrix}$

と書けるので定積分の定義式と比べると

$$f(x_k) = x_k^5 \quad\Rightarrow\quad f(x) = x^5$$
$$x_k = 4 + k\Delta x \quad\Rightarrow\quad a = 4$$
$$\Delta x = \frac{3}{n} \quad\Rightarrow\quad b - a = 3 \quad\Rightarrow\quad b = 7$$

より (答) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{3}{n}k\right)^5\frac{3}{n} \;=\; \int_4^7 x^5 dx$

問 次の和の極限値を定積分で表せ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2}{n}k\right)^4\frac{2}{n}$

＜ 和の極限の定積分表示 2 ＞

例題 次の極限を定積分で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}\frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{6}{n}}+\cdots+\sqrt{4+\frac{3n}{n}}\right\}\frac{3}{n}$

(解) (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x_k)^2}\right)\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = 1+k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{1}{n}\end{pmatrix}$

と定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = a+k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n}\end{pmatrix}$$

と比較すると

$$f(x_k) = \frac{1}{(x_k)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$x_k = 1+k\Delta x \Rightarrow a = 1$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} \Rightarrow b-a = 1 \Rightarrow b = 2$$

より (答) $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n} = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\frac{3k}{n}}\right)\times\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k = 4+k\Delta x \\ \Delta x = \dfrac{3}{n}\end{pmatrix}$

と書けるので定積分の定義式と比べると

$$f(x_k) = \sqrt{x_k} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

$$x_k = 4+k\Delta x \Rightarrow a = 4$$

$$\Delta x = \frac{3}{n} \Rightarrow b-a = 3 \Rightarrow b = 7$$

より (答) $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\frac{3k}{n}}\times\frac{3}{n} = \int_4^7 \sqrt{x}dx}$

問 次の極限を定積分で表せ。

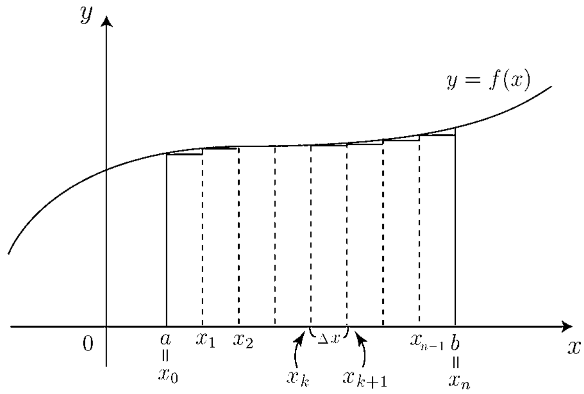
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(4+\frac{2k}{n}\right)^5}\right)\frac{2}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}\right)\frac{3}{n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{2+\frac{4k}{n}}\right)\frac{4}{n}$

＜微分積分学の基本定理＞



＜微分積分学の基本定理＞

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

［証明のアイデア］

定積分の定義より

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \qquad \left(\begin{array}{l} x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \end{array} \right)$$

である。この右辺が $F(b) - F(a)$ になることを近似的に示す。

導関数の定義

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

より Δx が十分小さければ $f(x)$ は

$$f(x) = F'(x) \fallingdotseq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

で近似できる。従って

$$f(x_k)\Delta x \fallingdotseq F(x_k + \Delta x) - F(x_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k)$$

より

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \fallingdotseq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \{\, F(x_{k+1}) - F(x_k) \,\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\quad \{\, F(x_1) - F(x_0) \,\} \\
&\qquad + \{\, F(x_2) - F(x_1) \,\} \\
&\qquad + \\
&\qquad\ \vdots \\
&\qquad + \{\, F(x_n) - F(x_{n-1}) \,\} \quad \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\, F(x_n) - F(x_0) \,\Big] = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

(注) この定理の厳密な証明は省略する。

< 定積分 1 >

前ページより　$F'(x) = f(x)$　のとき　$\displaystyle\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ であった。ここで $F(b) - F(a) = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b$　と書くことにすると

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)}$　(定積分)

である。

例 1　$\displaystyle\int_1^4 x^2dx = \Big[\ \frac{1}{3}x^3\ \Big]_1^4 = \frac{1}{3} \times 4^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = 21$

例 2　$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big[\ 2\sqrt{x}\ \Big]_a^b = \ 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}$

問　次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_a^b x^ndx =$

(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx =$

(3) $\displaystyle\int_a^b dx = \int_a^b 1dx =$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^xdx =$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos xdx =$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin xdx =$

(7) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}dx =$

(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} =$

(9) $\displaystyle\int_4^{10} dx =$

(10) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx =$

(11) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx =$

(12) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$

(13) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx =$

(14) $\displaystyle\int_0^2 e^xdx =$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx =$

(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin xdx =$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

< 定積分 2 >

微分積分学の基本定理

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

より , 定積分について次の性質が成り立つ。

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k \text{ は定数})$
2. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
4. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
5. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

例 (1) $$\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2 \frac{1}{x}dx - 4\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$$
$$= 3\Big[\ \log x\ \Big]_1^2 - 4\Big[\ -\frac{1}{x}\ \Big]_1^2 = 3\log 2 - 2$$

(2) $$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \Big[\ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\ \Big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

問 つぎの定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx$

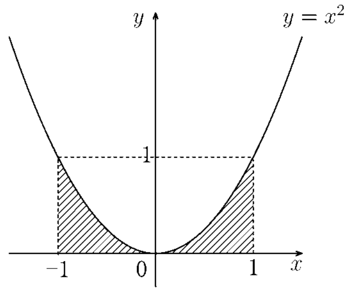
(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3+x^4)dx + \int_0^1 (x^3+x^4)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(4x)dx$

＜定積分 3＞



例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times(-1)^3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(注) 定積分の幾何学的意味より、$\int_{-1}^{1} x^2dx$ は右図斜線部分の面積を表す。$y=x^2$ は y 軸対象だから左右の面積が等しいので

$$\int_{-1}^{0} x^2dx = \int_{0}^{1} x^2dx$$

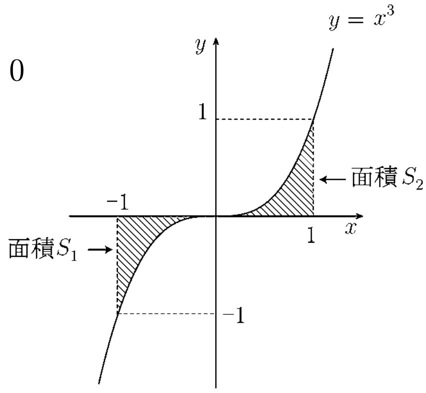
となるから

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = 2\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

一般に $f(x)=x^{2n}$ (n は自然数) のときは $f(-x)=f(x)$ (y 軸対称) になる。このような関数 $f(x)$ を**遇関数**といい、

$$\boxed{\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx} \quad (n\text{ は自然数})$$

がなりたつ。



例 2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\times 1^4 - \frac{1}{4}\times(-1)^4 = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$

(注) 右図斜線部分の面積を S_1 と S_2 とおくと

$$\int_{-1}^{0} x^3dx = -S_1, \quad \int_{0}^{1} x^3dx = S_2$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = \int_{-1}^{0} x^3dx + \int_{0}^{1} x^3dx = -S_1 + S_2$$

