Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

初級編　No. 2

(2003年度版)

内容

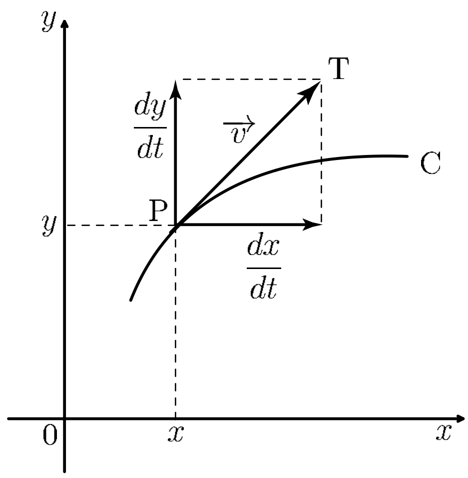
◎　関数の極限

◎　積・商の微分

◎　三角関数,
　　指数・対数関数の微分

◎　合成関数・逆関数の微分

◎　平面上の運動



井上 昌昭　著

< 関数の極限 >

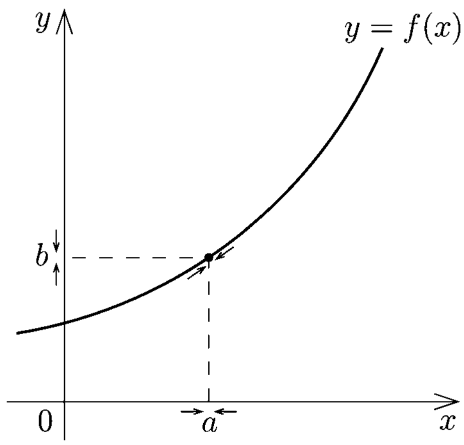
関数 $f(x)$ の定義域内で、x が a と異なる値をとりながら、a に限りなく近づくとき、どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば、これを

$x \to a$ のとき $f(x) \to b$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し、b を、x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**という。



例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3} = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2$

(注) 例 3 の場合 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ では定義されていない。無理に代入すると $f(1) = \dfrac{0}{0}$ の形で計算できないので、分子を因数分解して代入できる形になおしてから $x = 1$ を代入する。

例 4 $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x + 1} = \lim_{x \to -1}(x - 2) = -1 - 2 = -3$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x + 1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \sin x$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} \log_2 x$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(6) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

(7) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

(8) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

＜左極限・右極限 1＞

1. ＜左表現・右表現＞

ワークブック初級編 $No.1$(P50) の結果より 1 を循環小数によって 2 通りに表すことができる。

$1 = 0.\dot{9} = 0.99999\cdots$ （左表現）

$1 = 1.\dot{0} = 1.00000\cdots$ （右表現）

この場合に $0.\dot{9}$ を 1 の **左表現** , $1.\dot{0}$ を 1 の **右表現** ということにする。

(注) この用語「左表現」「右表現」は数学で一般的に使われる用語ではなく、
ワークブックだけで便宜上用いる言葉である。

例 1 (1) 3 の左表現 $= 2.\dot{9}$, 3 の右表現 $= 3.\dot{0}$

(2) 2.5 の左表現 $= 2.4\dot{9}$, 2.5 の右表現 $= 2.5\dot{0}$

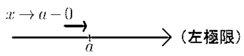
問 1 (1) 10 の左表現 = , 10 の右表現 =

(2) 5.3 の左表現 = , 5.3 の右表現 =

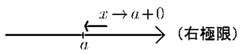
2. ＜左極限・右極限＞

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a-0}$



(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a+0}$



と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2-0}$ とは $x = 1.9,\ \ x = 1.99,\ \ x = 1.999, \cdots$

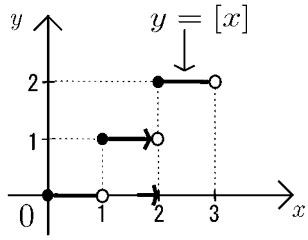
というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$[1.9] = 1$, $[1.99] = 1$, $[1.999] = 1$, $\cdots$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2-0}[x] = 1}$$



例 3 $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}[x]$ を考える。

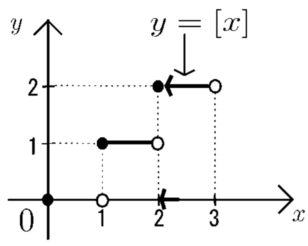
$\boxed{x \to 2+0}$ とは $x = 2.1,\ \ x = 2.01,\ \ x = 2.001, \cdots$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$[2.1] = 2$, $[2.01] = 2$, $[2.001] = 2$, $\cdots$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2+0}[x] = 2}$$



問 2 次の極限値を求めよ。

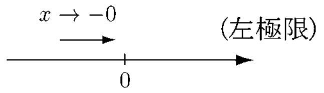
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x] =$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x] =$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}[x] =$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 3+0}[x] =$

< 左極限・右極限 2 >

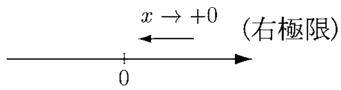
(1) 0 への左極限 $x \to 0-0$ を略して $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{x \to -0}$ とは $x = -0.1$, $x = -0.01$, $x = -0.001$, $\cdots$ というふうに 0 より小さい値をとりながら 0 に近づく極限である。



(2) 0 への右極限 $x \to 0+0$ を略して $\boxed{x \to +0}$ と書く。

$\boxed{x \to +0}$ とは $x \to 0.1$, $x = 0.01$, $x = 0.001$, $\cdots$ というふうに 0 より大きい値をとりながら 0 に近づく極限である。

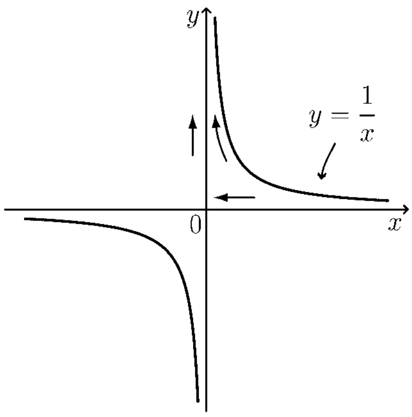


問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} [x] =$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} [x] =$

例 1　(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x}$ を考える。x と $\dfrac{1}{x}$ の対応

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000	100000	1000000



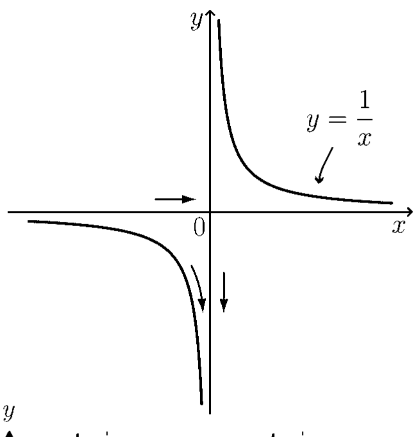
より $x \to +0$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は限りなく大きくなる。

従って

$$\boxed{\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{1}{x}$ を考える。x と $\dfrac{1}{x}$ の対応

x	−0.1	− 0.01	− 0.001	− 0.0001	−0.00001
$\frac{1}{x}$	− 10	− 100	− 1000	−10000	− 100000



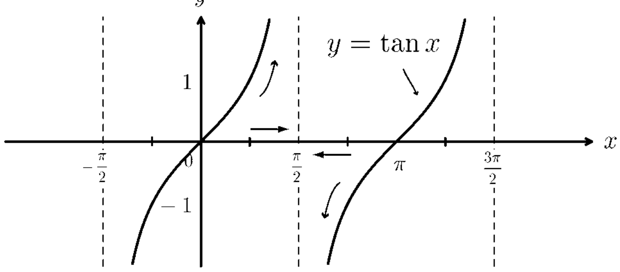
より

$$\boxed{\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty}$$

例 2　右図より

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$



問 2　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2}$

< 左極限・右極限 3 >

関数 $f(x)$ が「 $x \to a$ のとき $f(x) \to b$ に収束する $\left(= \lim_{x \to a} f(x) = b\right)$」ということは， x が a 以外の値をとりながら， a に限りなく近づくとき，どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に近づくという意味である。従って左極限 $\left(\lim_{x \to a-0} f(x)\right)$ および，右極限 $\left(\lim_{x \to a+0} f(x)\right)$ も共に b に収束する。逆に左極限と右極限が共に b に収束すれば $\lim_{x \to a} f(x) = b$ が成り立つ。すなわち，

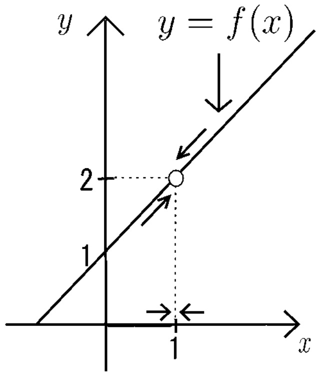
[定理] $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = b \ \text{かつ} \ \lim_{x \to a+0} f(x) = b}$

が成り立つ（証明略）。

例 1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$ の場合，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

より $\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}$



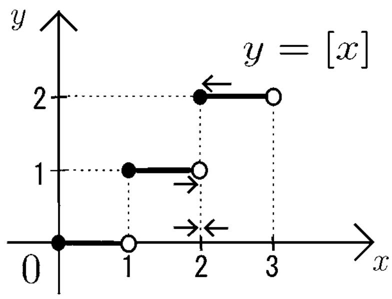
が成り立つ。これは 1 ページ例 3 をより正確に表現したものである。

(注) この例 1 のように $x = 1$ の値が定義されてなくても $\lim_{x \to 1} f(x)$ が定まるときがある。

例 2 $f(x) = [x]$ の場合

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} f[x] = 1$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f[x] = 2$$



