Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

初級編　No. 3

（2003年度版）

内容

◎　グラフの凹凸

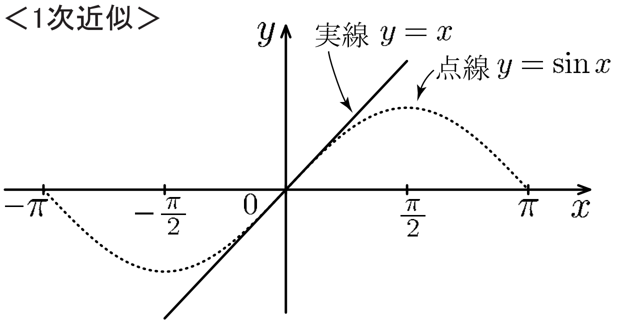
◎　ロピタルの定理

◎　関数の高次近似

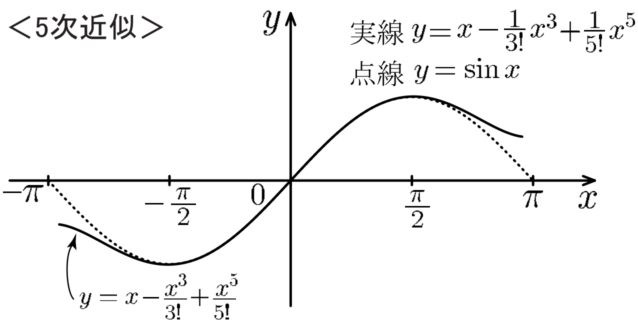
◎　テーラー展開

◎　不定積分

＜1次近似＞



＜5次近似＞



井上 昌昭　著

< 微分の練習 >

問 1 次の導関数を求めよ。ただし k , r , a は実数の定数で $a>0$,
$\log x=\log_e x$ は自然対数, e は自然対数の底とする。

(1) $(k)'=$ (2) $(x^r)'=$ (3) $(\sin x)'=$

(4) $(\cos x)'=$ (5) $(\tan x)'=$ (6) $(\log x)'=$

(7) $(\log_a x)'=$ (8) $(e^x)'=$ (9) $(a^x)'=$

(10) $(\sin^{-1} x)'=$ (11) $(\cos^{-1} x)'=$ (12) $(\tan^{-1} x)'=$

問 2 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, 次の導関数の公式を書け。
ただし k , r は実数の定数, $\log x=\log_e x$ は自然対数とする。

(1) $\big\{f(x)+g(x)\big\}'=$ (2) $\big\{f(x)-g(x)\big\}'=$

(3) $\big\{kf(x)\big\}'=$ (4) $\big\{f(x)g(x)\big\}'=$

(5) $\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}'=$ (6) $\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}'=$

(7) $\Big\{\big(f(x)\big)^r\Big\}'=$ (8) $\left\{\dfrac{1}{\big(f(x)\big)^r}\right\}'=$

(9) $\Big\{\sqrt{f(x)}\Big\}'=$ (10) $\Big\{\sin\big(f(x)\big)\Big\}'=$

(11) $\Big\{\cos\big(f(x)\big)\Big\}'=$ (12) $\Big\{\tan\big(f(x)\big)\Big\}'=$

(13) $\big\{e^{f(x)}\big\}'=$ (14) $\Big\{\log\big(f(x)\big)\Big\}'=$

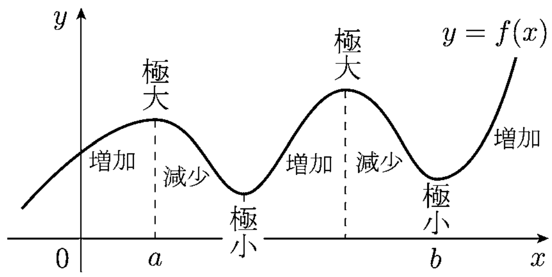
問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (2) $x\sqrt{x}$ (3) $\sqrt[3]{x^4}$

(4) $\sin(4x-3)$ (5) $\tan\left(\dfrac{x}{4}\right)$ (6) $e^{-\frac{x^2}{2}}$

(7) $x\log x-x$ (8) $-\log(\cos x)$ (9) $e^{2x}\sin(3x)$

＜ 関数の増減 ＞



関数 $y = f(x)$ のグラフは,

$y' > 0$ の範囲では傾きプラスより**増加**

$y' < 0$ の範囲では傾きマイナスより**減少**

である。$x = a$ を境目として増加から減少に写るとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という。また $x = b$ を境目として，減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**であるといい，$f(b)$ を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例題 関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ の増減表を作り，極値を調べ，グラフを描け。

(解) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3)$

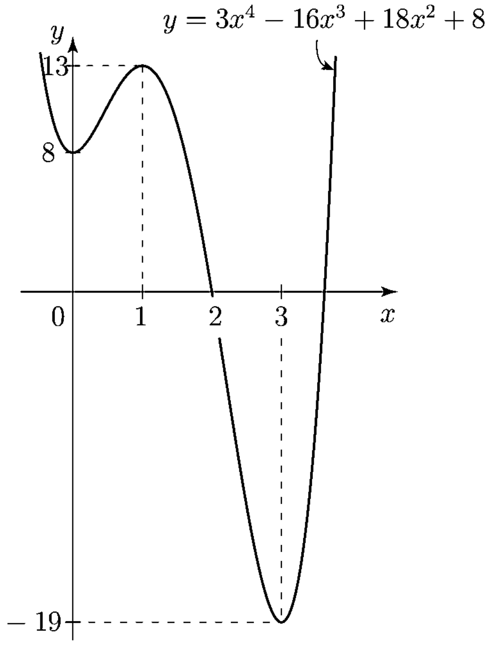
$= 12x(x-1)(x-3)$

より $x = 0,\ x = 1,\ x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	8	$\nearrow$	13	$\searrow$	-19	$\nearrow$
		極小		極大		極小	

この増減表より極値は次のようになる。

$x = 0$ のとき極小値 $y = 8$
$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$
$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$



問 次の関数の増減表を作り，極値を調べ，グラフを描け。

(1) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

(2) $y = -x^4 + 2x^2$

＜ 高階導関数 ＞

関数 $f(x)$ を x について微分したときに求められる関数 $f'(x)$ を導関数ということは既に知っていると思う。$f'(x)$ をさらに微分したものを $f''(x)$ あるいは $f^{(2)}(x)$ と書き，これを 2 階導関数と呼ぶ。実際に 2 階導関数を求めてみよう。

例題 1 $f(x) = x^3$ の 2 階導関数を求めよ。

(解) $f'(x) = 3x^2$ より $f''(x) = 6x$ である。

問 1 次の関数の 2 階導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(3) $f(x) = \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

関数 $f(x)$ を 3 回微分したものを 3 階導関数と呼び $f'''(x)$ あるいは $f^{(3)}(x)$ で表す。

例題 2 $f(x) = x^3$ の 3 階導関数を求めよ。

(解) 例題 1 より $f''(x) = 6x$ 　よって $f'''(x) = 6$ である。

問 2 次の関数について 3 階までの導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^5 - x^3 + x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(3) $f(x) = x \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(4) $f(x) = e^{2x}$