となる。一方 $y=x^3$ は原点対称だから $S_1=S_2$ より

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

一般に $f(x)=x^{2n-1}$ (n は自然数) のときは $f(-x)=-f(x)$ (原点対称) になる。このような関数 $f(x)$ を**奇関数**といい

$$\boxed{\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx = 0} \quad (n\text{ は自然数})$$

がなりたつ。

例 3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+x^4)d = \int_{-1}^{1} x^3dx + \int_{-1}^{1} x^4dx = 2\int_{0}^{1} x^4dx = 2\times\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

問 次の定積分を求める。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+x^4+x^5)dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^3+x^6)dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx =$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x\right)dx =$

＜ 定積分の積分変数 ＞

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変っても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta d\theta = \Big[4\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 9.8t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u} du$

< 定積分の置換積分法 1 >

例題 定積分 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ の値を求めよ。

(解) まず不定積分 $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ を求める。

$$u = x^3+1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{3x^2}du$$

より

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int 3x^2\sqrt{x^3+1}\frac{1}{3x^2}du = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

となるから

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1^3+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2\times 27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

(別解) $u = x^3+1$ とおくと x と u との対応は

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \Longrightarrow & 2 \\ \hline u & 1 & \Longrightarrow & 9 \end{array}$$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_{u=1}^{u=9}\sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

別解の方法を**定積分の置換積分法**という。

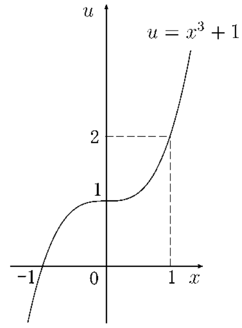
問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2(x^3+1)^4dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 2x\sqrt{x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}dx$

＜定積分の置換積分法 2＞



例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1}dx$ を求めたい。

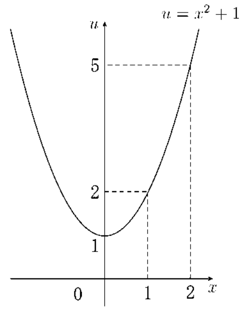
$$u = x^3+1 \text{ とおくと } \frac{du}{dx} = 3x^2 \implies dx = \frac{1}{3x^2}du$$

であり x と u との対応は

x	$-1 \implies 1$
u	$0 \implies 2$

となる。よって

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1}dx = \int_{x=-1}^{x=1} x^2 e^{x^3+1}\frac{1}{3x^2}du = \int_{u=0}^{u=2}\frac{1}{3}e^u du = \left[\frac{1}{3}e^u\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}$$



例 2 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx$ を求めたい。

$$u = x^2+1 \text{ とおくと } \frac{du}{dx} = 2x \implies dx = \frac{1}{2x}du$$

であり x と u との対応は

x	$0 \implies 2$
u	$1 \implies 5$

となる。よって

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_{x=0}^{x=2}\frac{x}{x^2+1}\times\frac{1}{2x}du = \int_{u=1}^{u=5}\frac{1}{2}\times\frac{1}{u}du = \left[\frac{1}{2}\log|u|\right]_{u=1}^{u=5}$$

$$= \frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}\log 5$$

問 次の定積分を求めよ。

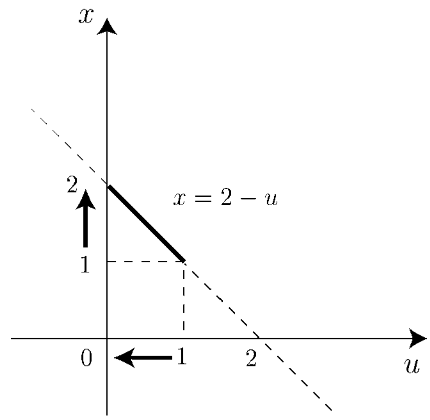
(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+2)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^3 xe^{x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^3+2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

＜ 定積分の置換積分法 3 ＞



例題 $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4 dx$ 　を求めよ

(解) 　$u = 2 - x$ 　とおくと 　$x = 2 - u$

$\dfrac{dx}{du} = -1$ より 　$dx = -du = (-1)du$

x と u との対応は右のようになる。

x	$1 \to 2$
u	$1 \to 0$

したがって

$$\int_1^2 x(2-x)^4 dx = \int_1^0 (2-u)u^4(-1)du = \int_1^0 (u^5 - 2u^4)du$$

$$= \left[\ \frac{u^6}{6} - \frac{2}{5}u^5\ \right]_1^0 = 0 - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{30}$$

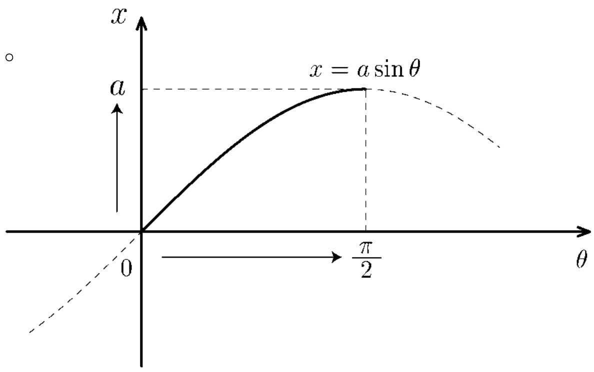
問 　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^7 dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

< 定積分の置換積分法 4 >

例題 $a>0$ のとき $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。



(解) $x = a\sin\theta$ とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta \quad\Rightarrow\quad dx = a\cos\theta\,d\theta$$

となる。x と θ の対応は

x	0	$\to$	a
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

となる。また $a>0$ ， $\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

したがって

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)a\cos\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = a^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

< 定積分の部分積分法 1 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)^2dx \;=\; \int_2^4 (x-2)\times\left\{\frac{(x-4)^3}{3}\right\}' dx$

$$= \left[(x-2)\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4 \;-\; \int_2^4 (x-2)'\times\frac{(x-4)^3}{3}\;dx$$

$$= (0-0) \;-\; \frac{1}{3}\int_2^4 (x-4)^3\;dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(x-4)^4}{4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(0-\frac{(-2)^4}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\;dx \;=\; \int_0^\pi x\times(\sin x)'\;dx$

$$= \Big[x\sin x\Big]_0^\pi \;-\; \int_0^\pi (x)'\times\sin x\;dx$$

$$= (\pi\sin\pi - 0) \;-\; \int_0^\pi \sin x\;dx$$

$$= -\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\Big\{-\cos\pi - (-\cos 0)\Big\} = -2$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)^3dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

< 定積分の部分積分法 2 >

例 1 $\displaystyle \int_1^e \log x dx = \int_1^e (\log x) \times (x') dx = \Big[x \log x \Big]_1^e - \int_1^e (\log x)' \times x dx$

$\displaystyle = e - \int_1^e 1 dx = e - (e-1) = 1$

例 2 $\displaystyle \int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 \times (e^x)' dx = \Big[x^2 e^x \Big]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' e^x dx$

$\displaystyle = (e-0) - \int_0^1 2xe^x dx = e - \left\{ \Big[2xe^x \Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right\}$

$\displaystyle = e - (2e - 0) + \Big[2e^x \Big]_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \log x dx$