であるから左極限と右極限の値が違うので 極限 $\lim_{x \to 2} f(x)$ は定まらない。

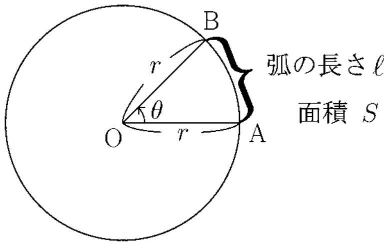
問 $f(x)$ が以下の場合について，次の左極限と右極限を求め，両方が一致した場合は，$\lim_{x \to a} f(x) = b$ の形で書け。

(1) $\lim_{x \to -0} |x| \quad =$ $\qquad\qquad$, $\quad \lim_{x \to +0} |x| \quad =$

(2) $\lim_{x \to -0} \dfrac{|x|}{x} =$ $\qquad\qquad$, $\quad \lim_{x \to +0} \dfrac{|x|}{x} =$

< 弧度法の復習 >

中心角 θ，半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



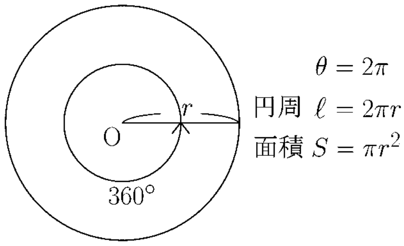
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360°$ のときは

ℓ は円周の長さだから

$$\ell = 2\pi r$$

であり S は円の面積だから

$$S = \pi r^2$$

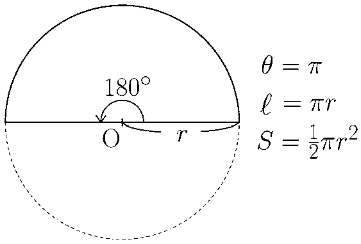


(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180°$ のときは

(1) の半分であるから

$$\ell = \pi r$$

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$

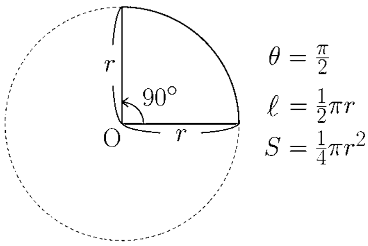


(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90°$ のときは

(1) の $\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\ell = \frac{1}{2}\pi r$$

$$S = \frac{1}{4}\pi r^2$$



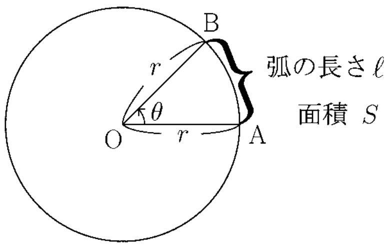
問 1 次の表を完成させせよ。

度数法		$60°$	$90°$	$120°$		$360°$
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

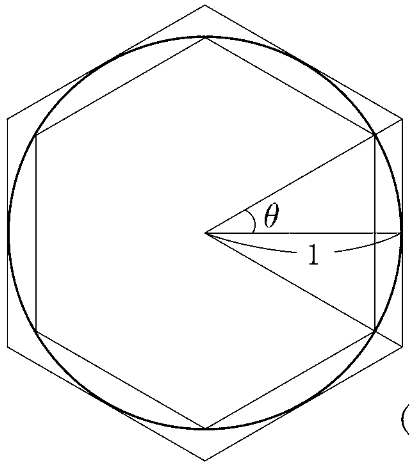
問 2 上の表を参考にして，一般に角度が θ（ラジアン）であるとき弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$



< 三角関数の極限 1 >

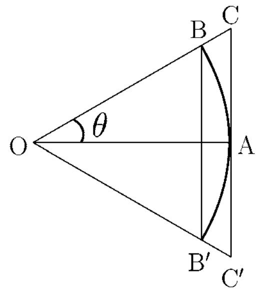


(図1)

円周率 π は半径 1 の円周の長さである。
アルキメデスは半径 1 の円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さを計って円周率 π を計算した。実際には正 6 角形から始めて正 12 角形，正 24 角形，48 角形，96 角形と計算して

$$3\frac{10}{71}(=3.1408)<\pi<3\frac{1}{7}(=3.1429)$$

を得たのである。



(図2)

アルキメデスの考えは図 2 の角 θ が小さくなるとき，弧 BAB′ の長さは内接多角形の辺 BB′ と外接多角形の辺 CC′ で近似でき，さらに

$$\text{BB}' \text{の長さ} < \text{弧 BAB}' \text{の長さ} < \text{CC}' \text{の長さ}$$

がなりたつ。

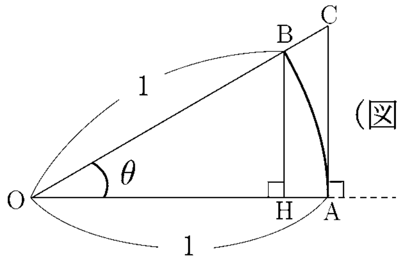
ここではアルキメデスの考えを用いてある不等式を導く。

図 3 において角度 θ は弧度法で測り $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

また

ℓ_1 : 線分 BH の長さ
ℓ_2 : 弧 AB の長さ
ℓ_3 : 線分 AC の長さ

とする。



(図3)

問 1 ℓ_1 と ℓ_3 の長さを θ を用いた三角関数で表せ。

$\ell_1 =$ 　　　　　　　　　　　　, 　　$\ell_3 =$

問 2 ℓ_2 の長さを θ を用いて表せ。(ヒント:半径 r，中心角 θ の弧の長さは前ページ問 2 の ℓ)

$\ell_2 =$

問 3 アルキメデスの考えより $\ell_1<\ell_2<\ell_3$ である。この不等式を θ で表し，単純化せよ。

問 4 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して問 3 で得られた不等式を次の形にせよ。

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \text{ のとき } \boxed{} < \theta < \boxed{}$$

$\boxed{}$ の中を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

＜ 三角関数の極限 2 ＞

[定理] $$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

問 以下の証明中の $\boxed{}$ 内に適当な数または数式を記入せよ。

[定理の証明]

[1] $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示す。

前ページの結果より $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \quad \sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

がわかる。$\cos\theta > 0$，$\theta > 0$ より

$$\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{} < \frac{\sin\theta}{\theta} \qquad \cdots ①$$

また

$$\sin\theta < \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < \boxed{} \qquad \cdots ②$$

①，②より

$$\boxed{} < \frac{\sin\theta}{\theta} < \boxed{} \qquad \cdots ③$$

ここで $\theta \to +0$ のとき $\cos\theta \to \cos 0 = 1$ より③から

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

がわかる。

[2] $\displaystyle\lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示す。

$\theta \to -0$ のとき $\theta = -\theta_1$ $(\theta_1 > 0)$ とおくと，$\theta_1 \to +0$ より

$$\lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1} = \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\boxed{}}{-\theta_1} = \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\sin\theta_1}{\theta_1} = 1$$

[3] [1] と [2] より右極限値と左極限値が一致するので定理の極限が証明された。

(証明終)

< 三角関数の極限 3 >

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

が成り立つ。この極限の応用問題を練習する。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

＜ 三角関数の極限 4 ＞

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\ ,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0}$$

が成り立つ。

例 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos h+\cos\frac{\pi}{2}\sin h-\sin\frac{\pi}{2}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\cos h-1)+\cos\frac{\pi}{2}\sin h}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sin h}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\times 0+\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\times 1$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\sin\frac{\pi}{3}}{h}$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)-\cos\pi}{h}$

(3) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

(4) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

＜関数の極限の練習＞

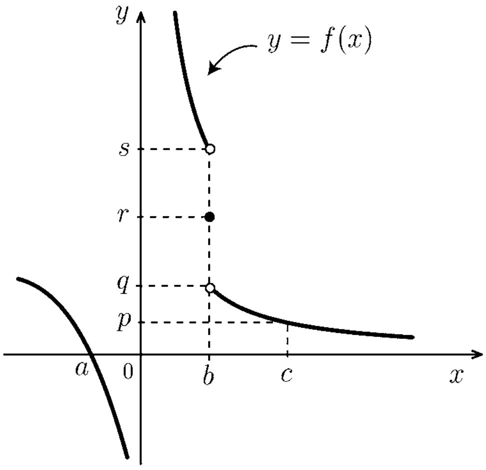
問 1 関数 $y = f(x)$ のグラフが右図のような場合に次の極限値を求めよ。(極限値が存在しない場合はそのように記せ。)

$\lim_{x\to+0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to-0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to a+0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to a-0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to a} f(x) =$

$\lim_{x\to b+0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to b-0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to b} f(x) =$

$\lim_{x\to c+0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to c-0} f(x) =$ 　, $\lim_{x\to c} f(x) =$



問 2 次の極限値を求めよ。(極限値が存在しない場合はそのように記せ。)

(1) $\lim_{x\to+0} \dfrac{1}{x}$ 　(2) $\lim_{x\to-0} \dfrac{1}{x}$ 　(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

(4) $\lim_{x\to+0} \dfrac{1}{x^2}$ 　(5) $\lim_{x\to-0} \dfrac{1}{x^2}$ 　(6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