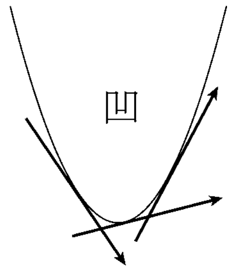
$f'(x) =$

$f''(x) =$

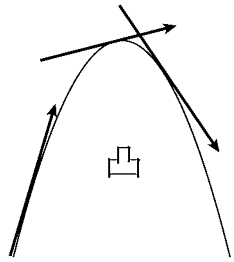
$f'''(x) =$

＜ グラフの凹凸 1 ＞

[1]　関数 $f(x)$ の 2 階導関数が，ある x 範囲内で常に $\underline{f''(x) > 0}$ のとき，$f'(x)$ の値は，この範囲内で増加する。従って，グラフは右の図のように接線の傾きが増加していく。
このようなとき，グラフは**凹**であるという。



[2]　これに対し，$\underline{f''(x) < 0}$ である範囲内では，$f'(x)$ の値は減少し，グラフでは右の図のような接線の傾きが減少していく。
このようなとき，グラフは**凸**であるという。



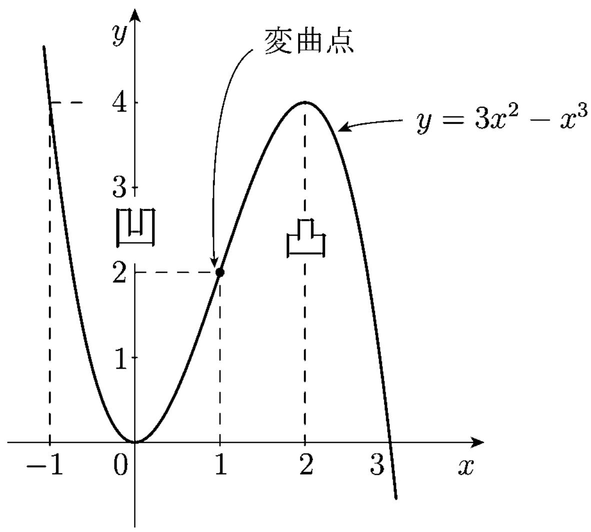
例　関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し，

$$y' = 6x - 3x^2$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だから，グラフの凹凸は $x = 1$ を境にして変わる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)



このグラフで凹凸の入れ替わる点 $(1, 2)$ を**変曲点**という。

問　次の関数の 2 階導関数 y'' を求め，凹凸を表にせよ。

(1)　$y = x^3 + 3x^2 - 9x$

$y'' =$

x	
y''	
y	

(2)　$y = -x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 10$

$y'' =$

x	
y''	
y	

＜グラフの凹凸 2＞

例 1 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ は

$$y' = 2x - 4 = 2(x - 2)$$
$$y'' = 2$$

より，増減表と凹凸表は右のようになる。グラフは図 1 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

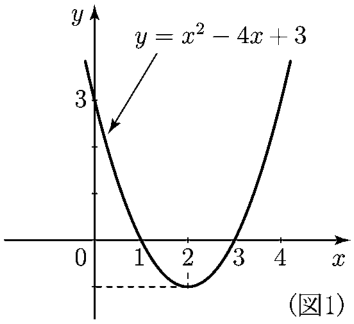
x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-1	↗

(増減表)

x	$\cdots$
y''	$+$
y	凹

(凹凸表)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	-1	↗



(図1)

例 2 2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 2$ は

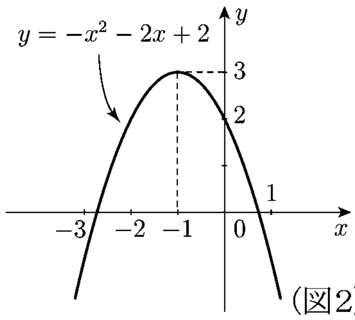
$$y' = -2x - 2 = -2(x + 1)$$
$$y'' = -2$$

より，増減表と凹凸表は右のようになり，グラフは図 2 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	3	↘

x	$\cdots$
y''	$-$
y	凸

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	↗	3	↘



(図2)

問 次の 2 次関数に対し上の例のような増減表と凹凸表をあわせた表を作れ。

(1) $y = x^2 - 5x + 6$

x	
y'	
y''	
y	

(2) $y = -x^2 + 4x - 5$

x	
y'	
y''	
y	

＜グラフの凹凸 3＞

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し，

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

より，増減表と凹凸表は右の表のようになる。
これを組み合わせると，下の表のようになる。

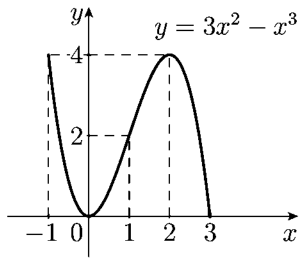
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

(増減表)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘
		極小		変曲点		極大	



実際のグラフは右のようになる。
変曲点は $(1, 2)$ である。
以上の考察から，y' と y'' の $+$，$-$ によって y のグラフは次のようになる。

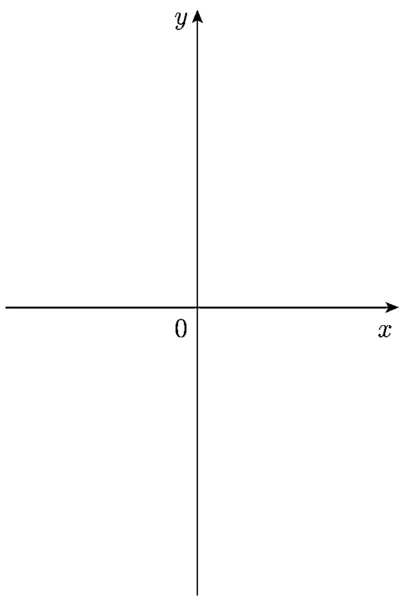
y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$+$ ↗	$-$ ↘
y''	$+$ 凹	$+$ 凹	$-$ 凸	$-$ 凸
y	↘	↗	↗	↘

問 関数 $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ を 2 階微分し，増減表と凹凸表を合わせた表を作り，グラフの概形を描け。また変曲点を求めよ。

$y' =$

$y'' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'							
y''							
y							



< グラフの凹凸 4 >

例題 関数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ を 2 階微分し，増減と凹凸を調べ，グラフを描け。また変曲点を求めよ。

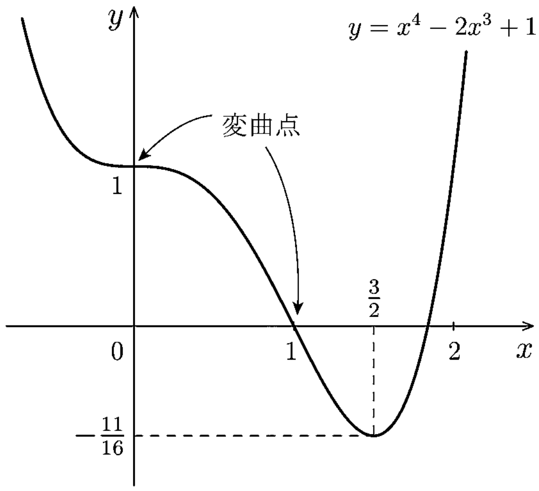
(解) $y' = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

より $x = 0,\ \frac{3}{2}$ で $y' = 0$ となり

$x = 0,\ 1$ で $y'' = 0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	1	↘	0	↘	$-\frac{11}{16}$	↗
	凹	変曲点	凸	変曲点	凹	極小	凹



この表より，変曲点は $(0, 1)$ と $(1, 0)$ である。

問 次の関数の増減と凹凸を調べ，グラフを描け。また変曲点を求めよ。

(1) $y = x^4 - 6x^2 + 9$

(2) $y = x^4 + 4x^3 + 15$

< グラフの凹凸 5 >

問　次の関数の増減と凹凸を調べ, グラフを描け。また変曲点を求めよ。

(1) $y = x^3 + x$

(2) $y = x^3 - 3x$

(3) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

(4) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

< 微分係数と極限値 >

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ の定義式

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad \text{(微分係数)}$$

を逆に利用して極限値を求めることができる。

例 1　極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ を求めたい。

$f(x) = \cos x$ とおくと $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ 　　, $f'(0) = -\sin 0 = 0$ より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