(2) $\displaystyle \int_1^{\sqrt{e}} x^3 \log x dx$

(3) $\displaystyle \int_0^1 x^2 e^{x+1} dx$

(4) $\displaystyle \int_0^1 x^3 e^x dx$

< 定積分の部分積分法 3 >

例題 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ を求めよ。

(解) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \times (-\cos x)' dx = \Big[\, x^2 \times (-\cos x) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2)' \times (-\cos x) dx$$

$$= (0-0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x (\sin x)' dx$$

$$= \Big[\, 2x \sin x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)' \sin x dx$$

$$= (\pi - 0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx \ = \ \pi + \Big[\, 2\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + 0 - 2 \ = \ \pi - 2$$

(答) $\underline{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2}$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x) dx$

< 定積分の練習 1 >

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (3\sin x - 4\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2-4x+1}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{3x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$

(10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x \cos x dx$

(11) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(12) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x)dx$

(13) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{3x-1}dx$

(14) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$

＜定積分の練習 2 ＞

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^5}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^4}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 x(x+1)^4dx$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\sin x dx$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 \log x dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2e^x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$

＜ 和の極限と定積分 1 ＞

例題 定積分の定義式を用いて次の和の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2$$

(解) $\Delta x=\dfrac{3}{n},\ x_k=-1+\dfrac{3k}{n}=-1+k\Delta x$ とおくと, 求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2\Delta x$$

と表される。ここで定積分の定義式

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \ = \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \qquad \begin{pmatrix} x_k=a+k\Delta x \\ \Delta x=\dfrac{b-a}{n}\end{pmatrix}}$$

と比較すると

$$\begin{aligned} f(x_k)&=x_k^2 && \Rightarrow\ f(x)=x^2 \\ x_k&=-1+k\Delta x && \Rightarrow\ a=-1 \\ \Delta x&=\frac{3}{n} && \Rightarrow\ b-a=3\ \Rightarrow\ b=2 \end{aligned}$$

より求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2=\int_{-1}^{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$$

問 定積分の定義式を用いて次の和の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\frac{5k}{n}}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$

< 和の極限と定積分 2 >

例題 定積分の定義式を利用して次の和の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(2\pi+\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$$

(解) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(2\pi+k\times\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k)\Delta x \qquad \left(\begin{array}{c} x_k=2\pi+k\Delta x \\ \Delta x=\dfrac{\pi}{n}\end{array}\right)$

定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \qquad \left(\begin{array}{c} x_k=a+k\Delta x \\ \Delta x=\dfrac{b-a}{n}\end{array}\right)$$

と比較すると

$$f(x_k)=\sin(x_k) \quad\Rightarrow\quad f(x)=\sin x$$

$$x_k=2\pi+k\Delta x \quad\Rightarrow\quad a=2\pi$$

$$\Delta x=\frac{\pi}{n} \quad\Rightarrow\quad b-a=\pi \quad\Rightarrow\quad b=3\pi$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(2\pi+\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$$

$$=\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{2\pi}^{3\pi}=-\cos(3\pi)+\cos(2\pi)=2$$

問 定積分の定義式を利用して次の和の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{6}{n}}+\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{3n}{n}}\right\}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\frac{10}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\frac{15}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5n}{n}}}\right\}$

< 和の極限と定積分 3 >

問　定積分の定義式を利用して，次の和の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(-1+\frac{2}{n}\right)^4+\left(-1+\frac{4}{n}\right)^4+\left(-1+\frac{6}{n}\right)^4+\cdots+\left(-1+\frac{2n}{n}\right)^4\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{9}{n}\right)^3}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{3n}{n}\right)^3}\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(4+\frac{1}{n}\right)+\left(4+\frac{2}{n}\right)+\left(4+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\left(4+\frac{n}{n}\right)\right\}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left\{\sqrt{\frac{4}{n}}+\sqrt{\frac{8}{n}}+\sqrt{\frac{12}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n}{n}}\right\}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$

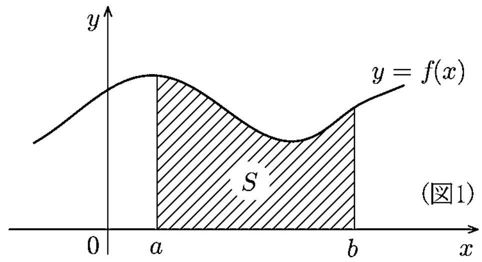
(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{\frac{3}{n}}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$

＜ 面積 1 ＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ の場合に a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値は図 1 の斜線部分の面積 S の値を表す。



(図1)

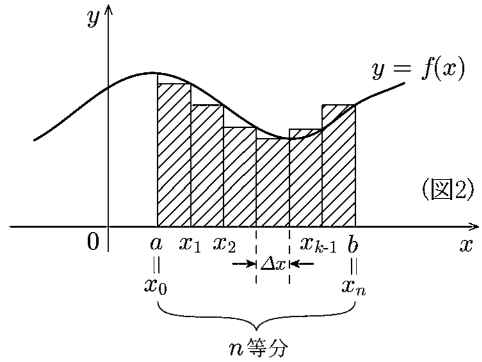
$$(*) \quad \boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

＜ (∗) 式の概略 ＞

定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \left(\begin{array}{l} x_k = a + k\Delta x \\ \Delta x = \frac{b-a}{n} \end{array}\right)$$

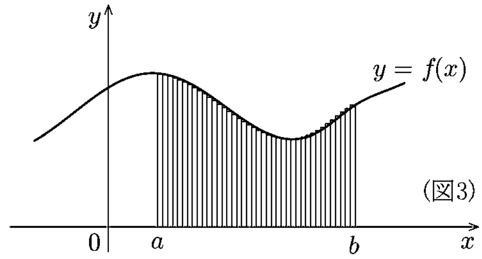
において $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ は図 2 の斜線部分の面積である。



(図2)

n が限りなく大きくなると図 3 のようになり，図 1 の面積 S に近づく。すなわち

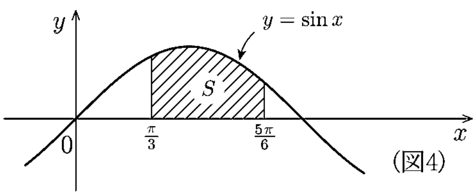
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = S$$



(図3)

例　曲線 $y = \sin x$ と 2 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$ と $x = \dfrac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S(図 4) を求める。

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



(図4)

問　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y = e^x$，$x = 0$，$x = 1$

(2) $y = \sqrt{x}$，$x = 1$，$x = 9$

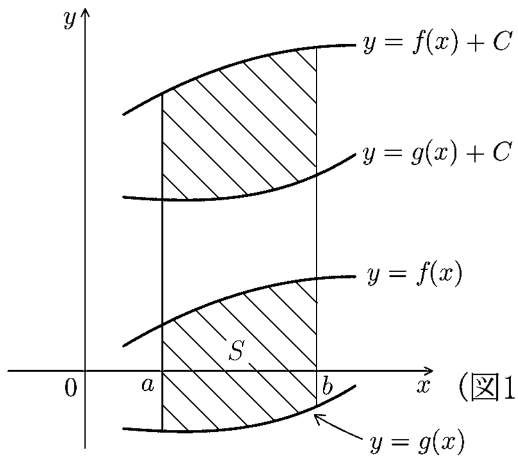
(3) $y = \dfrac{1}{x^2}$，$x = 1$，$x = 2$