(7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

(9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{3}x\right)}{x}$ 　(10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$

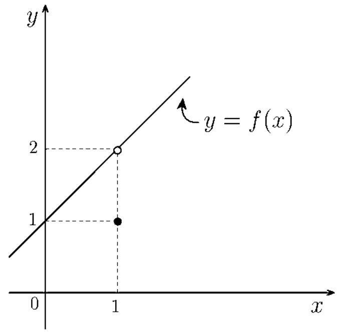
(11) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$ 　(12) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$

(13) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

＜関数の連続性＞

関数 $f(x)$ の定義域内の点 a に対し $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$ が成り立つとき, $f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという。

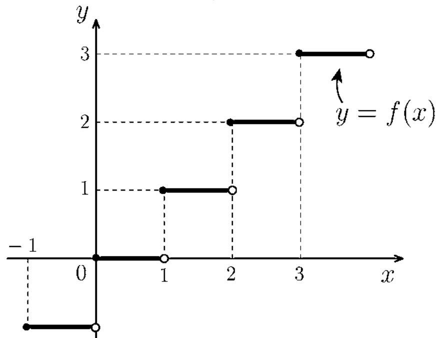
例 1　$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ が定義域にないので, $x=1$ で連続ではない。



例 2　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ 1 & : \quad x = 1 \end{cases}$　のとき

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

$f(1) = 1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ だから $x=1$ で $f(x)$ は連続ではない。



例 3　$f(x) = [x]$　(ガウス記号) のとき,

$[x]$ は x を超えない最大の整数であるから,

$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。これから

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$$

であるから, $x \to 1$ のときの $f(x)$ の極限はない。

従って $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ の値が存在しないので, $x=1$ で連続ではない。

(注)　例 2, 例 3 のように連続でない場合を**不連続**という。不連続の場合はグラフがつながっていない。

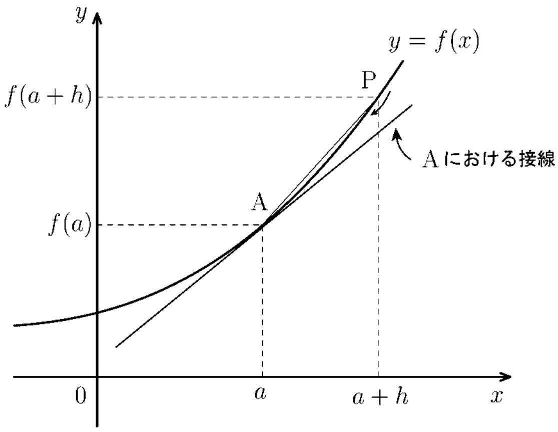
問　$f(x)$ が次の関数のとき, (　) 内の点で連続かどうか判定し, その理由を述べよ。

(1) $f(x) = \tan x$　　$(x = \frac{\pi}{2})$

(2) $f(x) = |x|$　　$(x = 0)$

(3) $f(x) = x - [x]$　　$(x = 1)$

＜微分可能性＞



関数 $f(x)$ について, 極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき, 関数 $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという。また, この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率といい, $\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき, 微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a\ ,\ f(a))$ における接線の傾きを表している。

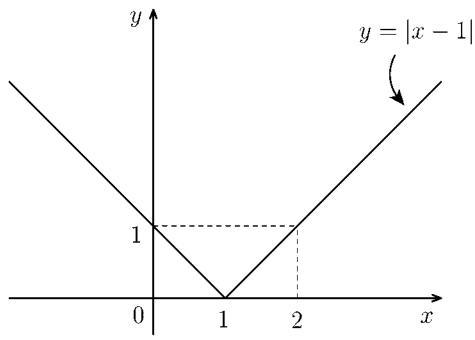
[定理] $\boxed{\text{関数 } f(x) \text{ が } x=a \text{ で微分可能であれば, } x=a \text{ で連続である。}}$

[証明] $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=f'(a)\times 0=0$ より

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$。従って $x=a$ で連続である。(証明終)

ただしこの逆は成り立たない。

例 $f(x)=|x-1|$ は $x=1$ で連続である。(右図)
しかし $x=1$ で微分可能ではない。実際,



$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=-1$$

より極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ は存在しないからである。

(注) 一般にグラフがなめらかな曲線のときは微分可能であり, 微分係数はその傾きを表す。しかしグラフが尖った先端では (左右の傾きが違うため) 微分可能でない。

問 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は, $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ が定義域内のある範囲の全ての値で微分可能であるとき、$f(x)$ はその範囲で微分可能であるという。

関数 $f(x)$ が、ある範囲で微分可能であるとき、その範囲の任意の値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を、$f(x)$ の**導関数**といい、$\boldsymbol{f'(x)}$で表す。導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \qquad \text{(導関数の定義)}$$

例 $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を定義に従って求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、$f(x)$ を**微分する**という。

問 次の関数を、定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

＜ 導関数 2 ＞

例 1　前ページの例の場合 $f(x)=\sqrt{x}$ のとき $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であった。これを

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

と略記する。

基礎数学ワークブック入門編 $No.3$ で次のことが成り立つことを学んでいる。

$$\boxed{(C)' \;=\; 0} \qquad (C\text{ は定数})$$

$$\boxed{(x^n)' \;=\; nx^{n-1}} \qquad (n\text{ は自然数})$$

さらに $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき次式が成り立つ。

1. $\{kf(x)\}' \;=\; kf'(x)$　　（k は定数）
2. $\{f(x)+g(x)\}' \;=\; f'(x)+g'(x)$
3. $\{f(x)-g(x)\}' \;=\; f'(x)-g'(x)$

例 2　$\{4x^3-5x^2+6\}'=4\times(x^3)'-5\times(x^2)'+(6)'=4\times 3x^2-5\times 2x+0=12x^2-10x$

例 3　$\{(x^2-3)(4x^2+5)\}'=\{4x^4-7x^2-15\}'=16x^3-14x$

問　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^5$

(2)　$y=x^6$

(3)　$y=-3x^4$

(4)　$y=x^5+2x^4$

(5)　$y=2x^4-3x^5$

(6)　$y=(x-1)(x^2+1)$

(7)　$y=(x+1)(x^2-4x)$

(8)　$y=(x^2-1)(x^2+x+1)$

＜積の微分＞

$f(x), g(x)$ が共に微分可能であるとき, 次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\left\{f(x)\times g(x)\right\}' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)}$$ （積の微分）

[証明] $\left\{f(x)\times g(x)\right\}' = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

ここで $f(x)$, $g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \quad , \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また, 微分可能ならば連続であるから $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

従って $\left\{f(x)\times g(x)\right\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ （証明終）

例 1 $\left\{(x^2-3)(4x^2+5)\right\}' = (x^2-3)'\times(4x^2+5) + (x^2-3)\times(4x^2+5)'$

$$= 2x\times(4x^2+5) + (x^2-3)\times 8x = 16x^3 - 14x$$

例 2 $\left\{(x+1)^2\right\}' = \left\{(x+1)(x+1)\right\}' = (x+1)'\times(x+1) + (x+1)\times(x+1)' = 2(x+1)$

例 3 $\left\{(x+1)^3\right\}' = \left\{(x+1)^2\times(x+1)\right\}' = \left\{(x+1)^2\right\}'\times(x+1) + (x+1)^2\times(x+1)' = 3(x+1)^2$

問 1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x-1)(x^2+1)$

(2) $y = (x+1)(x^2-4x)$

(3) $y = (x^2-1)(x^2+x+1)$

(4) $y = (x+1)^4$

問 2 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がともに微分可能であるとき次式を証明せよ。

$$\left\{f(x)g(x)h(x)\right\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

（ヒント）$\left\{\big(f(x)g(x)\big)\times h(x)\right\}'$ として積の微分公式を 2 回用いる。

< 商の微分 >

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の導関数について, 次の公式が成り立つ。

1. $\boxed{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

2. $\boxed{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

[1] の証明

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} \times \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\times g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \times \frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}$$

$$= -g'(x) \times \frac{1}{g(x)g(x)} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ (証明終)

問 1 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ であることと上記 1 と積の微分公式を用いて 2 を証明せよ。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2)'\times(x-1) - x^2\times(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\dfrac{1}{2x^2}$

(3) $\dfrac{x+1}{x^2}$

(4) $\dfrac{x^3}{x+1}$

< 三角関数の微分 >

次が成り立つ.

1. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$, 2. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

3. $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

[証明] 1 と 2 は 9 ページの結果より得られる。

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

3 は 1 と 2 の結果を用いると商の微分より

$$(\tan x)' = \left\{ \frac{\sin x}{\cos x} \right\}' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(証明終)

問 1 次の関数を微分せよ.

(1) $3\sin x + 4\cos x$

(2) $-3\cos x + 5\tan x$

(3) $\sin x \cos x$

(4) $\sin^2 x$

(5) $\cos^2 x$

(6) $x \tan x$

(7) $\dfrac{\sin x}{x}$

(8) $\dfrac{\cos x}{x}$

問 2 次の導関数を計算し，結果を $\sin x$ または $\cos x$ を用いてあらわせ.