例 2　極限 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ を求めたい。

$f(x) = x^5$ とおくと $f(1) = 1^5 = 1$

$f'(x) = 5x^4$ 　　, $f'(1) = 5 \times 1^4 = 5$ より

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

例 3　極限 $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e}$ を求めたい。

$f(x) = \log x$ とおくと $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ 　　, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$ より

$$\lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e} = \lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = \frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

＜ロピタルの定理 1＞

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \qquad g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

である。もし $f(a)=g(a)=0$ ， $g'(a)\neq 0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるので

$$\boxed{\begin{array}{c} f(a)=g(a)=0 \\ \left(\frac{0}{0}\text{ の型}\right)\end{array} \text{ のとき } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad \text{(ロピタルの定理)}$$

が成り立つ。これを**ロピタルの定理**という。

(注) 前ページの極限の問題は $g'(x)=1$ となる場合である。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の型になる。分子を因数分解して

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+x+1)=5$$

と計算するが、この因数分解は難しい。ロピタルの定理を使うと以下のように求まる。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1}=5\times 1^4=5$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$ を求めたい。 $x=e$ を代入すると分母・分子共に 0

となるのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}-0}{1-0}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ロピタルの定理 2＞

前ページより $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のとき

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

がなり立つと書いたが正確には右辺の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在

すれば $g'(a)=0$ であってもロピタルの定理はなりたつ。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すれば $\dfrac{0}{0}$ の形になるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}3\times\frac{x^5-1}{x-1}$$

となるが、最後の式は前ページ例 1 の結果 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=5$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=3\times\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=3\times 5=15$$

(注) 極限が $\dfrac{0}{0}$ の形であればロピタルの定理が何度でも使える。

上の例 1 は次のように計算してよい。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{\left(2(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$$

例 2 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)}{(x-1)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5-5\times 2^4(x-2)}{(x-2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1-4(x-1)-6(x-1)^2}{(x-1)^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)-10(x-1)^2-10(x-1)^3}{(x-1)^4}$

< 微分記号 1 >

変数 x の関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を以下の記号で表す。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

全て同じ意味である。ここで $\dfrac{d}{dx}$ という記号は「変数 x で微分する」という意味である。

例 定数 a, b, c に対し次式が成り立つ。

(1) $\dfrac{d}{dx}(a) = 0$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(ax+b) = a$

(3) $\dfrac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax+b$　　(4) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^3\} = 3a(ax+b)^2$

(5) $\dfrac{d}{dx}(a^3x^5) = 5a^3x^4$　　(6) $\dfrac{d}{dx}\{2a^3(x-a)^4\} = 8a^3(x-a)^3$

(注) (1) のように x のついていない項を微分すると 0(ゼロ) になる。

問 定数 a, b, c に対し次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4+c^2\}$　　, (2) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4x+c^5x^2\}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{(a+b)^3-c^4\}$　　, (4) $\dfrac{d}{dx}\{(a-b)^2x-c^3\}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{a^4(x-b)\}$　　, (6) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x+c)^2\}$

(7) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^4\}$　　, (8) $\dfrac{d}{dx}\{(x-a)^5\}$

(9) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x-a)^3\}$　　, (10) $\dfrac{d}{dx}\{4a^3(x-b)^4\}$

(11) $\dfrac{d}{dx}\{x^2-a^2-2a(x-a)\}$

(12) $\dfrac{d}{dx}\{x^3-a^3-3a^2(x-a)-6a(x-a)^2\}$

< 微分記号 2 >

例 1　変数が x 以外の場合も同様な微分記号を用いる。

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$　,　$\dfrac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$　,　$\dfrac{d}{dy}(y^n) = ny^{n-1}$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$　,　$\dfrac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$　,　$\dfrac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$

(3) $\dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t$　,　(4) $\dfrac{d}{dy}e^y = e^y$　,　(5) $\dfrac{d}{du}(\log u) = \dfrac{1}{u}$

問 1　以下の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}(4t^3 + 5t^2 - 2t + 3)$　(2) $\dfrac{d}{dy}(5y^6 - 7y^3 + 8y^4 - 4)$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(t+4)^5\}$　(4) $\dfrac{d}{dy}\{(3y+1)^6\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{10(t-5)^6\}$　(6) $\dfrac{d}{dy}\{15(y-4)^8\}$

例 2　定数 a, b, c に対し次式がなりたつ。

(1) $\dfrac{d}{dt}\{a^3 + b^4\} = 0$　(2) $\dfrac{d}{dy}\{a^3 + b^4y + cy^2\} = b^4 + 2cy$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(t-a)^3\} = 3(t-a)^2$　(4) $\dfrac{d}{dy}(ay+b)^4 = 4a(ay+b)^3$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{a^4(t-a)^3\} = 3a^4(t-a)^2$　(6) $\dfrac{d}{dy}\{a^6(y-a)^5\} = 5a^6(y-a)^4$

問 2　定数 a, b, c に対して次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}\{(a-b)^2t - c\}$　(2) $\dfrac{d}{dy}\{a^4(y-b)\}$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(at+b)^2\}$　(4) $\dfrac{d}{dy}\{(ay-b)^3\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{a^4(t-1)^2\}$　(6) $\dfrac{d}{dy}\{a^5(y-b)^3\}$

(7) $\dfrac{d}{dt}\{a^5(t-a)^4\}$　(8) $\dfrac{d}{dy}\{3a^2(y+a)^5\}$

＜ロピタルの定理 3＞

ロピタルの定理を微分記号 $\frac{d}{dx}$ を用いて書きなおすと以下のようになる。

＜ロピタルの定理＞

関数　$f(x)$　，　$g(x)$　と定数 a に対して、

$$f(a) = 0 \quad , \quad g(a) = 0$$

でありかつ極限値

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)} \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$$

例

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3 - 3a^2(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}\{x^3 - a^3 - 3a^2(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^2\}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{3x^2 - 3a^2}{2(x-a)} \qquad = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}\{3x^2 - 3a^2\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{6x}{2} \quad = \quad \frac{6a}{2} \quad = \quad 3a$$

問

(1) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2 - 2a(x-a)}{(x-a)^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4 - 4a^3(x-a)}{(x-a)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a)}{(x-a)^2}$

＜ロピタルの定理 4＞

ロピタルの定理は変数が x 以外でも同様になりたつ。

例 1 $\displaystyle \lim_{y\to1}\frac{\log y}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{\frac{d}{dy}\{\log y\}}{\frac{d}{dy}\{y-1\}}=\lim_{y\to1}\frac{\frac{1}{y}}{1}=1$

例 2 $\displaystyle \lim_{t\to\pi}\frac{1+\cos t}{t-\pi}=\lim_{t\to\pi}\frac{\frac{d}{dt}\{1+\cos t\}}{\frac{d}{dt}\{t-\pi\}}=\lim_{t\to\pi}\frac{-\sin t}{1}=\frac{-\sin\pi}{1}=0$

例 3 $\displaystyle \lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)}{a^3-a\beta^2}=\lim_{\beta\to a}\frac{\frac{d}{d\beta}\{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)\}}{\frac{d}{d\beta}\{a^3-a\beta^2\}}$

$$=\lim_{\beta\to a}\frac{2a\cos(2\beta)-\sin(2a)}{-2a\beta}=\frac{2a\cos(2a)-\sin(2a)}{-2a^2}$$