(4) $y = \dfrac{1}{x}$，$x = 1$，$x = 2$

< 面積 2 >

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ である場合，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$(*)\quad \boxed{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$



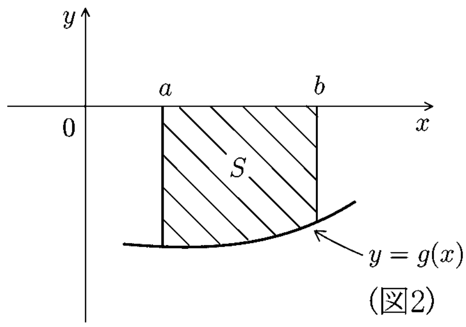
(図1)

< (*) 式の理由 >

右上図のようにある正の定数 $C(C>0)$ が存在して，2 曲線 $y=f(x)+C$，$y=g(x)+C$ はともに $a \leqq x \leqq b$ の範囲で x 軸より上 $(y>0)$ になるようにできる。求める領域の面積 S は 2 曲線 $y=f(x)+C$，$y=g(x)+C$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積と等しいので

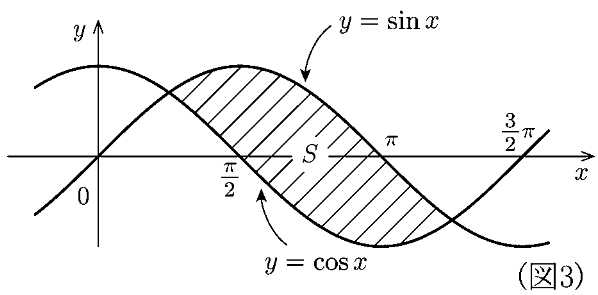
$$S=\int_a^b \{f(x)+C\}\,dx-\int_a^b \{g(x)+C\}\,dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

問 1　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x)<0$ の場合，曲線 $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

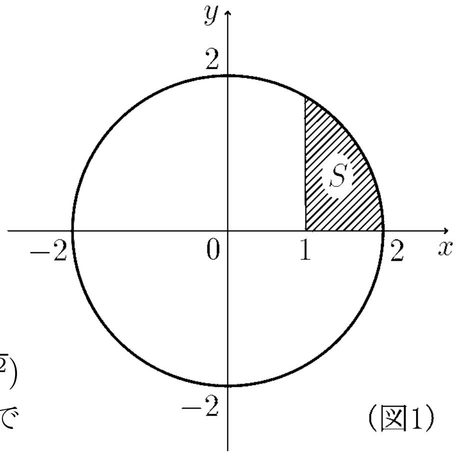
問 3　次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$

(2)　$y=\dfrac{1}{x}$，$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

< 面積 3 >

例題 図 1 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図1)

(解) 原点を中心として半径 2 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 4$$

である。y について解くと

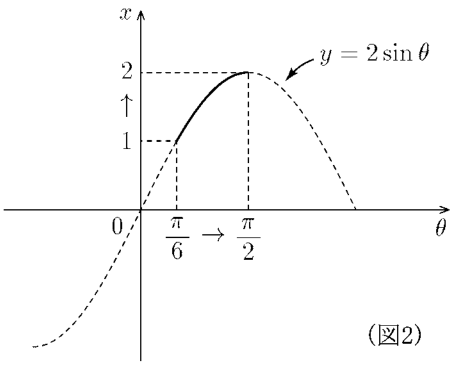
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

である。これは円を上半分 (上半円 $y = \sqrt{4 - x^2}$) と下半分 (下半円 $y = -\sqrt{4 - x^2}$) に分けたものである。従って求める面積 S は

$$S = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}dx$$

である。27 ページのように $x = 2\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta \ \Rightarrow\ dx = 2\cos\theta d\theta$$



(図2)

となり，x と θ の対応は

x	$1 \ \to\ 2$
θ	$\frac{\pi}{6} \ \to\ \frac{\pi}{2}$

となる。また $\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

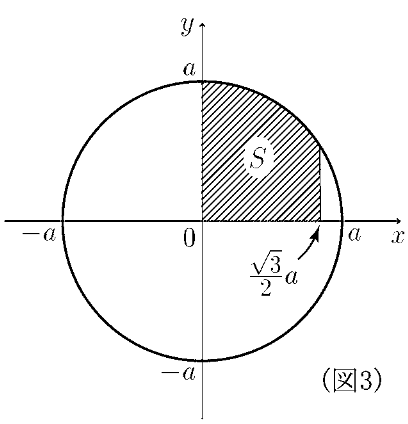
従って

$$S = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{2 + 2\cos(2\theta)\}\, d\theta = \Big[2\theta + \sin(2\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + \sin\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(答) $S = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

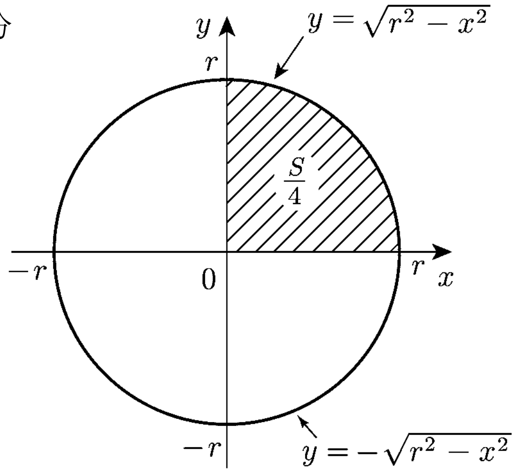
問 正定数 a に対し，図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

＜ 面積 4 ＞

問 1 半径 r の円の面積 S を求めるために右図斜線部分の面積 $\frac{S}{4}$ を求める。



(1) $\dfrac{S}{4}=\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ を $x=r\sin\theta$ とおくことによって求めよ。

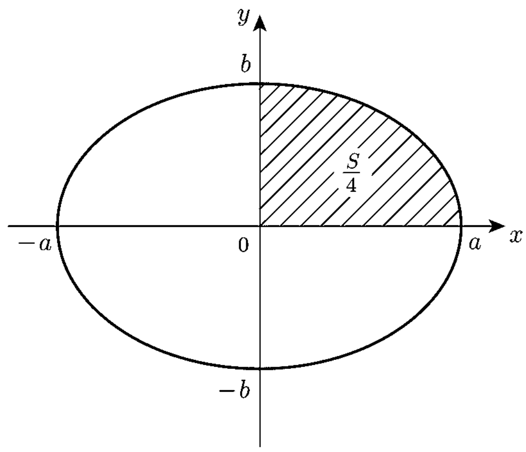
$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx=$$