(1) $\mathrm{cosec}\ x = \dfrac{1}{\sin x}$

(2) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(3) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

< 微分の練習 1 >

問 1　次の関数を定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

問 2　次の関数を微分せよ。

(1) $(x^2 - 2x)(3x+1)$

(2) $(2x^3 + 1)(3x^2 - 1)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)$

(4) $\dfrac{2x}{x+1}$

(5) $\dfrac{x-1}{x^2+1}$

(6) $\dfrac{3x}{(x+1)^2}$

(7) $4\sin x - 5\cos x$

(8) $x^2 \sin x$

(9) $x^3 \cos x$

(10) $\dfrac{\tan x}{x}$

(11) $2\sec x + 3\cot x$

(12) $\dfrac{\cos x}{3+\sin x}$

問 3　次の関数の導関数を求め、結果を分数を用いないで表せ。
ただし n は自然数とする。

(1) x^{-3}

(2) x^{-4}

(3) x^{-n}

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の
導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。
変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)$$

等の記号で表す。

例 1 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\dfrac{dy}{dt} =$

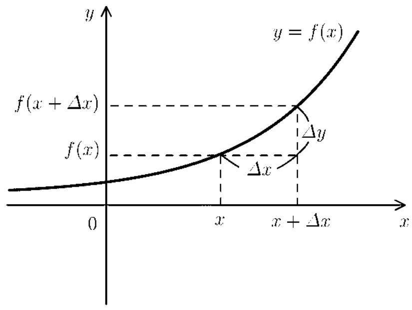
(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\dfrac{dS}{dr} =$

(5) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\dfrac{dV}{dr} =$

< 増分記号 Δ(デルタ) >

変数 x の増えた量を「x の増分」といい、「Δx」という記号で表す。
Δx は文字が 2 つであるが 1 つの量を表す。



関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、
y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \to 0$ のときの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\dfrac{dy}{dx}$ と書く。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例 $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限値を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\displaystyle \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

< 合成関数の微分 1 >

例 関数 $y=\sin(x^3)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u=x^3$ とおくと $y=\sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u=(x+\Delta x)^3-x^3$$

$$\Delta y=\sin(u+\Delta u)-\sin(u)\quad \Big(=\sin\big((x+\Delta x)^3\big)-\sin(x^3)\Big)$$

とおくと、 $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin(u+\Delta u)-\sin(u)}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\right)$$

$$=(\sin u)'\times(x^3)'$$

$$=\cos(u)\times 3x^2=\cos(x^3)\times 3x^2=3x^2\cos(x^3)$$

問 1 関数 $y=\cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u=x^4$ とおくと、 $y=\cos(u)$ となる。

$$\Delta u=(x+\Delta x)^4-x^4$$

$$\Delta y=\cos(u+\Delta u)-\cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx}=$

問 2 関数 $y=\sin(x^3+2x^2)$ の導関数を例にならって求めよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx}=$

< 合成関数の微分 2 >

問 1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき、$\dfrac{dy}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ を、$\boxed{\dfrac{dy}{du}}\left(= \lim_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)$ と $\boxed{\dfrac{du}{dx}}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(u^7\right)' \times \left(x^3 + 5x^2\right)' = 7u^6 \times \left(3x^2 + 10x\right) = 7\left(x^3 + 5x^2\right)^6\left(3x^2 + 10x\right)$$

問 2 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 2x + 5)^3$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^5 - 2x^2)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 3 >

例 1　$y=(x^3+4x)^7$ を考える。$u=x^3+4x$ とおくと $y=u^7$ より

$$\left((x^3+4x)^7\right)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times(x^3+4x)'=7u^6\times(3x^2+4)=7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$$

問 1　次の導関数をもとめよ。

(1) $\left((3x+5)^7\right)'=$

(2) $\left((4x^2+5x)^8\right)'=$

例 2　$y=\left(f(x)\right)^7$ を考える。$u=f(x)$ とおくと $y=u^7$ より

$$\left(\left(f(x)\right)^7\right)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times\left(f(x)\right)'=7u^6\times f'(x)=7\left(f(x)\right)^6\times f'(x)$$

問 2　自然数 n に対し、次の導関数を求めよ。

$\left(\left(f(x)\right)^n\right)'=$

例 3　$\left((x^5+6x)^8\right)'=8(x^5+6x)^7\times(x^5+6x)'=8(x^5+6x)^7(5x^4+6)=8(5x^4+6)(x^5+6x)^7$

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\left((3x+4)^5\right)'=$

(2) $\left((4x^2+9x)^6\right)'=$

(3) $\left((x^4-2x^3)^{10}\right)'=$

(4) $\left((3+4\sin x)^5\right)'=$

(5) $\left((x-3\cos x)^7\right)'=$

< 合成関数の微分 4 >

例 1 $y = \sin(x^3 + 4x)$ を考える。$u = x^3 + 4x$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\big(\sin(x^3 + 4x)\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times (x^3 + 4x)' = \cos u \times (3x^2 + 4)$$
$$= (3x^2 + 4)\cos(x^3 + 4x)$$

例 2 $y = \cos(x^7 + 5x^3)$ を考える。$u = x^7 + 5x^3$ とおくと $y = \cos u$ より

$$\big(\cos(x^7 + 5x^3)\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\cos u)' \times (x^7 + 5x^3)' = -\sin u \times (7x^6 + 15x^2)$$
$$= -(7x^6 + 15x^2)\sin(x^7 + 5x^3)$$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\sin(5x - 4)\big)' =$

(2) $\big(\sin(x^6 + 7x^2 - 3)\big)' =$

(3) $\big(\cos(4x + 3)\big)' =$

(4) $\big(\cos(x^5 - 2x + 1)\big)' =$

例 3 一般の関数 $f(x)$ に対して $\sin\big(f(x)\big)$ の導関数を求めたい。

$y = \sin\big(f(x)\big)$, $u = f(x)$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times \big(f(x)\big)' = \cos u \times f'(x) = \cos\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

よって

$$\boxed{\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' = \cos\big(f(x)\big) \times f'(x)}$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' =$

例 4 $\big(\sin(x^3 - 4x^2 + 5x)\big)' = \cos(x^3 - 4x^2 + 5x) \times (x^3 - 4x^2 + 5x)'$

$$= (3x^2 - 8x + 5)\cos(x^3 - 4x^2 + 5x)$$

問 3 次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\sin(x^6 + 7x^5 - 3x^2 + 4x)\big)'$

$=$

(2) $\big(\sin(x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x + 1)\big)'$

$=$

< 対数関数の導関数 1 >

a を 1 でない正の数とするとき, 対数関数 $\log_a x$ の導関数を求めたい。導関数の定義 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ に従って計算する。

$$\Big(\log_a x\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)$$

ここで $\dfrac{\Delta x}{x} = h$ とすると $\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ より

$$\Big(\log_a x\Big)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log_a(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

となる。そこで $h \to 0$ のときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の極限を調べてみる。

h に　0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 , $\cdots$

および　-0.1 , -0.01 , -0.001 , -0.0001 , $\cdots$

を代入して, $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算すると, 次の表が得られる。

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$		h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	$2.59342\cdots$		-0.1	$2.867971\cdots$
0.01	$2.704813\cdots$		-0.01	$2.731999\cdots$
0.001	$2.716923\cdots$		-0.001	$2.719642\cdots$
0.0001	$2.718145\cdots$		-0.0001	$2.718417\cdots$
0.00001	$2.718268\cdots$		-0.00001	$2.718295\cdots$

この表から予想されるように, $h \to 0$ のとき $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は一定の値に限りなく近づく。この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す。

$$\boldsymbol{e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

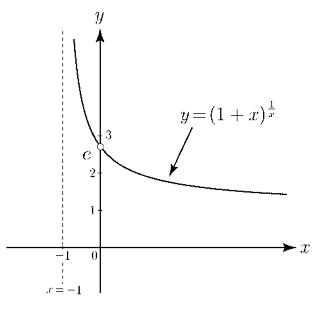
e は無理数で, その値は

$\boldsymbol{e}= 2.71828182845\cdots$

であることが知られている。$\boldsymbol{e}$ を**ネピアの数** (または**自然数の底**) という。

(注)1. $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ でもある。

2. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ のグラフは右図のようなグラフである。



＜対数関数の導関数 2＞

例　関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。定義から

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_{10}(2+\Delta x) - \log_{10} 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left\{ \log_{10}\left(\frac{2+\Delta x}{2}\right)\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_{10}\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ここで $\dfrac{\Delta x}{2} = h$ とおくと、$\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ より

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \log_{10}(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \log_{10}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\} = \frac{1}{2}\log_{10} e$$

(注) ここで前ページの結果 $\displaystyle\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ を使った。

問 1　例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ と導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。(ただし $x > 0$ とする)

(1) $f'(3) =$

(2) $f'(x) =$

問 2　a を 1 でない正の数とする。$f(x) = \log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

$f'(x) =$

< 自然対数 >

問 1 前ページの問の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。(ただし $a>0,\ a\neq 1$)

(1) $(\log_{10} x)' =$ (2) $(\log_a x)' =$

問 2 底が e(ネピアの数 $\fallingdotseq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \quad \text{(自然対数)}$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。
(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため、自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例 $\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$ $\ln\sqrt{e} = \log_e\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

$\log\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$ $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -2$

問 3 次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$ (2) $\log(\sqrt[3]{e})$ (3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right)$ (4) $\log 1$

(5) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ (6) $\ln(\sqrt[4]{e})$ (7) $\ln(e)$ (8) $\ln(e\sqrt{e})$