(注) 例 1, 例 2, 例 3 は極限のパラメータを x にかえても同じ結果が得られる。
すなわち

$$\lim_{y\to1}\frac{\log y}{y-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$$

$$\lim_{t\to\pi}\frac{1+\cos t}{t-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}$$

$$\lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)}{a^3-a\beta^2}=\lim_{x\to a}\frac{a\sin(2x)-x\sin(2a)}{a^3-ax^2}$$

とおきかえて答を求めてもよい。

問 定数 a,b に対し次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{y\to a}\frac{\log y-\log a}{y-a}$

(2) $\displaystyle \lim_{t\to b}\frac{\cos t-\cos b}{t-b}$

(3) $\displaystyle \lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(b\beta)-\beta\sin(ab)}{a^3-a\beta^2}$

＜ ロピタルの定理 5 ＞

例 $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2}{(x-a)^3}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^3\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{3(x-a)^2\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{20x^3-20a^3}{6(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{20x^3-20a^3\}}{\frac{d}{dx}\{6(x-a)\}}=\lim_{x\to a}\frac{60x^2}{6}=10a^2$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2}{(x-a)^3}$

＜ロピタルの定理 6＞

例 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2-20a^3(x-a)^3}{(x-a)^4}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2-20a^3(x-a)^3\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^4\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{6x^5-6a^5-30a^4(x-a)-60a^3(x-a)^2}{4(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{6x^5-6a^5-30a^4(x-a)-60a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{4(x-a)^3\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{30x^4-30a^4-120a^3(x-a)}{12(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{30x^4-30a^4-120a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{12(x-a)^2\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{120x^3-120a^3}{24(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{120x^3-120a^3\}}{\frac{d}{dx}\{24(x-a)\}}=\lim_{x\to a}\frac{360x^2}{24}=\frac{360a^2}{24}=15a^2$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2-10a^2(x-a)^3}{(x-a)^4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2-35a^4(x-a)^3}{(x-a)^4}$

＜ ロピタルの定理 7 ＞

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16-32(x-2)}{(x-2)^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e-e(x-1)}{(x-1)^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x-(x-1)}{(x-1)^2}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2-\frac{1}{4}(x-4)}{(x-4)^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a-e^a(x-a)-\frac{e^a}{2}(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a-(\cos a)(x-a)+\left(\frac{1}{2}\sin a\right)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^8-a^8-8a^7(x-a)-28a^6(x-a)^2-56a^5(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 接線の方程式 >

$y=f(x)$ のグラフの $x=a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)} \qquad \text{(接線の方程式)}$$

である。

例 1 $f(x)=\sin x$ のとき $x=\dfrac{\pi}{3}$ における接線の方程式を求めたい。

$f'(x)=\cos x$ より接線は

$$y=\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \underline{\text{(答)}\, y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

例 2 $f(x)=\cos x$ のとき $x=a$ における接線の方程式は

$f'(x)=-\sin x$ より　<u>（答） $y=-(\sin a)(x-a)+\cos a$</u>

問 次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y=e^x$ の $x=0$ における接線

(2) $y=\log x$ の $x=1$ における接線

(3) $y=\cos x$ の $x=\dfrac{\pi}{2}$ における接線

(4) $y=\sqrt{x}$ の $x=4$ における接線

(5) $y=e^x$ の $x=a$ における接線

(6) $y=\sin x$ の $x=a$ における接線

(7) $y=\log x$ の $x=a$ における接線

(8) $y=\sqrt{x}$ の $x=a$ における接線

(9) $y=\sqrt[3]{x}$ の $x=a$ における接線

＜関数の１次近似１＞

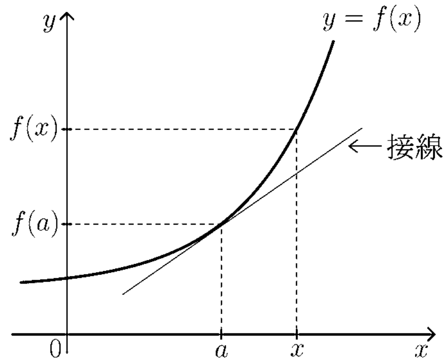
関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ である。

$x = a + \Delta x$ とおけば，$\Delta x \to 0$ のとき $x \to a$ より

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って，x が a に十分近いとき ($x \fallingdotseq a$ のとき)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \fallingdotseq f'(a)$$



とみなせる。よって

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)}$$

が成り立つ。右辺は x の１次式であるから，これを $x = a$ の近くでの**１次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \qquad \text{(接線)}$$

を表すが，これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。すなわち，曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例１ $f(x) = x^4$ のとき $f'(x) = 4x^3$ ，$f(a) = a^4$ ，$f'(a) = 4a^3$ より x^4 の１次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \quad x^4 \fallingdotseq a^4 + 4a^3(x - a)}$$

例２ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ のとき $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ より

$f(a) = \sqrt[3]{a}$ ，$f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$ だから $\sqrt[3]{x}$ の１次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \quad \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a)}$$

問 $f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの１次近似式で求めよ。

(1) $f(x) = x^6$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

(4) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

＜関数の 1 次近似 2 ＞

例 1　$f(x) = \sin x$　に対し , $x = a$ の近くでの 1 次近似式を求めたい。

$f(x)$ の 1 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

にあてはめると

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき }\ \sin x \fallingdotseq \sin a + (\cos a)(x - a)}$$

問 1　$f(x)$ が次の関数のとき $x = a$ の近くで 1 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x) = \cos x$

(2)　$f(x) = \tan x$

(3)　$f(x) = \log x$

(4)　$f(x) = e^x$

例 2　$f(x) = \sin x$ に対し , $x = \frac{\pi}{3}$ の近くでの 1 次近似式は例 1 の式で $a = \frac{\pi}{3}$ のとき

$$\sin x \fallingdotseq \sin\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

より

$$\underline{x \fallingdotseq \frac{\pi}{3} \text{ のとき }\ \sin x \fallingdotseq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

問 2　次の 1 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x) = \sin x$ に対し , $x = 0$ の近くでの 1 次近似式

(2)　$f(x) = \cos x$ に対し , $x = \frac{\pi}{2}$ の近くでの 1 次近似式

(3)　$f(x) = e^x$ に対し , $x = 0$ の近くでの 1 次近似式

(4)　$f(x) = \log x$ に対し , $x = 1$ の近くでの 1 次近似式

(5)　$f(x) = \sqrt{x}$ に対し , $x = 1$ の近くでの 1 次近似式

(6)　$f(x) = \sqrt[3]{x}$ に対し , $x = 1$ の近くでの 1 次近似式

＜1次近似値＞

例 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x)=\sqrt{x}$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式は

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt{x} \fallingdotseq \sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

であった。従って $a=1$ のときは

$$x \fallingdotseq 1 \text{ のとき } \sqrt{x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(x-1)$$

よって $x=1.1$ とおくと

$$\sqrt{1.1} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(1.1-1)=1.05$$

この値 1.05 は 1 次近似式を用いた近似値であることから , **1 次近似値** と呼ぶことにする。

問 次の 1 次近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{1.1}$

(2) $\sqrt[4]{1.1}$

(3) $\log 1.1$

(4) $e^{0.1}$

(5) $\sin 0.1$

(6) $\cos 0.1$

＜関数の高次近似 1 ＞

例 関数 $f(x)$ と定数 a に対し、$f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ は定数だから

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f''(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f'(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(x)\} = f'''(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f''(a)\} = 0$$

である。これらを組み合わせると。

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - f(a)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a)\} = f''(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(a)(x-a)\} = f'(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)\} = f'(a) \times 1 = f'(a)$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(a)(x-a)^2\} = f''(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)^2\} = f''(a) \times 2(x-a) = 2f''(a)(x-a)$$