(2) S を求めよ。

問 2 $a>b>0$ である定数 a，b に対し，右図の楕円の方程式は

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

である。



(1) 上半楕円の方程式を求めよ。

(2) 右図の斜線部分の面積 $\dfrac{S}{4}$ を積分の式で表せ。

$$\frac{S}{4}=$$

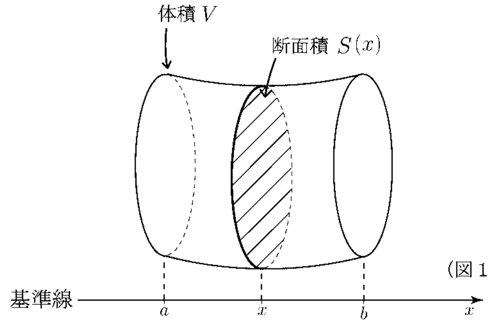
(3) S を求めよ。

＜体積 1＞

ある立体が図 1 のように基準線 (x 軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき，断面積 $S(x)$ がわかっていれば，図 1 の立体の体積 V は

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

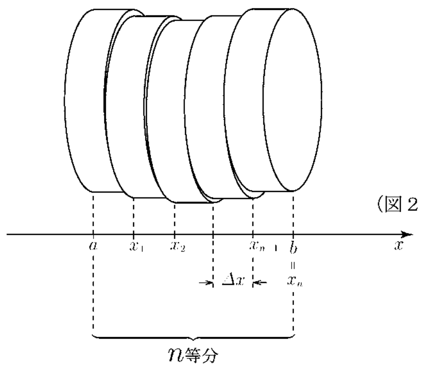
で求められる。



（図 1）

＜証明の概略＞

a から b までを n 等分し，その分点を $x_0=a$, $x_1,x_2,\cdots,x_n=b$ $\left(x_k=a+k\Delta x, \Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$ とおく。各分点 $x_1,\cdots,x_n$ を通る x 軸に垂直な平面で立体を切ると，立体は n 個に分かれる。第 k 番目の部分は図 3 のような立体 (体積 $S(x_k)\times\Delta x$) で近似できるから，それを $k=1$ から $k=n$ まで加えたもの



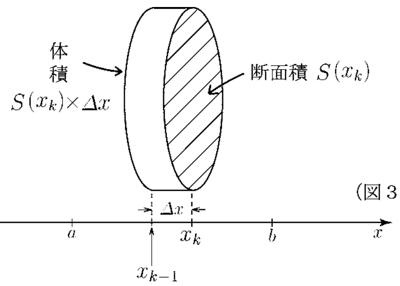
（図 2）

$$S(x_1)\times\Delta x+S(x_2)\times\Delta x+\cdots+S(x_n)\times\Delta x=\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x$$

は図 2 の立体の体積を表す。ここで n を限りなく大きくすると図 2 の立体は元の図 1 の立体に近づくので

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x=\int_a^b S(x)dx$$

となる。



（図 3）

問 底面が直角三角形 ABC で，高さが $h(\mathrm{OC}=h)$ である図 4 の三角錐 OABC の体積 V を求めたい。

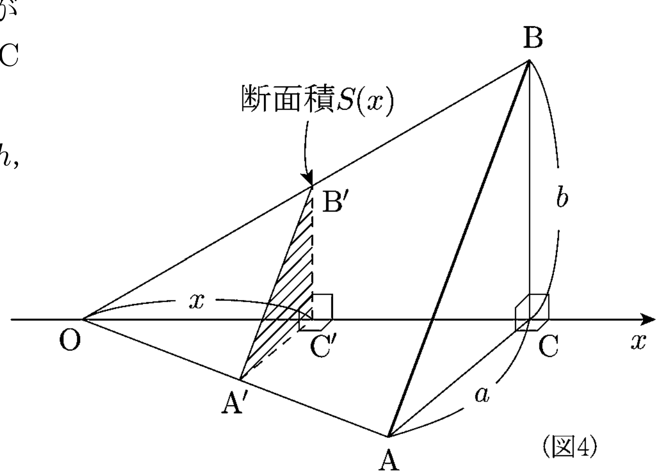
(1) $\mathrm{OC}'=x$ とする。$\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ と $\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ を x，h，a，b で表せ。

$\mathrm{A}'\mathrm{C}'=$ ， $\mathrm{B}'\mathrm{C}'=$

(2) 断面積 $S(x)$ を求めよ。

$S(x)=$

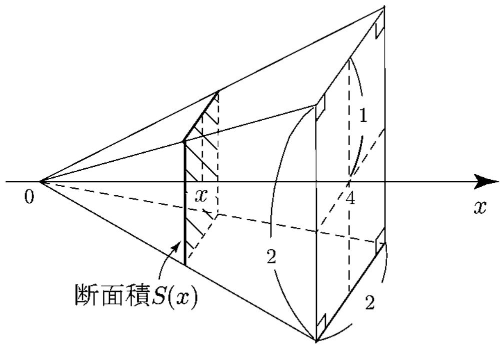
(3) 体積 V を求めよ。



(図4)

＜体積 2＞

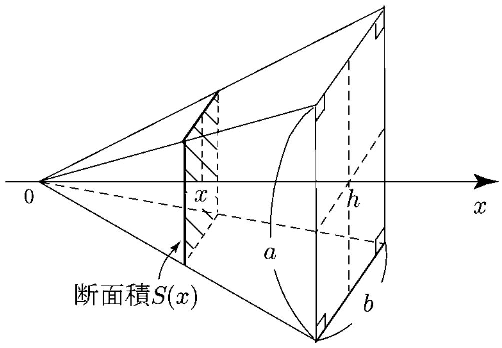
問1 底面が一辺 2 の正方形で，高さが 4 の四角錐の体積 V を求めたい。右図の断面積 $S(x)$ と体積 V を求めよ。



$S(x) =$

$V =$

問2 底面が縦 a，横 b の長方形で高さが h の四角錐の体積 V を求めたい。



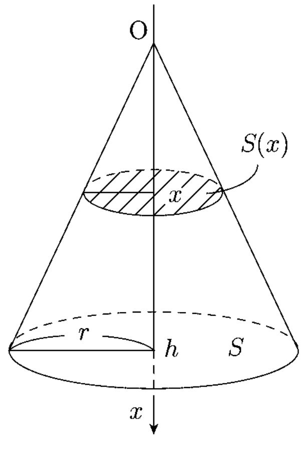
(1) 右図の断面積 $S(x)$ と体積 V を求めよ。

$S(x) =$

$V =$

(2) 底面積を S とする。$\dfrac{S(x)}{S}$ を求めよ。

問3 底面が半径 r の円であり，高さが h の円錐がある。



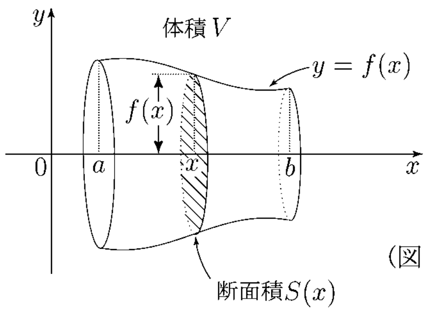
(1) 右図の断面積 $S(x)$ を r と h で表せ。

(2) 円錐の体積 V を求めよ。

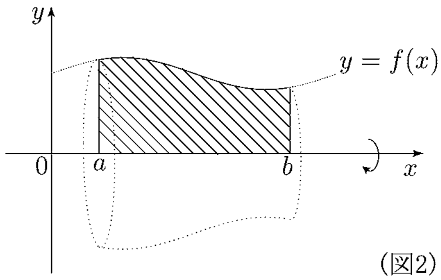
(3) 底面積を S とする。$\dfrac{S(x)}{S}$ を求めよ。

< 体積 3 >

問1 図 1 の立体は図 2 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた立体である。
このような立体を**回転体**という。