問 4 問 2 の結果を使って自然対数の導関数を求めよ。

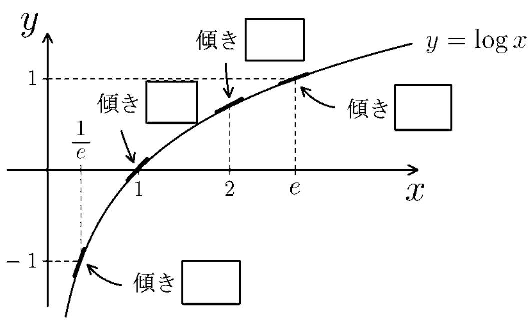
$(\log x)' =$

$(\ln x)' =$

問 5 $f(x) = \log x$ のとき次の微分係数を求め、右図の□内に傾きを示す数を入れよ。

$f'\left(\dfrac{1}{e}\right) =$, $f'(1) =$

$f'(2) =$, $f'(e) =$



$<\log f(x)$ の導関数 $>$

例　関数 $y = \log(x^2+3x+4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2+3x+4$　とおくと　$y = \log u$　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log u)' \times (x^2+3x+4)'$$
$$= \frac{1}{u} \times (2x+3) = \frac{1}{x^2+3x+4} \times (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

問 1　例にならって、次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^3+2x-5)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log(1+\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log(5-\cos x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2　上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y = \log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx} = \Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)' = \qquad\qquad}$

例 2　$\Big(\log(\cos x)\Big)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

問 3　問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $\Big(\log(x^2+2x)\Big)'$　　(2) $\Big(\log(x^6+3x^4)\Big)'$　　(3) $\Big(\log(\sin x)\Big)'$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

＜ 逆関数の微分 1 ＞

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問 1 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

$y = \cos^{-1} x$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2 $\tan x$ の導関数の公式 $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を使って $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

$y = \tan^{-1} x$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(ヒント) $\dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

< 逆関数の微分 2 >

例 1　$y = x^{\frac{1}{3}}$ の導関数を求める。

$$y = x^{\frac{1}{3}} \iff x = y^3$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

よって $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

問 1　次の導関数を求めよ。（ただし n は自然数である）

(1)　$y = x^{\frac{1}{4}}$　　　　(2)　$y = x^{\frac{1}{n}}$

例 2　$y = 10^x$ の導関数を求める。

$$y = 10^x \iff x = \log_{10} y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\log_{10} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_{10} e} = \frac{y}{\log_{10} e} = \frac{10^x}{\log_{10} e}$$

よって $\left(10^x\right)' = \dfrac{10^x}{\log_{10} e} = 10^x \log_e 10$

問 2　次の導関数を求めよ。（ただし $a > 0$, $a \neq 1$ ）

(1)　$y = 2^x$　　　　(2)　$y = a^x$

< 指数関数の微分 >

$a > 0$, $a \neq 1$ なる数 a に対して指数関数 a^x の導関数は前ページより

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log_e a = a^x \log a}$$

である。特に $a = e\ (= 2.73\cdots)$ のときは $\log e = \log_e e = 1$ より

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

このように微分しても変わらない関数は e^x の定数倍だけである。
そこでこの指数関数を特に $e^x = \mathrm{EXP}(x)$ という記号で表すことがある。

例 1 $y = e^{x^2}$ の導関数を求めたい。 $u = x^2$ とおくと $y = e^u$ より

$$\left(e^{x^2}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times \left(x^2\right)' = e^u \times (2x) = e^{x^2} \times 2x = 2xe^{x^2}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{3x})' =$

(2) $\left(e^{x^2+3}\right)' =$

(3) $\left(e^{-x^2+2x}\right)' =$

問 2 例 1 を参考にして $y = e^{f(x)}$ の導関数を求め、$f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ。

$\left(e^{f(x)}\right)' =$

例 2 $\left(e^{-3x^2}\right)' = e^{-3x^2} \times (-3x^2)' = e^{-3x^2} \times (-6x) = -6xe^{-3x^2}$

問 3 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(e^{-3x}\right)' =$

(2) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' =$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (28 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) 両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2 $a > 0$ $(a \neq 1)$ に対し、$y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3 $a = e$ (ネピア数) のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

< 対数微分法 2 >

例 $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\left(= \sqrt{x^3}\right)$ の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad \left(= \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

問 1 $y = x^{\frac{4}{3}}$ $\left(= \sqrt[3]{x^4}\right)$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$

問 2 一般の実数 r に対し、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)' =$

$<$ x^r の導関数 $>$

前のページより

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

が成り立つ。

例 1 $y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1 次の導関数を求め、結果を根号 ($\sqrt{}$, $\sqrt[n]{}$ 等) で表せ。

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$ (2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' =$ (3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' =$

例 2 $y = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\boxed{\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2 次の導関数を求め、結果を分数の形にせよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$ (2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$ (3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

例 3 $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3 次の導関数を求め、結果を例 3 のように根号で表せ。

(1) $(\sqrt[4]{x})' =$ (2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' =$ (3) $(\sqrt{x})' =$

例 4 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \quad \left(= -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$

問 4 次の導関数を求め、結果を例 4 のように根号で表せ。

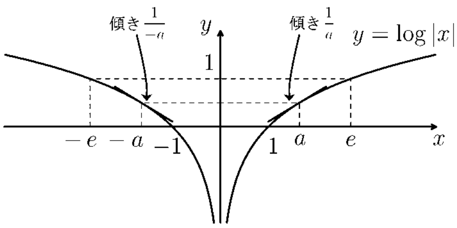
(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$ (2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' =$ (3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

< $\log|x|$ の導関数 >

例 1 関数 $y = \log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a > 0$ に対し

$$\log|-a| = \log a = \log|a|$$

より、 $y = \log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $y' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $y' = (\log|x|)' = (\log(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x \neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)' = \frac{1}{x}}$$

となる。

例 2 関数 $y = \log|\cos x|$ を微分したい。
$u = \cos x$ とおくと $y = \log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log|u|)' \times (\cos x)' = \frac{1}{u} \times (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x)$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \log|\tan x|$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log|x^2 + 3x|$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log|f(x)|$, $\dfrac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 2 >

問 1　次の導関数の公式を書け。(ただし k は定数とする)

(1) $(k)' =$　　(2) $(x^n)' =$

(3) $(\sin x)' =$　　(4) $(\cos x)' =$

(5) $(\log x)' =$　　(6) $(e^x)' =$

(7) $(\sin^{-1} x)' =$　　(8) $(\tan^{-1} x)' =$

問 2　次の導関数の公式を $f(x)$，$g(x)$，$f'(x)$，$g'(x)$ で表せ。(ただし k は定数とする)

(1) 和の微分　$\big(f(x) + g(x)\big)' =$

(2) 差の微分　$\big(f(x) - g(x)\big)' =$

(3) 定数倍の微分　$\big(kf(x)\big)' =$

(4) 積の微分　$\big(f(x) \times g(x)\big)' =$

(5) 分数関数の微分　$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

問 3　合成関数の微分の公式 $\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)}$ を使って次の関数の導関数を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(1) $\Big(\big(f(x)\big)^n\Big)' =$　　(2) $\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' =$

(3) $\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' =$　　(4) $\Big(\log|f(x)|\Big)' =$

(5) $\big(e^{f(x)}\big)' =$

問 4　次の導関数を求めよ。

(1) $(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 8)' =$　　(2) $\big(\sqrt{x}\big)' =$

(3) $\big(x\sqrt{x}\big)' =$　　(4) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' =$

(5) $(\sin x \cos x)' =$　　(6) $(\tan x)' =$

(7) $\big(x\log x - x\big)' =$　　(8) $\big(-\log|\cos x|\big)' =$

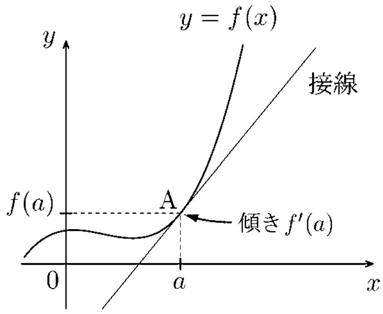
(9) $\big(e^{2x}\sin(3x)\big)' =$　　(10) $\Big(\log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)\Big)' =$

＜微分係数＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

は $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の傾きを表す。



(図1)

問1　$f(x)=\sin x$ の導関数および次の微分係数を求め，図2の $\boxed{\quad}$ 内に傾きを記入せよ。

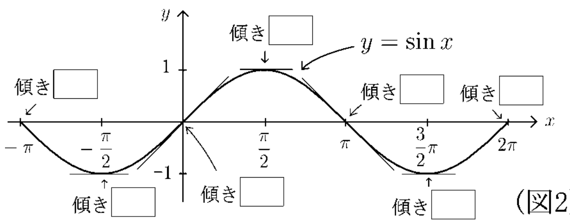
$f'(x)=$

$f'(-\pi)=$　　　　$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$

$f'(0)=$　　　　$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$f'(\pi)=$　　　　$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=$

$f'(2\pi)=$



(図2)

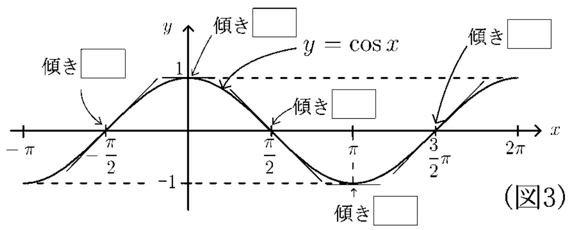
問2　$f(x)=\cos x$ の導関数および次の微分係数を求め，図3の $\boxed{\quad}$ 内に傾きを記入せよ。