等がわかる。

問 関数 $f(x)$ と定数 a に対して、次の導関数を求めよ。

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\}$

(2) $\displaystyle \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)\}$

(3) $\displaystyle \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\}$

(4) $\displaystyle \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \frac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2\}$

(5) $\displaystyle \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3\}$

< 関数の高次近似 2 >

例 関数 $f(x)$ と定数 a に対し、極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

を求めたい。$x=a$ を代入すると $\frac{0}{0}$ の型になるのでロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\}}{\frac{d}{dx}(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{f'(x)-f'(a)\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

問 例のようにロピタルの定理を何回か使って次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 関数の高次近似 3 >

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2} f''(a)$$

とみなせる。両辺に $(x-a)^2$ をかけると

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \fallingdotseq \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

よって

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } \ f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから、これを $x = a$ の近くでの **2 次近似式**という。

例 2 前のページの問 (1) の結果より

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } \quad \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3} \fallingdotseq \frac{1}{6} f'''(a)$$

とみなせる。両辺に $(x-a)^3$ をかけると ,

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 \fallingdotseq \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3$$

よって

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } \ f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3}$$

が成り立つ。この場合は 3 次式なので $x = a$ の近くでの **3 次近似式**という。

問 前ページの問 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の $x = a$ の近くでの 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x \fallingdotseq a$ のとき

$f(x) \fallingdotseq$

< 高次微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x), f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における**n階微分係数**という。

例　(1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、$x = 2$ における 4 階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80,\quad f^{(2)}(2) = 160,\quad f^{(3)}(2) = 240,\quad f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \cos x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x,\ f^{(6)}(x) = -\cos x,\ f^{(7)}(x) = \sin x,\ f^{(8)}(x) = \cos x$$

より $x = 0$ における 8 階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1,\ f^{(7)}(0) = 0,\ f^{(8)}(0) = 1$$

問　(1) $f(x) = e^x$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、$x = 0$ における 4 階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、$x = 0$ おける n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \sin x$ の 8 階までの導関数 $\left(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)\right)$ を求め、$x = 0$ における 8 階までの微分係数 $\left(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)\right)$ を求めよ。

＜関数の n 次近似 1 ＞

25 ページの結果から、関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 4 次近似式は

$$(※)\quad \boxed{f(x) \fallingdotseq f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4}$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は順に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \cdots$$

となるが、この分母の数は、24 ページの計算からロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり、

$$\left((x-a)^4\right)'''' = \left(4(x-a)^3\right)''' = \left(3\times 4(x-a)^2\right)'' = \left(2\times 3\times 4(x-a)\right)' = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$$

である。つまり $24 = 1\times 2\times 3\times 4$ と書ける。

ここで階乗の記号を使って式を見やすいものにする。階乗とは数字を順番に $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots(n-1)\times n$ というふうに計算することで、 n までかけた時には $n!$ というふうに書く。

$24 = 1\times 2\times 3\times 4$ ということは 4 までかけているので $4!$ と表す。

上の例の係数は

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\times 2},\ \frac{1}{1\times 2\times 3},\ \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}$$

ここで階乗の記号を使うと

$$\frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!}$$

と書くことができる。

問　上の 4 次近似式 $\big($ (※) 式 $\big)$ を階乗の記号を用いて書け。

$f(x) \fallingdotseq$

< 関数の n 次近似 2 >

前のページでは $f(x)$ は階乗の記号を使うと

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

というふうに書けることを説明した。

さて、上の式について

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 \quad , \quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 \quad , \quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

同じ数字　　同じ数字　　同じ数字

という同じ数字が使われているパターンに気づくと思う。

したがって、 4 のところを n にして $f(x)$ を書き直すと、

> $x \fallingdotseq a$ のとき
> $$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

というふうになる。この式を $x = a$ の近くでの $\boldsymbol{n}$ **次近似式**という。

例 $f(x) = e^x$ のとき、 $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(4) = e^4$ である。

したがって $x = 4$ の近くでの n 次近似式は

$x \fallingdotseq 4$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^4 + e^4(x-4) + \frac{e^4}{2!}(x-4)^2 + \frac{e^4}{3!}(x-4)^3 + \cdots + \frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

問 $f(x) = e^x$ に対し、次の n 次近似式を求めよ。

(1) $x = a$ の近くでの n 次近似式

(2) $x = 1$ の近くでの n 次近似式

(1) $x = 0$ の近くでの n 次近似式

＜テーラー展開＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても、n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの**テーラー展開**という。

例 $f(x)=e^x$ の $x=2$ の近くでのテーラー展開を求めたい。$f^{(n)}(x)=e^x$ であるから

$$f(2)=e^2\ ,\ f^{(1)}(2)=e^2\ ,\ f^{(2)}(2)=e^2\ ,\ f^{(3)}(2)=e^2\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(2)=e^2$$

となるので $x=2$ の近くでのテーラー展開は

$$e^x=e^2+e^2(x-2)+\frac{1}{2!}e^2(x-2)^2+\frac{1}{3!}e^2(x-2)^3+\frac{1}{4!}e^2(x-2)^4+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}e^2(x-2)^n+\cdots$$

となる。

問 1 $f(x)=e^x$ に対し、$x=a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 2 $f(x)=e^x$ に対し、a が次の場合の $x=a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

(1) $a=1$

(2) $a=0$

< マクローリン展開 1 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ の近くでのテーラー展開

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots}$$

を**マクローリン展開**という。前ページの問 2 (2) では $f(x)=e^x$ のマクローリン展開を求めた。

すなわち

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots}$$

となる。

例 $f(x)=\cos(x)$ のとき、26 ページの例より

$$f^{(1)}(0)=0\ ,\ f^{(2)}(0)=-1\ ,\ f^{(3)}(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(6)}(0)=-1\ ,\ f^{(7)}(0)=0\ ,\ f^{(8)}(0)=1$$

で数列 $\left\{f^{(n)}(0)\right\}$ は、 $0,\ -1,\ 0,\ 1$ を 4 項おきに繰り返す。

又、 $f(0)=\cos 0=1$ だから $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開は

$$\boxed{\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots}$$

となる。

問 26 ページの結果を使って、 $f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

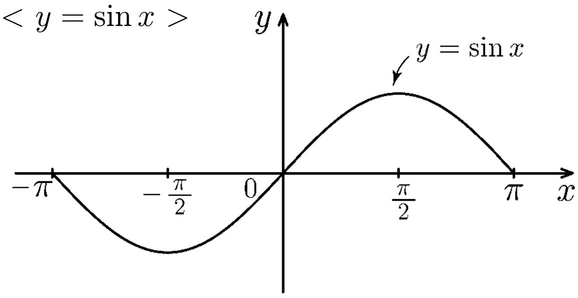
＜マクローリン展開 2＞

例 1　前ページより $\sin x$ のマクローリン展開は

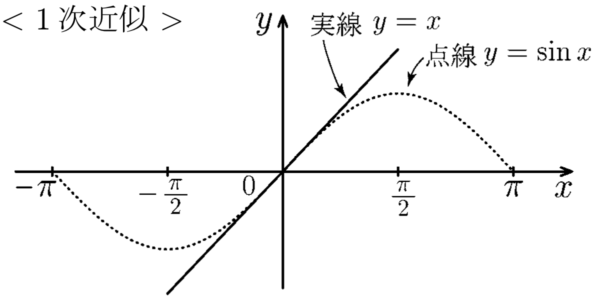
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