(図1)



(図2)

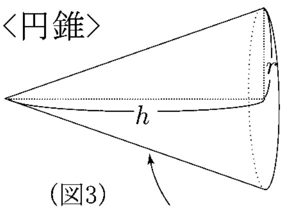
(1) 図 1 の斜線部分は半径 $f(x)$ の円である。この斜線部分の面積 $S(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

$S(x) =$

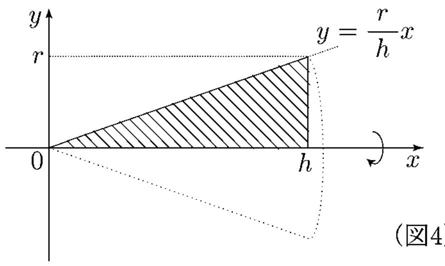
(2) 図 1 の回転体の体積 V を $f(x)$ を用いた積分の形で表せ。

$V =$

〈円錐〉



(図3)

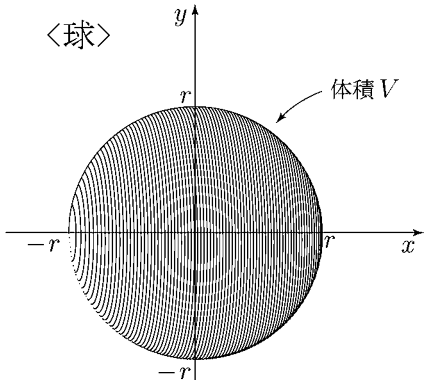


(図4)

問2 底面が半径 r の円であり，高さが h の円錐 (図 3) の体積 V を求めたい。
この円錐は図 4 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできたものである。積分の計算によって V を求めよ。

$V =$

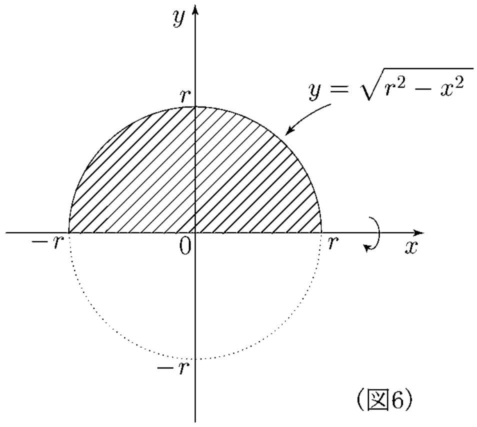
〈球〉



(図5)

問3 半径 r の球 (図 5) の体積 V を求めたい。球は図 6 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体である。積分の計算によって V を求めよ。

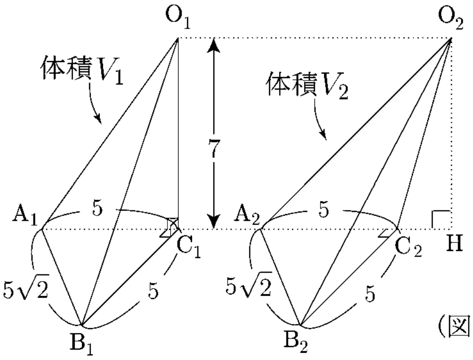
$V =$



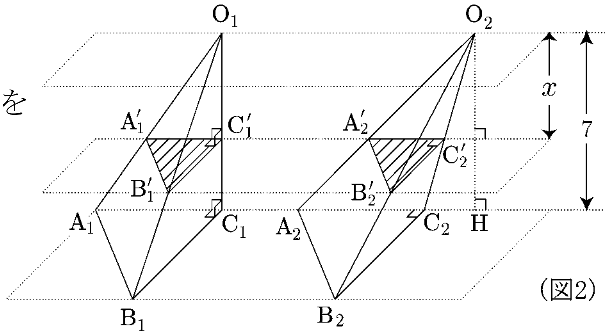
(図6)

< 体積 4 >

問 図 1 の三角錐 $O_1A_1B_1C_1$ の体積 V_1 と三角錐 $O_2A_2B_2C_2$ の体積 V_2 を求めたい。図 2，図 3 のように頂点からの距離が x である底面と平行な平面で切った断面を $A_1'B_1'C_1'$，$A_2'B_2'C_2'$ とし，その断面積を $S_1(x)$，$S_2(x)$ とする。



(図1)



(図2)

(1) $\triangle O_1A_1C_1$ と $\triangle O_1A_1'C_1'$ が相似であることを利用して，$A_1'C_1'$ の長さを x で表せ。

$A_1'C_1' =$

(2) $\triangle O_2A_2C_2$ と $\triangle O_2A_2'C_2'$ が相似であることを利用して，$A_2'C_2'$ の長さを x で表せ。

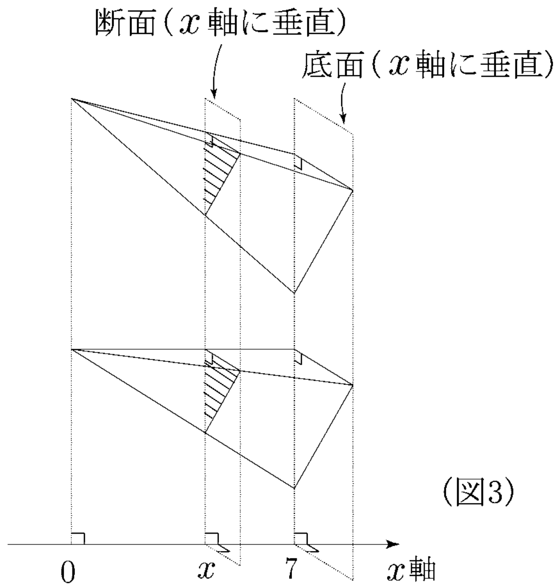
$A_2'C_2' =$

(3) $\triangle A_1'B_1'C_1'$ の面積 $S_1(x)$ を求めよ。

$S_1(x) =$

(4) $\triangle A_2'B_2'C_2'$ の面積 $S_2(x)$ を求めよ。

$S_2(x) =$



(図3)

(5) V_1 と V_2 を求めよ。

$V_1 =$

$V_2 =$

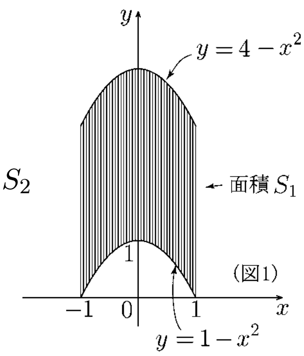
＜体積 5＞

[1]「線を集めると面になる」

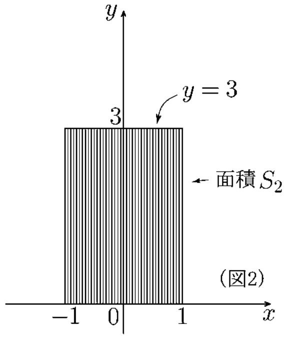
例 1 図 1 の面積 S_1 と図 2 の面積 S_2 は等しい。
なぜならば 37 ページより