$f'(x)=$

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$　　　　$f'(0)=$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$　　　　$f'(\pi)=$

$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=$



(図3)

問3　$f(x)=e^x$ とする。

(1)　$f^{-1}(x)$ を求めよ。　$f^{-1}(x)=$

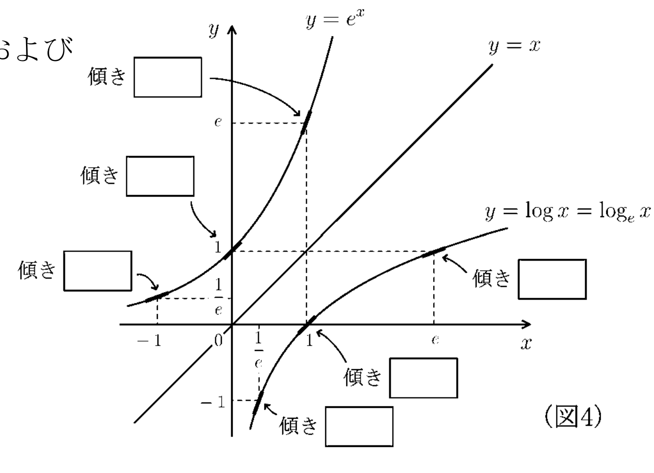
(2)　$g(x)=f^{-1}(x)$ とする。以下の導関数および微分係数を求めよ。

$f'(x)=$　　　　$g'(x)=$

$f'(-1)=$　　　　$g'\left(\frac{1}{e}\right)=$

$f'(0)=$　　　　$g'(1)=$

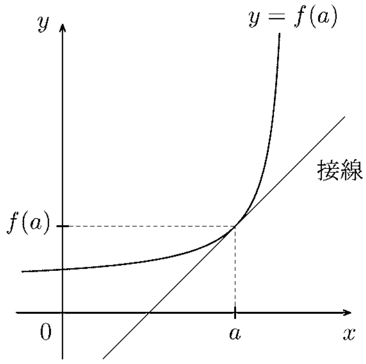
$f'(1)=$　　　　$g'(e)=$



(図4)

(3) 図4の $\boxed{\quad}$ 内に傾きをいれよ。

< 接線の方程式 1 >



$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)} \quad \text{(接線の方程式)}$$

である。

例 1 $f(x) = e^{2x}$ のとき $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2e^0 = 2$

よって $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1 \text{ より } \underline{y = 2x + 1} \text{ (接線)}$$

例 2 $f(x) = \log x$ のとき $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x \text{ より } \underline{y = \frac{1}{e}x} \text{ (接線)}$$

例 3 $f(x) = \cos x$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x) = -\sin x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

よって $y = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \text{ より } \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}} \text{ (接線)}$$

例 4 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

よって $y = \sqrt{x}$ の $x = 1$ における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ より } \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \text{ (接線)}$$

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \dfrac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

< 接線の方程式 2 >

問 次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = 2\sin(3x)$ の $x = \dfrac{\pi}{9}$ における接線

(2) $y = 5\cos(2x)$ の $x = \dfrac{\pi}{6}$ における接線

(3) $y = \tan(4x)$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \dfrac{1}{2x}$ の $x = -1$ における接線

(5) $y = \sqrt{x}$ の $x = 9$ における接線

(6) $y = \sqrt{4x+1}$ の $x = 2$ における接線

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の $x = 4$ における接線

(8) $y = \dfrac{1}{x^2}$ の $x = 1$ における接線

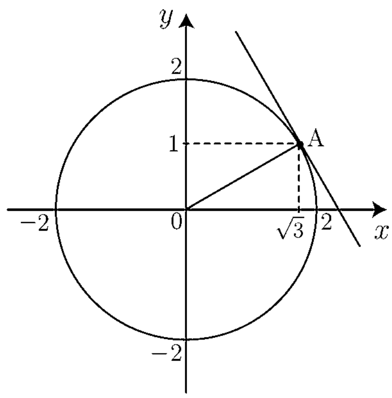
(9) $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線

(10) $y = e^{x^2}$ の $x = 1$ における接線

(11) $y = \log|x|$ の $x = e$ における接線

(12) $y = \log\left(x^2+1\right)$ の $x = 1$ における接線

< 接線の方程式 3 >



例題 原点を中心として半径 2 の円周上の点 A$(\sqrt{3}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(解) 円の方程式

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}\right)$$

に対し，上半円の方程式は

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

である。これを $f(x)$ とおいて，微分すると合成関数の微分より

$$f'(x) = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \times \left(-2x\right) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

となる。よって接線の傾きは

$$f'(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3}} = -\sqrt{3}$$

よって，接線の方程式は

$$y = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 1 \qquad \underline{(答)\ y = -\sqrt{3}x + 4}$$

(注) y が x の関数 $y = f(x)$ であるとき，$y^2 = \{f(x)\}^2$ を x で微分すると合成関数の微分より

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x) \times f'(x) = 2yy'$$

となる。この結果を用いると上の例題が以下のように解ける。

(別解) 円の方程式 $x^2 + y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると

$$2x + 2yy' = 0$$

より

$$y' = -\frac{x}{y}$$

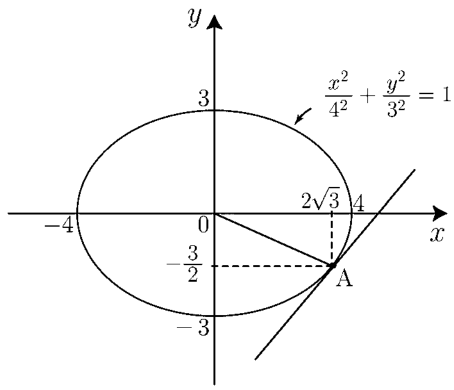
となる。従って $x = \sqrt{3},\ y = 1$ における微分係数は

$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

となって接線の傾きが求まる。

問 原点を中心として半径 4 の円周上の点 A$(2,\ 2\sqrt{3})$ における接線の方程式を求めよ。

< 接線の方程式 4 >



例題 楕円 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 上の点 $\mathrm{A}\left(2\sqrt{3},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(解) 楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{16}+\frac{2yy'}{9}=0$$

より

$$y'=-\frac{9x}{16y}$$

となる。従って $x=2\sqrt{3},\ \ y=-\dfrac{3}{2}$ のときの微分係数は

$$y'=-\frac{9x}{16y}=-\frac{9\times2\sqrt{3}}{16\times(-\frac{3}{2})}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

であるから接線の傾きは $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。 よって接線の方程式は

$$y=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x-2\sqrt{3}\right)-\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}x-6$$

(答) $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}x-6$

問 1 楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(-2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

問 2 円 $x^2+y^2=5^2$ 上の点 $(-3,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ。

問 3 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における接線の方程式を求めよ。
(ただし $r>0$, $\sin\theta\neq0$ とする)

＜ 2 階導関数 ＞

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す。この導関数 $f'(x)$ の導関数

$$\Big(f'(x)\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

を $f(x)$ の **2 階導関数**といい、

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

等の記号で表す。すべて同じ意味である。

例 1　$f(x) = x^4$　のとき　$f'(x) = 4x^3$,　$f''(x) = 12x^2$

例 2　$y = x^3 - 2x^2$　のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$,　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$

問 1　次の 2 階導関数を求めよ。

(1)　$f(x) = 4x^3 - 5x^2$

$f''(x) =$

(2)　$f(x) = \sin x$

$f''(x) =$

(3)　$f(x) = \log x$

$f''(x) =$

(4)　$y = x^5 - x^4$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

(5)　$y = \cos x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

(6)　$y = e^{2x}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

変数が x 以外の文字でも同様な記号を用いる。例えば時間変数 t の関数 $y = f(t)$ のとき

導関数　　$y' = f'(t) = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}f(t)$

2 階導関数　　$y'' = f''(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$

問 2　次の 2 階導関数を求めよ。

(1)　$y = 10t - 4.9t^2$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

(2)　$y = \sin(2t)$

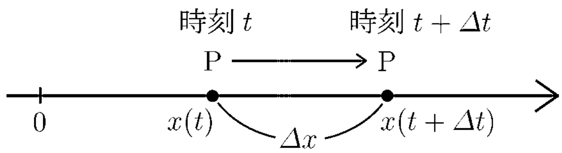
$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

(3)　$y = \cos(3t)$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

< 直線上の運動 >

数直線上を動く点 P を考える。
点 P の位置 (座標) を x とする。
x は時刻 t によってかわるので、



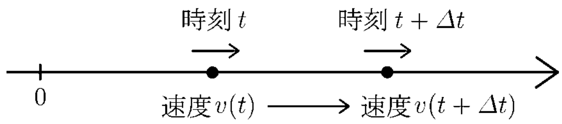
x は t の関数だから $x=x(t)$ と書く。時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの

平均速度は $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ である。$\Delta t\to 0$ のときの極限値を

$v(t)$ とすれば、$v(t)$ は時刻 t での瞬間の速度である。その極限値

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t)=\frac{dx}{dt}$$

を点 P の時刻 t における**速度**という。この式から速度は
位置 $x=x(t)$ を時間変数 t で微分したものであることがわかる。
速度 $v=v(t)$ は時刻 t によってかわる。
時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの速度
の変化の割合 $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$