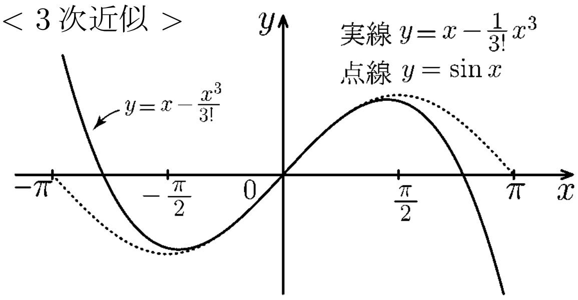
＜ $y = \sin x$ ＞



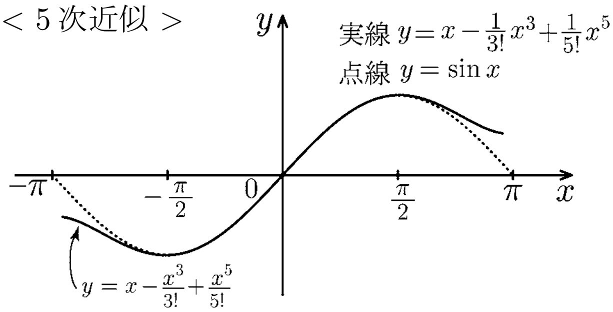
＜ 1 次近似 ＞



＜ 3 次近似 ＞



＜ 5 次近似 ＞

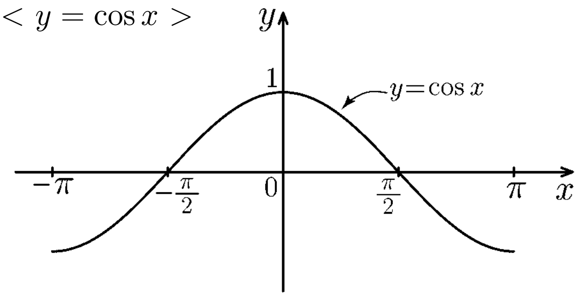


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

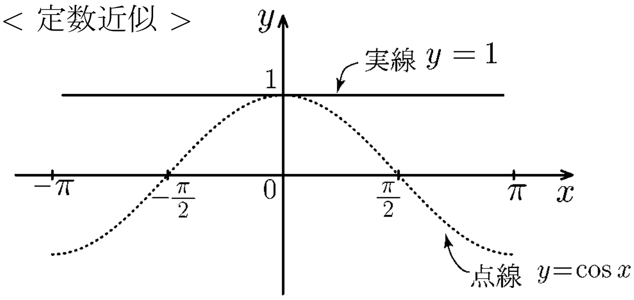
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

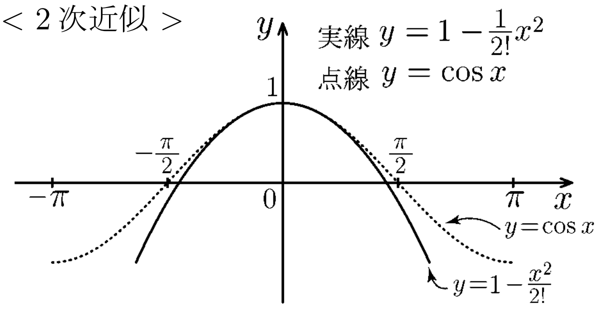
＜ $y = \cos x$ ＞



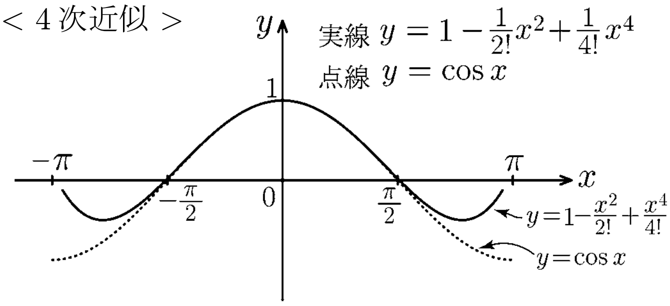
＜ 定数近似 ＞



＜ 2 次近似 ＞



＜ 4 次近似 ＞



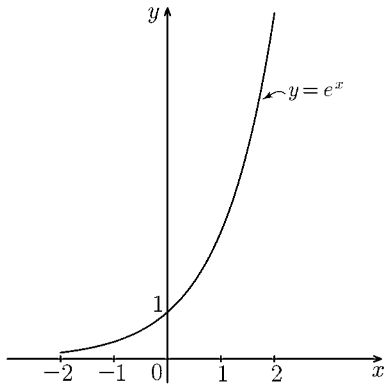
＜マクローリン展開 3＞

指数関数 e^x のマクローリン展開は

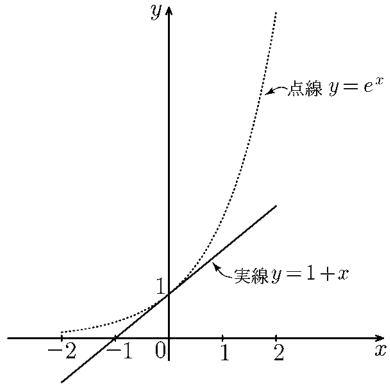
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように e^x のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

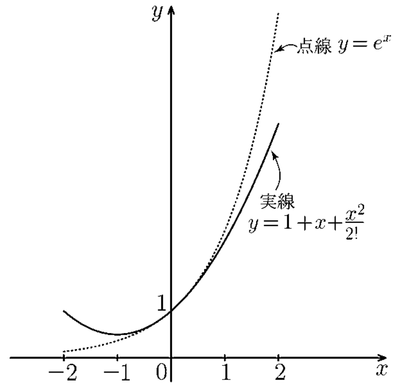
＜ $y = e^x$ ＞



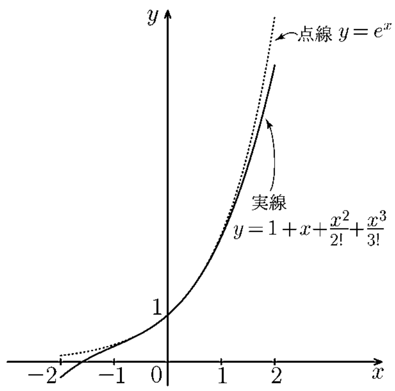
＜ 1 次近似 ＞



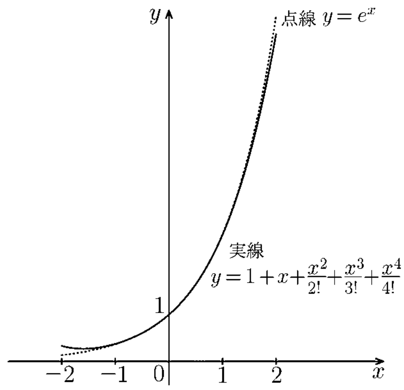
＜ 2 次近似 ＞



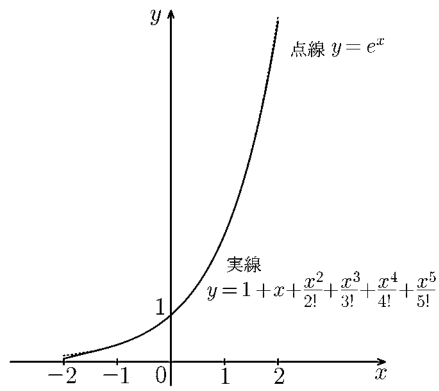
＜ 3 次近似 ＞



＜ 4 次近似 ＞



＜ 5 次近似 ＞



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式がなりたつ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