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left\{ (4x - x^2) - (1 - x^2) \right\} dx = \int_{-1}^{1} 3dx = S_2$$

となるからである。一般に
「**線の長さ**を**積分する**と**面積**が求まる」。



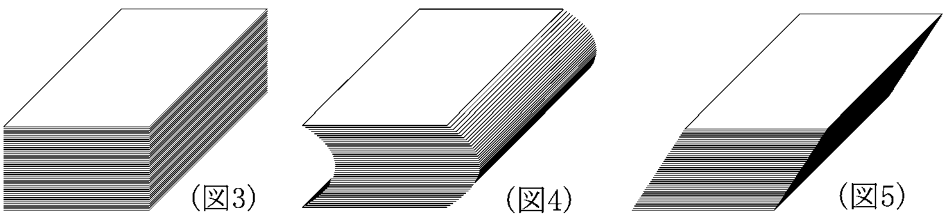
(図1)



(図2)

[2]「面を集めると立体になる」

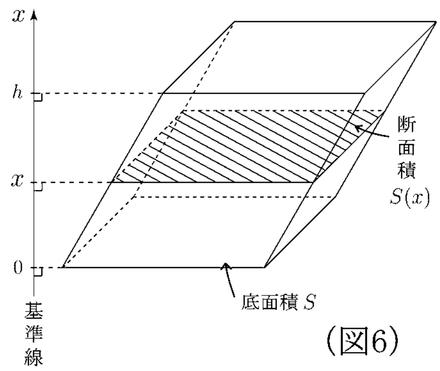
例 2 図 3 はトランプのような長方形のカードをまっすぐに重ねた立体であり，図 4 と図 5 はそれを横にずらした立体である。3 つの立体の体積は等しい。


(図3)　(図4)　(図5)

問 1 図 6 のような底面積 S で高さ h の平行六面体の体積 V を求めたい。底面に垂直な直線を基準線 (x 軸) にとる。x 軸の目盛りは底面からの高さとする。

(1) 高さ x である平面で切り取った断面の面積 $S(x)$ を求めよ。

(2) 平行六面体の体積 V を求めよ。



(図6)

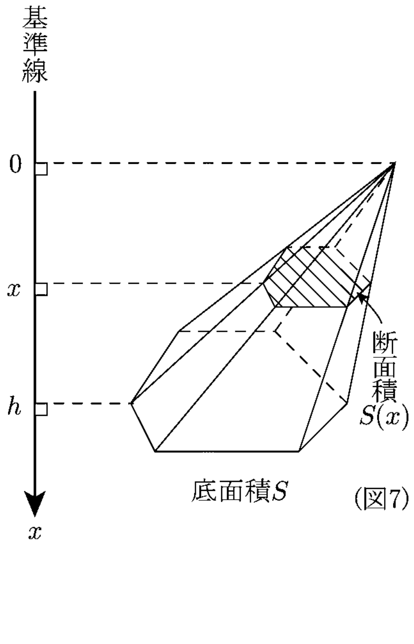
問 2 底面積が S で高さが h の角錐の体積 V を求めたい。頂点からの距離が x である底面に平行な平面で切った断面の面積を $S(x)$ とする。

(1) 円錐および角錐において $\frac{S(x)}{S}$ の比は高さ h と x によって決まる。41 ページ問 2，問 3 の結果を参考にして $\frac{S(x)}{S}$ の比を類推し，$S(x)$ を S と h と x で表せ。

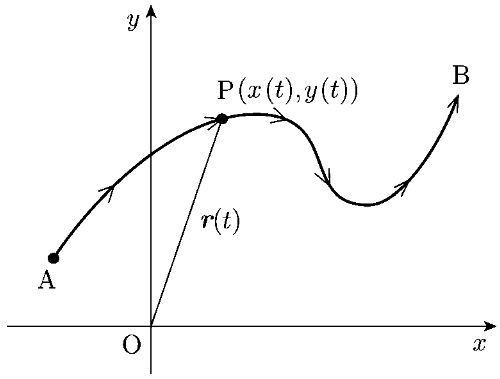
$S(x) =$

(2) 角錐の体積 V を求めよ。

$V =$



(図7)

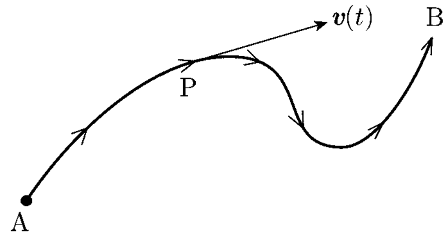


＜ 平面上の運動 ＞

平面上を動く点 P の時刻 t における座標が $(x(t), y(t))$ であるとき，点Pの位置ベクトルを

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))} \quad \text{(位置)}$$

と表し，時刻 t における**位置**という。



このようにベクトルを今後アルファベット小文字の太文字で表すことにする。$\boldsymbol{r}(t)$ はベクトル値関数である。ベクトル値関数 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ の導関数を

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) \text{ のとき } \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)} \quad \text{(ベクトル値関数の導関数)}$$

と定める。このとき時間 t における点Pの速度ベクトルとは

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (x'(t), y'(t))} \quad \text{(速度)}$$

であり，これを時刻 t における**速度**という。またこのベクトルの絶対値

$$\boxed{|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad \text{(速さ)}$$

を時刻 t における**速さ**といい，速度と区別する。

例 $x(t) = 2t^2$，$y(t) = t^3$ のとき速度は $\boldsymbol{v}(t) = \left((2t^2)', (t^3)'\right) = (4t\,, 3t^2)$ であり速さは $|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(6t)^2 + (3t^2)^2} = t\sqrt{16 + 9t^2}$

問 次の各場合に時刻 t における速度と速さを求めよ。

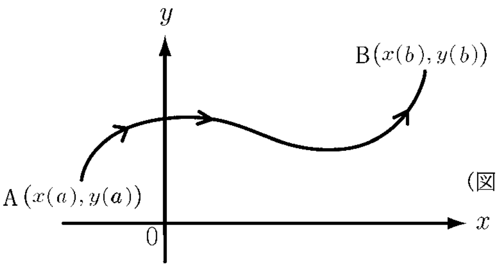
(1) $x(t) = 2t^3$，$y(t) = 3t^2$

(2) $x(t) = 2\cos t$，$y(t) = 2\sin t$

(3) $x(t) = \cos^3 t$，$y(t) = \sin^3 t$

(4) $x(t) = e^{-t}\cos t$，$y(t) = e^{-t}\sin t$

＜道のり 1＞

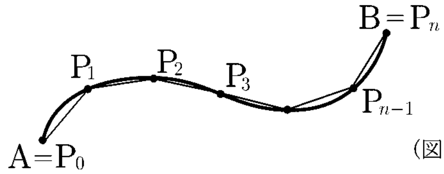


(図1)

平面上を動く点Pの時刻tにおける座標が$\big(x(t), y(t)\big)$があるとき，この点が時刻a(位置A)から時刻b(位置B)までに動いた道のりℓは

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\,dt} \quad (\text{道のり})$$

である。



(図2)

＜証明のアイデア＞

時間の範囲$a \leqq t \leqq b$をn等分した分点を

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \qquad \left(t_k = a + k\varDelta t\ ,\ \varDelta t = \frac{b-a}{n}\right)$$