の $\Delta t\to 0$ のときの極限値 $a(t)$ は、時刻 t での瞬間の速度変化の
割合であり

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=x''(t)$$

を点 P の時刻 t での**加速度**という。

例 時刻 t における位置 $x(t)$ が $x(t)=5-2t+3t^2-4t^3$ である点の
速度 v と加速度 a は

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt}=(5-2t+3t^2-4t^3)'=-2+6t-12t^2 \\ a(t) &= \frac{dv}{dt}=(-2+6t-12t^2)'=6-24t \end{aligned}$$

問 $x(t)$ が以下の場合に、速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

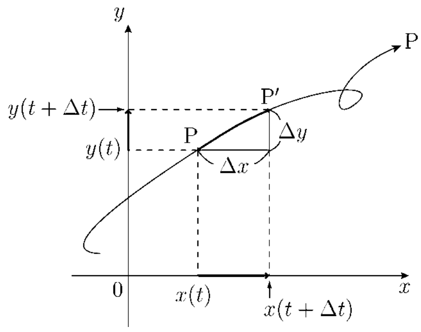
(1) $x(t)=10+4t-5t^2$ $\qquad v(t)=$ $\qquad a(t)=$

(2) $x(t)=3\cos(2t)$ $\qquad v(t)=$ $\qquad a(t)=$

(3) $x(t)=e^{2t}\sin(4t)$ $\qquad v(t)=$ $\qquad a(t)=$

< 平面上の運動 1 >

座標平面上を動く点 P があるとき、時刻 t における点 P の座標を (x, y) とすると、x と y は t の関数であるから



$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t)$$

と表す。

時刻 t における点の位置を $\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$,

時刻 $t + \varDelta t$ における点の位置を $\mathrm{P}'\big(x(t+\varDelta t), y(t+\varDelta t)\big)$

とすると、時刻 t から $t + \varDelta t$ までの間の

x 軸方向の平均速度は $\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t} = \dfrac{x(t+\varDelta t) - x(t)}{\varDelta t}$

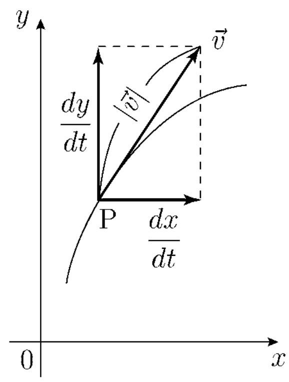
y 軸方向の平均速度は $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t} = \dfrac{y(t+\varDelta t) - y(t)}{\varDelta t}$

直線 PP′ 方向の平均速度の大きさは $\dfrac{\mathrm{PP}'}{\varDelta t} = \dfrac{\sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}}{\varDelta t} = \sqrt{\left(\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}$

であるから、$\varDelta t \to 0$ とすると

x 軸方向の瞬間速度は $\dfrac{dx}{dt} = \displaystyle\lim_{\varDelta t \to 0} \dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}$

y 軸方向の瞬間速度は $\dfrac{dy}{dt} = \displaystyle\lim_{\varDelta t \to 0} \dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}$



そこで x 軸方向と y 軸方向の速度の組

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right) \qquad (\text{速度})$$

を時刻 t における点 P の**速度**または速度ベクトルという。
速度 $\vec{v}$ の大きさは

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad (\text{速さ})$$

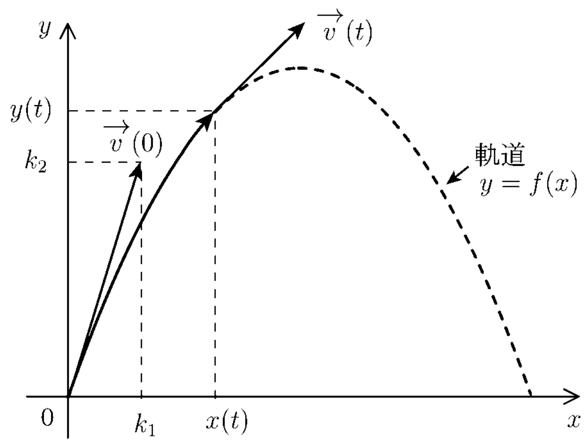
となる。これを**速さ**という。

問 時刻 t における点 $\mathrm{P}(x, y)$ の座標が

$$x = 2t\ ,\quad y = 1 - t^2$$

で表されるとき、時刻 t における速度 $\vec{v}$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

< 平面上の運動 2 >



問 地上から初速 $\overrightarrow{v}(0) = (k_1, k_2)$ で打ち出した物体の t 秒後の水平距離を $x(t)$, 高さを $y(t)$ とすると、(空気抵抗を考えなければ)

$$\begin{cases} x(t) = k_1 t & \text{(水平距離)} \\ y(t) = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 & \text{(高さ)} \end{cases}$$

となる。ここで g は重力加速度 $g = 9.8$ (m/s^2) である。

(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$, 垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = \end{cases}$$

(2) t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t) = \big(v_x(t),\ v_y(t)\big)$ の傾き $\dfrac{v_y(t)}{v_x(t)}$ を求めよ。

$$\frac{v_y(t)}{v_x(t)} =$$

(3) $\begin{cases} x = k_1 t \\ y = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$ から t を消去して、軌道曲線の式 $\big(y = f(x)$ の形$\big)$ を求めよ。

(ただし $k_1 > 0$ とする)

(4) (3) で求めた軌道関数を $f(x)$ とおく。導関数 $f'(x)$ を求めよ。

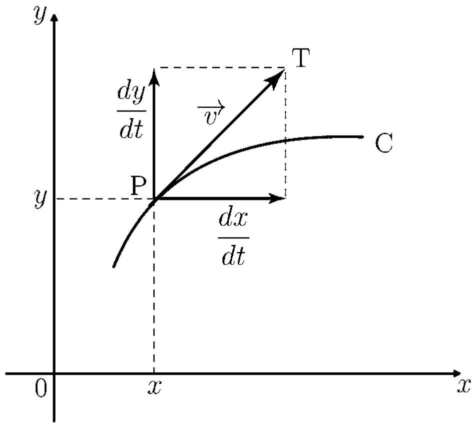
$$f'(x) =$$

(5) $\dfrac{v_y(t)}{v_x(t)} = f'\big(x(t)\big)$ であることを示せ。

(注) (5) の式は $\overrightarrow{v}(t)$ の方向が軌道 $y = f(x)$ 上の点 $\big(x(t),\ y(t)\big)$ における接線と同じ方向であることを意味する。

＜平面上の運動 3＞

時刻 t での点の座標を $\mathrm{P}(x, y)$,
点 P がえがく曲線を C とすると,
曲線 C の接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ で,
合成関数の微分の公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$,
と逆関数の微分の公式 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ より,



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

となる。これは速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}\ ,\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ の方向が，点 P における曲線 C の接線 PT の方向と一致することを示す。

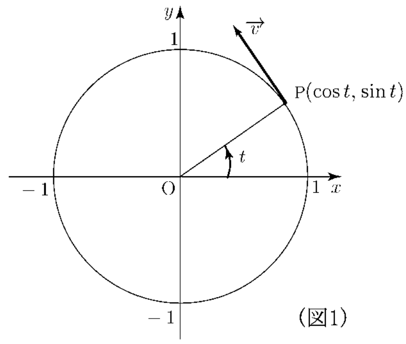
例 座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を点 P が動く。点 (1, 0) から出発し，1 秒間に 1 ラジアン回転するとすれば，t 秒後の座標 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x = \cos t \quad , \quad y = \sin t$$

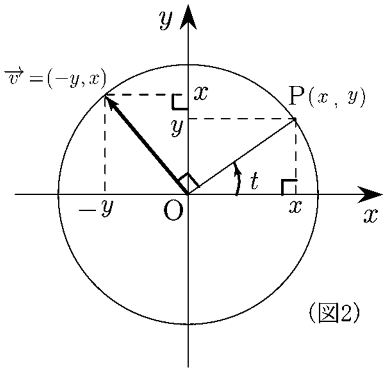
である。速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\sin t\ ,\ \cos t\right) = \left(-y\ ,\ x\right)$$

となる。従って点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ に対し，速度 $\vec{v} = (-y,\ x)$ は垂直である (図 2) ことが分かる。従って図 1 の速度 $\vec{v}$ の方向は点 P における円の接線と同じ方向である。



(図1)

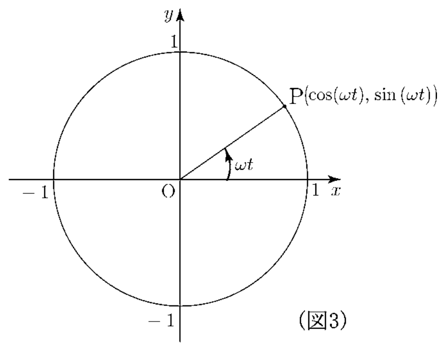


(図2)

問 例と同じ問題で 1 秒間に ω ラジアン回転するとすれば，t 秒後の座標 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

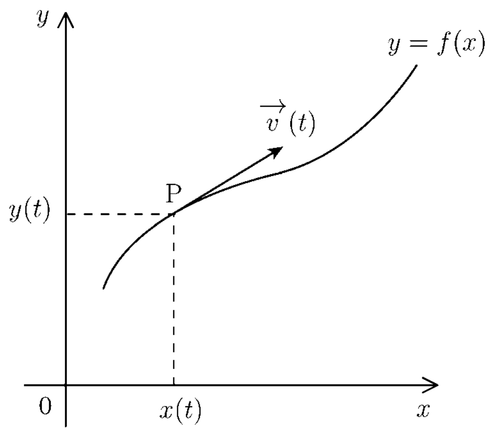
$$x = \cos(\omega t) \quad , \quad y = \sin(\omega t)$$