問 この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

となる。この式の右辺を計算することにより e の近似値を求めよ。

＜ 近似の練習 1 ＞

このページでは $x=a$ の近くでの $f(x)$ の 2 次近似式

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を求める練習をする。

例 1 $f(x)=\sin x$ のとき $f'(x)=\cos x$， $f''(x)=-\sin x$ より，2 次の近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sin x \fallingdotseq \sin a + (\cos a)(x-a) - \tfrac{1}{2}(\sin a)(x-a)^2}$$

問 1 $f(x)$ が以下の場合に $x=a$ の近くでの 2 次の近似式で求めよ。

(1) $f(x)=\cos x$

(2) $f(x)=e^x$

(3) $f(x)=\log x$

(4) $f(x)=\sqrt{x}$

(5) $f(x)=e^{-x}$

例 2 $f(x)=\sin x$ のとき $x=\frac{\pi}{2}$ の近くでの 2 次の近似式は

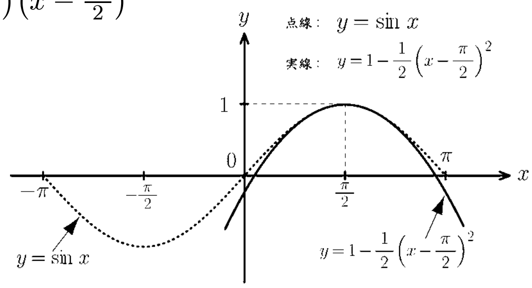
$$\sin x \fallingdotseq \sin\tfrac{\pi}{2} + \left(\cos\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sin\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

だから

$$\underline{x \fallingdotseq \tfrac{\pi}{2} \text{ のとき } \sin x \fallingdotseq 1 - \tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2}$$

右図で点線は $y=\sin x$ のグラフであり，

実線は $\boldsymbol{y=1-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2}$ のグラフである。



問 2 次の 2 次近似式をもとめよ。

(1) $f(x)=\cos x$ のとき $x=\pi$ の近くでの 2 次近似式

(2) $f(x)=e^x$ のとき $x=1$ の近くでの 2 次近似式

(3) $f(x)=\log x$ のとき $x=1$ の近くでの 2 次近似式

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ のとき $x=1$ の近くでの 2 次近似式

< 近似の練習 2 >

問 1 次の近似式を求めよ。

(1) 関数 $f(x) = e^{-x}$ に対し, $x = 0$ の近くでの 2 次近似式

(2) 関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に対し, $x = 0$ の近くでの 2 次近似式

(3) 関数 $f(x) = \sin x + \cos x$ に対し, $x = 0$ の近くでの 2 次近似式

(4) 関数 $f(x) = \log(1 + x)$ に対し, $x = 0$ の近くでの 2 次近似式

問 2 $\sqrt{x}$ の $x = 1$ の近くでの 2 次近似式を用いて $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ。

問 3 $\log x$ の $x = 1$ の近くでの 2 次近似式を用いて $\log 1.1$ の近似値を求めよ。

問 4 $\cos x$ の $x = 0$ の近くでの 2 次近似式を用いて $\cos(0.1)$ の近似値を求めよ。

問 5 e^x の $x = 0$ の近くでの 3 次近似式を用いて $\sqrt{e}$ の近似値を求めよ。

問 6 e^x の $x = 0$ の近くでの 4 次近似式を用いて $\dfrac{1}{e}$ の近似値を求めよ。

問 7 e^x , $\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開を利用して次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) =$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left\{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\} =$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \cdots + \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right)}{n!}\right\} =$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} + \cdots + \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)}{n!}\right\} =$

< 不定積分 1 >

x の関数 $f(x)$ に対して, 微分すると $f(x)$ になる関数, すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば, それを $f(x)$ の**原始関数**という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき, 任意の定数 C に対して

$$\Big(F(x) + C\Big)' \;=\; F'(x) \;=\; f(x)$$

であるから, $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である。従って $f(x)$ の原始関数は無数にあるが, いずれも $F(x) + C$ の形で書き表される。

$$F(x) + C \qquad\qquad (C \text{ は任意定数})$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい, $\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)dx}$ で表す。

$$\boxed{F'(x) \;=\; f(x) \quad \text{のとき} \qquad \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを, $f(x)$ を**積分する**といい, 上の定数 C を**積分定数**と呼ぶ。またこのとき $f(x)$ を**被積分関数**といい, x を**積分変数**という。

例 $\displaystyle\left(\frac{1}{4}x^4\right)' \;=\; x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^3 dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 + C$

問 次の左の導関数を求め, 右の不定積分を求めよ。 (ただし $\alpha \neq -1$)

(1) $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' =$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\displaystyle\int x^{\alpha} dx =$

(2) $\Big(\log|x|\Big)' =$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx =$

(3) $(\sin x)' =$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\displaystyle\int \cos x dx =$

(4) $(-\cos x)' =$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\displaystyle\int \sin x dx =$

(5) $(e^x)' =$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\displaystyle\int e^x dx =$

< 不定積分 2 >

< x^α の不定積分 >

$\alpha \neq -1$ のとき　$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$\alpha = -1$ のとき　$\displaystyle\int x^{-1} dx = \log|x| + C$

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

例 2 $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(注) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5}$ のように書くことがある。同様にして $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^6 dx$

(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{4}} dx$

(3) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}} dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

< 不定積分 3 >

不定積分について, 次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

1. $\displaystyle\int kf(x)dx \ = \ k\int f(x)dx$ 　　(k は 0 でない定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx \ = \ \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx \ = \ \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(定数倍, 和・差の不定積分)

例 $$\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}dx = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注) この例のように, 積分定数は最後にまとめて C で表す。

また $\displaystyle\int 1dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

< 不定積分 4 >

問 1　次の左の導関数を求め, 次の右の不定積分を求めよ。　(ただし $a > 0,\ a \neq 1$)

(1) $(\tan x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(2) $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

(3) $(a^x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int a^x dx =$

(4) $(\sin^{-1} x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

(5) $(\tan^{-1} x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

例 1 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx = \int \cos x dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sin x + 3\tan x + C$

例 2 $\displaystyle\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$

例 3 $\displaystyle\int (e^x - 2^x) dx = \int e^x dx - \int 2^x dx = e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x) dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$

(3) $\displaystyle\int (2 - \tan x)\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - 1} dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x} dx$

(6) $\displaystyle\int (3^x - 2e^x) dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2} dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\displaystyle\int \Box \, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1 $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ より $\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$ より $\displaystyle\int 3t^2 dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$ より $\displaystyle\int 3u^2 du = u^3 + C$

例 2 (1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

< 置換積分法 1 >

例 1 $\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。 $\sin(3x+2)$ の導関数は合成関数の微分法より

$$\Big(\sin(3x+2)\Big)' = \cos(3x+2)\times(3x+2)' = 3\cos(3x+2)$$

であるから

$$\Big(\frac{1}{3}\sin(3x+2)\Big)' = \cos(3x+2)$$

よって

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$$

(別解) $u = 3x+2$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (3x+2)' = 3$ である。そこで形式的に

$$du = 3dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$$

とおき , 積分変数を x から u に置き換えて積分し , 最後に元に戻す。

$$\int \cos(3x+2)dx = \int (\cos u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$$

(注) この別解の方法を**置換積分法**という。

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{4x-3}dx$ を求めたい。 $u = 4x-3$ とおく。上の別解と同様にして

$$\frac{du}{dx} = (4x-3)' = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{4}du}$$

とおき , 積分変数を置き換えると次のように求まる。

$$\int \frac{1}{4x-3}dx = \int \frac{1}{u}\times\frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\log|u| + C = \frac{1}{4}\log\big|\,4x-3\,\big| + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (5x+6)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x+5)^4}$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{5x-3}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin(3x+2)dx$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x+2}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(4x+3)}$