とおく。各時刻t_kにおける位置を$\mathrm{P}_k\big(x(t_k), y(t_k)\big)$とし，$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots \mathrm{P}_n, = \mathrm{B}$の各点を折れ線で結んで$\ell$を近似する。折れ線の長さを$\ell_n$(図2)とすれば

$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \qquad \left(\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k - y(t_{k-1}))^2}\right)$$

である。nが十分大きければ$\varDelta t$は小さいので

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\varDelta t} \fallingdotseq x'(t_{k-1}) \qquad , \qquad \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\varDelta t} \fallingdotseq y'(t_{k-1})$$

より

$$\ell_n \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\varDelta t\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\varDelta t\Big)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\Big)^2} \times \varDelta t$$

と近似できる。そこでnを限りなく大きくするとℓ_nはℓに近づくので

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\Big)^2}\,\varDelta t$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Big(x'(t_k)\Big)^2 + \Big(y'(t_k)\Big)^2}\,\varDelta t$$

$$= \int_a^b \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(注) ここで定積分の定義式

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\varDelta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta t \qquad \left(t_k = a + k\varDelta t\ ,\ \varDelta t = \frac{b-a}{n}\right)$$

を用いた。

＜道のり 2＞

例題 平面上を動く点 P の時刻 t における速度が

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(t\,,\, t\sqrt{t}\right)$$

であり，$t=0$ のときの位置は原点 $(0,0)$ とする。このとき

(1) 時刻 t における位置 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=4$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

(解) (1) $\boldsymbol{v}(t) = \bigl(x'(t)\,,\, y'(t)\bigr) = \left(t\,,\, t\sqrt{t}\right)$ ，$\bigl(x(0)\,,\, y(0)\bigr) = (0\,,\,0)$ より

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(t)dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \int_0^t x'(t)dt = 0 + \int_0^t t dt = \frac{1}{2}t^2$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y'(t)dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(0) + \int_0^t y'(t)dt = 0 + \int_0^t t\sqrt{t} dt = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}$$

(答) $(x(t)\,,\, y(t)) = \left(\frac{1}{2}t^2\,,\ \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right)$

(2) 求める道のりは

$$\int_0^4 |\boldsymbol{v}(t)|\,dt = \int_0^4 \sqrt{(t)^2 + \left(t\sqrt{t}\right)^2}dt = \int_0^4 \sqrt{t^2+t^3}dt = \int_0^4 t\sqrt{1+t}dt$$

ここで $u = 1+t$ とおくと $\dfrac{du}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad du = dt$ より

$$\int_0^4 t\sqrt{1+t}dt = \int_1^5 (u-1)\sqrt{u}du = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^5 = \frac{100\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}$$

(答) $\displaystyle\int_0^4 |\boldsymbol{v}(t)|\,dt = \frac{140\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}$

問 1 x 軸上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (\cos t\,,\, 0)$$

であり，$t=0$ のときの位置は原点とする。

(1) 時刻 t における位置 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=\pi$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

問 2 平面上を動く点 P の時刻 t における速度が

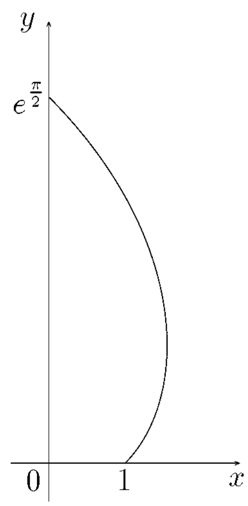
$$\boldsymbol{v}(t) = (-\sin t\,,\, \cos t)$$

であり，$t=0$ のときの位置は点 $(1\,,\,0)$ とする。

(1) 時刻 t における位置 $\bigl(x(t)\,,\, y(t)\bigr)$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=2\pi$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

＜道のり 3＞



例題 次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

$$x(t) = e^t \cos t\ , \quad y(t) = e^t \sin t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(解) $\dfrac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$

より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(e^t\right)^2 (\cos t - \sin t)^2 + \left(e^t\right)^2 (\sin t + \cos t)^2$$

$$= \left(e^t\right)^2 \left\{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin t^2 + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t\right\}$$

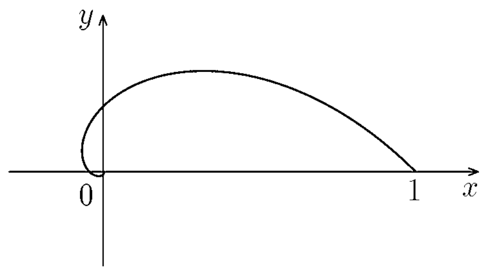
$$= 2\left(e^t\right)^2$$

である。求める曲線の長さは点 $(x(t), y(t))$ の $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{2}$ までの道のりだから,

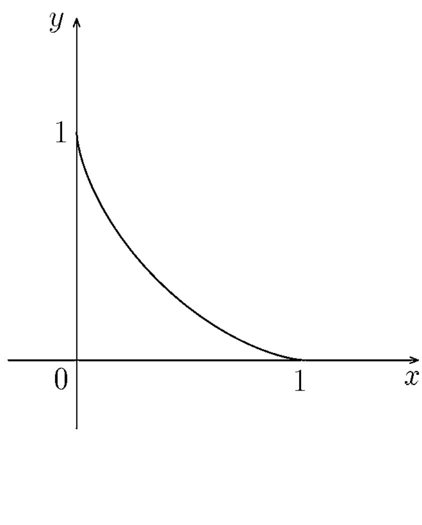
$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\left(e^t\right)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}$$

問 次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

(1) $x(t) = e^{-t} \cos t\ , \quad y(t) = e^{-t} \sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$



(2) $x(t) = \cos^3 t\ , \quad y(t) = \sin^3 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$



< 定積分の応用 1 >

問 1 次の和の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\frac{4n}{n}}}\right)$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right)$

問 2 次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と x 軸および y 軸で囲まれる部分

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ と 2 直線 $x=1$, $y=1$ で囲まれる部分

(3) 2 曲線 $y=x^3$ と $y=\sqrt{x}$ で囲まれる部分

問 3 次の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) x 軸より上側 $(y \geqq 0)$ で直線 $y=x$ より下側 $(y \leqq x)$ でかつ曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ より下側 $(y \leqq \sqrt{1-x^2})$ の部分

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の内部 (ただし $a>0$, $b>0$ とする)

問 4 曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1,e)$ における接線および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。またこの部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

< 定積分の応用 2 >

問 1 x 軸上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (\sin t\,,\,0)$$

であり，$t = 0$ のときの位置は原点とする。

(1) 時刻 t における位置 $\bigl(x(t)\,,\,y(t)\bigr)$ を求めよ。

(2) $t = 0$ から $t = 2\pi$ までの間に動いた距離 (道のり) を求めよ。

問 2 平面上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (1\,,\,\sqrt{t})$$

であり $t = 0$ における位置は原点とする。

(1) 時刻 t における位置 $\bigl(x(t)\,,\,y(t)\bigr)$ を求めよ。

(2) $t = 0$ から $t = 1$ までに動いた距離 (道のり) を求めよ。

問 3 次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

(1) $x(t) = 2t^3, \quad y(t) = 3t^2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(ヒント) $2 - 2\cos t = 4\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$