である。このとき速度 $\vec{v}$ と速さ $|\vec{v}|$ を求め，図 3 に $\vec{v}$ を点 P を始点とするベクトルとして図示せよ。



(図3)

< 平面上の運動 4 >



座標平面上の動点 P の t 秒後の位置 $\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ に対し、x 軸方向の速度・加速度は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad : \quad \text{速度}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) \quad : \quad \text{加速度}$$

であり、y 軸方向の速度・加速度は

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t) \quad : \quad \text{速度}$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t) \quad : \quad \text{加速度}$$

である。これらを成分とするベクトルを

$$\overrightarrow{v}(t) = \bigl(v_x(t),\ v_y(t)\bigr) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) \quad : \quad \text{速度}$$

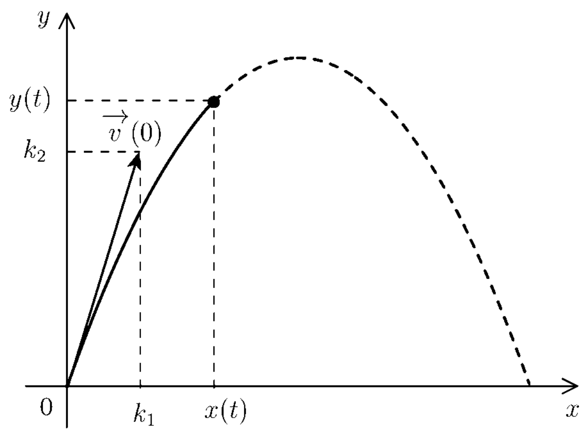
$$\overrightarrow{a}(t) = \bigl(a_x(t),\ a_y(t)\bigr) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) \quad : \quad \text{加速度}$$

と表し、速度 $\overrightarrow{v}(t)$, 加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ と言う。

問 地上から初速 $\overrightarrow{v}(0) = (k_1,\ k_2)$ で打ち出した物体の t 秒後の水平距離を $x(t)$, 高さを $y(t)$ とすると、(空気抵抗を考えないとすれば)

$$\begin{cases} x(t) = k_1 t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 & (\text{高さ}) \end{cases}$$

となる。(ただし $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ である。)



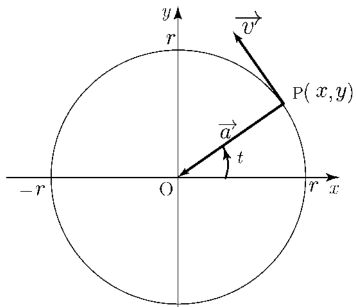
(1) t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t)$ を求め、右図に点 $\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ を始点とするベクトルとして図示せよ。

$\overrightarrow{v}(t) =$

(2) t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ を求め、右図に点 $\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ を始点とするベクトルとして図示せよ。

$\overrightarrow{a}(t) =$

＜平面上の運動 5 ＞



(図1)

例　座標平面上の原点 O を中心として半径 r の円周上を点 P が動く。点 P は点 $(r,\ 0)$ から出発し，1 秒間に 1 ラジアン回転するとすれば，t 秒後の座標 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

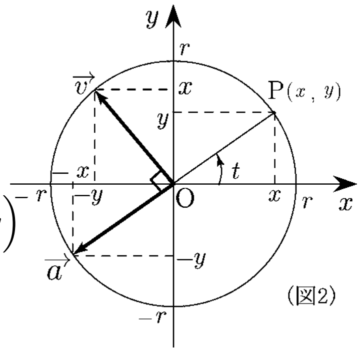
$$x = r\cos t \quad , \quad y = r\sin t$$

である。速度 $\overrightarrow{v}$ は

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-r\sin t\ ,\ r\cos t\Big) = \Big(-y,\ x\Big)$$

であり，加速度 $\overrightarrow{a}$ は

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Big(-r\cos t\ ,\ -r\sin t\Big) = \Big(-x,\ -y\Big)$$



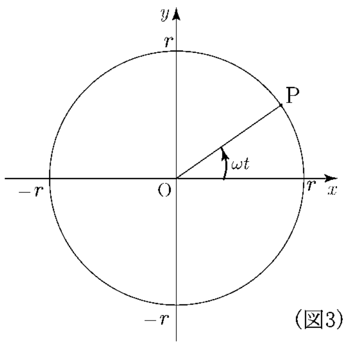
(図2)

である。従って $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より $\overrightarrow{a}$ の方向は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と反対方向である (図 2)。これは加速度 $\overrightarrow{a}$ が点 P を中心 O に向けて引っ張る力=向心力 (=遠心力に対抗する力) を意味する (図 1)。

問 1　例の場合に $|\overrightarrow{v}|$ と $|\overrightarrow{a}|$ を求めよ。

$|\overrightarrow{v}| =$

$|\overrightarrow{a}| =$



(図3)

問 2　例と同じ問題で 1 秒間に ω ラジアン回転するとすれば，t 秒後の位置 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x = r\cos(\omega t) \quad , \quad y = r\sin(\omega t)$$

となる。このとき $\overrightarrow{v}$, $|\overrightarrow{v}|$, $\overrightarrow{a}$, $|\overrightarrow{a}|$ を求めよ。

$\overrightarrow{v} = \Big(\qquad\qquad ,\qquad\qquad\Big)$,　$|\overrightarrow{v}| =$

$\overrightarrow{a} = \Big(\qquad\qquad ,\qquad\qquad\Big)$,　$|\overrightarrow{a}| =$

また $\omega = \dfrac{1}{2}$ のときの $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{a}$ を (図 1 のように) 点 P を始点としたベクトルとして図 3 に図示せよ。

< 微分の練習 3 >

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

問 2 次の関数を定義に従って微分せよ。

(1) $f(x)=2\sqrt{x}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ (2) $y=\dfrac{1}{x^3}$ (3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $y=\sin(2x)$ (5) $y=2\cos(4x)$ (6) $y=\tan(5x)$

(7) $y=\log(5x)$ (8) $y=\log(x^3)$ (9) $y=\log(\cos x)$

(10) $y=e^{4x+1}$ (11) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ (12) $y=e^{\sqrt{x}}$

(13) $y=x\sqrt{x}$ (14) $y=x\sin x$ (15) $y=\sin x\cos x$

(16) $y=e^x\sin x$ (17) $y=e^{-x}\cos x$ (18) $y=e^{3x}\sin(2x)$

(19) $y=\dfrac{\cos x}{x}$ (20) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ (21) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

＜微分の応用＞

問 1 次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+1}$ の $x=0$ における接線

(2) $y=\dfrac{1}{x^2}$ の $x=1$ における接線

(3) $y=\sin x$ の $x=\dfrac{\pi}{6}$ における接線

(4) $y=\tan x$ の $x=\dfrac{\pi}{4}$ における接線

(5) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ の $x=1$ における接線

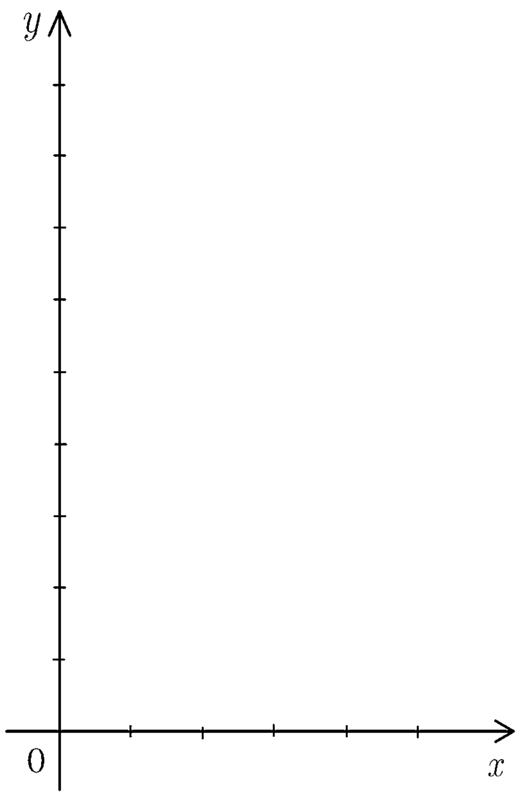
(6) $y=\log|x+1|$ の $x=0$ における接線

(7) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線

問 2 座標平面上を点 P が動く。

t 秒後の位置を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると

$$\begin{cases} x=2t \\ y=-4t^2+8t+5 \end{cases}$$ である。



(1) $0 \leqq t \leqq 2.5$ の範囲で点 P の軌道を図示せよ。

(2) t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}$ と速さ $|\overrightarrow{v}|$ を求めよ。

$\overrightarrow{v}=\Bigl(\qquad\qquad , \qquad\qquad\Bigr)$

$|\overrightarrow{v}|=$

(3) t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}$ と大きさ $|\overrightarrow{a}|$ を求めよ。

$\overrightarrow{a}=\Bigl(\qquad\qquad , \qquad\qquad\Bigr)$

$|\overrightarrow{a}|=$

(4) 1 秒後の速度 $\overrightarrow{v}$ と加速度 $\overrightarrow{a}$ を 1 秒後の位置 P を始点とするベクトルとして図示せよ。