< 置換積分法 2 >

例 1 $\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3} dx$ を考える。

$$\boxed{u = x^3} \qquad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies du = 3x^2 dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とおくと

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int e^{x^3} du = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例 2 $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおき

$$\boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とすると

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

例 3 $\int x \cos(x^2+1) dx$ を考える。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2+1)' = 2x \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{2x} du}$$

とおくと

$$\int x \cos(x^2+1) dx = \int x \cos(x^2+1) \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2+1) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x e^{x^2+1} dx =$

(2) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4} dx =$

(3) $\displaystyle\int x^2 \cos(x^3+2) dx =$

(4) $\displaystyle\int x \sin(x^2+3) dx =$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3} dx =$

(6) $\displaystyle\int x(x^2+1)^5 dx =$

< 分数関数の積分 1 >

このページと次のページでは分母が x の1次式および2次式になっている分数関数の積分を考える。

例1 $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}dx$ を求めたい。$u = 3x+4$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3$ より $dx = \dfrac{1}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{3x+4}dx = \int \frac{1}{u} \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\log|u| + C = \frac{1}{3}\log|3x+4| + C$$

例2 $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-6)^2}dx$ を求めたい。 $u = 5x-6$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 5$ より $dx = \dfrac{1}{5}du$ だから

$$\int \frac{1}{(5x-6)^2}dx = \int \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^{-2}du = -\frac{1}{5}u^{-1} + C = -\frac{1}{5u} + C = -\frac{1}{5(5x-6)} + C$$

例3 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx$ を求めたい。 $u = 3x+4$ とおくと $dx = \dfrac{1}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}(3x+4) + C$$

例4 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+5^2}dx$ を求めたい。 $5u = 3x+4$ とおくと $dx = \dfrac{5}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+5^2}dx = \frac{1}{15}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{15}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{15}\tan^{-1}\left(\frac{3x+4}{5}\right) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2-x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{3-4x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(4-x)^2}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-4)^2}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(3-5x)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5^2}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-5)^2+4}dx$

< 分数関数の積分 2 >

例 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}\,dx$ を求めたい。この被積分関数 $\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$ は $\dfrac{A}{x+3}$ と $\dfrac{B}{x+5}$ (A と B は定数) の形の和として表すことができる。すなわち

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

とおいて右辺を通分すると

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A+3B)}{(x+3)(x+5)}$$

となる。この最後の式の分子が 1 になるように A と B を決めれば良い。つまり

$$1 = (A+B)x + (5A+3B)$$

より

$$A+B=0 \qquad \cdots①$$

$$5A+3B=1 \qquad \cdots②$$

であればよい。① , ② より $A=\dfrac{1}{2}$ 、$B=-\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\}$$

と表される。よって求める積分は

$$\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\} dx = \frac{1}{2}\left\{ \log|x+3| - \log|x+5| \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+4)}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)(3x+4)}\,dx$

< 部分積分法 1 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ。これから

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

である。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx} \qquad \text{(部分積分)}$$

が成り立つ。これを **部分積分** の公式という。

例
$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$$
$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(2x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$

< 部分積分法 2 >

例 1

$$\int \log x dx = \int (\log x)\cdot(x)' dx = (\log x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx$$

$$= x\log x - x + C$$

一般に次式が成り立つ。

$$\boxed{\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx}$$

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log(2x)dx$

(2) $\int \log(x^3)dx$

例 2

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x dx &= \int x^2(\sin x)' dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx\\ &= x^2\sin x + \int 2x(\cos x)' dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

(注) この例 2 は被積分関数が $x^2\cos x$ であり、この x^2 を消すために部分積分を 2 回使っている。

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2\sin x dx$

(2) $\int x^2 e^x dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式 $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

2. 積を和に直す公式

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}
\end{aligned}}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x)dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos^2(3x)dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin^2(4x)dx =$

< 上半円の積分 >

原点を中心として半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ の上半部分の式 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ の積分を求める。

例 $\displaystyle\int\sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めたい。$x=3\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta \iff dx=3\cos\theta\ d\theta$$

より

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}\,dx &= \int\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\ d\theta = \int 9\cos^2\theta\ d\theta\\ &= 9\int\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = 9\left\{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right\}+C\\ &= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin(2\theta)+C\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{x}{3}=\sin\theta \iff \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)=\theta$$

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= \frac{2}{9}\times 3\sin\theta\sqrt{9-9\sin^2\theta} = \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}\end{aligned}$$

より

$$\underline{\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C}$$

問 次の不定積分を求めよ。(ただし a は正の定数とする)

(1) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\ dx$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\ dx$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1 $\int x^2(x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\big((x^3+1)^5\big)' = \frac{1}{15} \times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3} \times (x^3+1)^4 \times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい**。

例 2 $\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$\big(\log(\cos x)\big)' = \frac{1}{\cos x} \times (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より**正しくない**。

例 3 $\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\big(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\big)' = -(2x+1)' \times \cos x - (2x+1) \times (\cos x)' + 2 \times (\sin x)'$$
$$= -2\cos x - (2x+1) \times (-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$$

より**正しい**。

問 次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\int x^3(x^4-1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

< 不定積分の練習 1 >

問　次の不定積分を求めよ。$\left(\begin{array}{l}\text{ただし} \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x},\ \ \mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x},\ \ \cot x = \dfrac{1}{\tan x}\end{array}\right)$

(1) $\displaystyle\int (x^5 + x^7)dx$

(2) $\displaystyle\int x^{-2}dx$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx$

(6) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x}}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x}dx$

(12) $\displaystyle\int (2\cos x - 3\sin x)dx$

(13) $\displaystyle\int (2\tan x + 3)\cos x dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \cos^2 x}dx$

(16) $\displaystyle\int \sec^2 x dx$

(17) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2 x dx$

(18) $\displaystyle\int \cot^2 x dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}dx$

(20) $\displaystyle\int \frac{4}{1 + x^2}dx$

(21) $\displaystyle\int (4^x - e^x)dx$

(22) $\displaystyle\int (t^2 - 6t + 5)dt$

(23) $\displaystyle\int (u^4 - 3u^2)du$

(24) $\displaystyle\int \sin t\, dt$

(25) $\displaystyle\int \cos u\, du$

(26) $\displaystyle\int e^u du$

(27) $\displaystyle\int \frac{1}{u}du$

(28) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

< 不定積分の練習 2 >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{-3x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \cos(4x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int \sin(3x+5)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x+6)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+3}$

(6) $\displaystyle\int (5x-2)^3dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x-5)^3}$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{5x+3}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x-6}}$

(10) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x+1}\,dx$

(11) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

(12) $\displaystyle\int x^2e^{-x^3}dx$

(13) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+4)dx$

(14) $\displaystyle\int x^3\sin(x^4)dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{3x}{1+x^2}dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3+2}dx$

(17) $\displaystyle\int x(x^2+3)^4dx$

(18) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x+1}dx$

(20) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x-1}dx$

(21) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

(22) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2-1}dx$

(23) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$

(24) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

(25) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(26) $\displaystyle\int x\log x dx$

(27) $\displaystyle\int x\cos(3x)dx$

(28) $\displaystyle\int \sin x\cos(2x)dx$

(29) $\displaystyle\int \cos x\cos(3x)dx$

(30) $\displaystyle\int \sin x\,\sin x(3x)dx$

(31) $\displaystyle\int \sin^2(2x)dx$

(32) $\displaystyle\int \cos^2(2x)dx$