Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

初級編　No. 1

（2003年度版）

内容

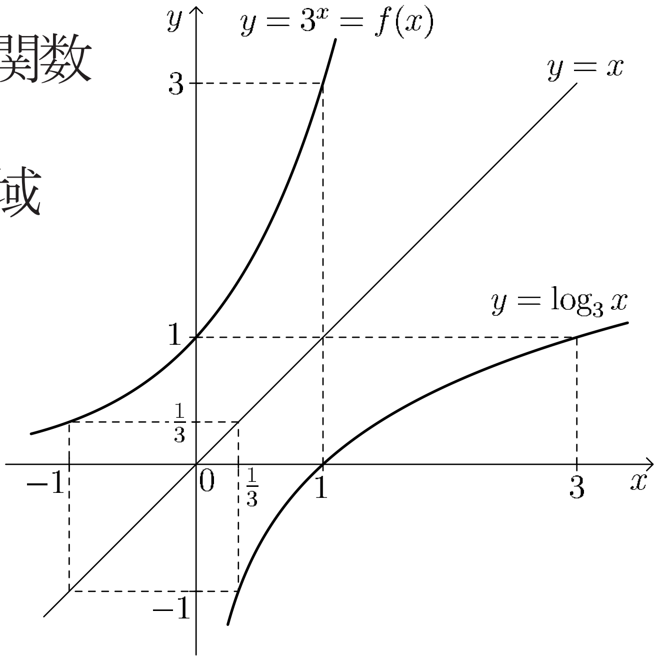
◎　孤度法による三角関数

◎　関数の定義域と値域

◎　逆関数

◎　合成関数

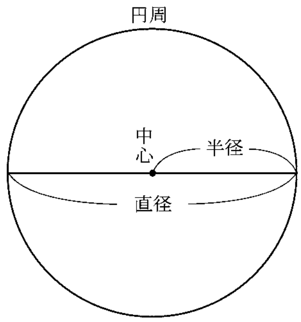
◎　数列の極限



井上 昌昭　著

＜ 円周率 ＞

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから



$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$

となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ~ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ、現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 $(\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma)$ の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率} \quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味、曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後、円周率は常に π を用いる。

例 半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

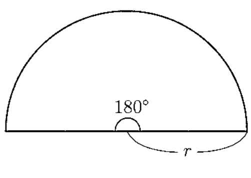
$$\pi = \frac{\ell}{2 \times 5} = \frac{\ell}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答}) \ \ \ell = 10\pi \ (\text{cm})}$$

問 1 次の半径の円周を求めよ。

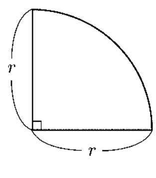
(1) 半径 2cm (2) 半径 r (単位不要)

問 2 次の長さを求めよ。(単位不要)

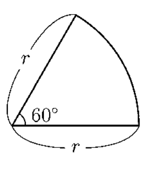
(1) 半径 r の半円の弧の長さ



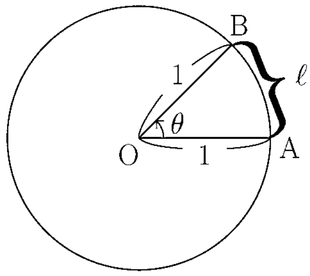
(2) 半径 r の $\dfrac{1}{4}$ 円の弧の長さ



(3) 半径 r, 中心角 60° の弧の長さ



< 弧度法 1 >



右図のように、角度 θ を、半径 1 の円の弧 AB の長さ ℓ で表す方法を**弧度法**という。
単位をラジアンで表し、

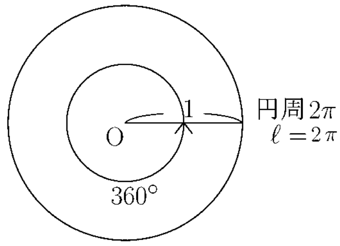
$\theta = \ell$（ラジアン）

と記す。

例 (1) $\theta = 360°$ のとき、半径 1 の円周の長さは 2π だから

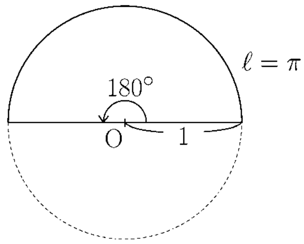
$360° = 2\pi$（ラジアン）

である。（π は円周率 $\fallingdotseq 3.14$）



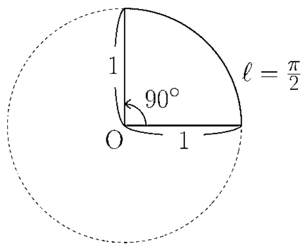
(2) $\theta = 180°$ のとき、半径 1 の半円の孤の長さは π だから

$180° = \pi$（ラジアン）



(3) $\theta = 90°$ のとき、半径 1 の円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さは $\dfrac{\pi}{2}$ だから

$90° = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）



以上の例から、1（ラジアン）は弧の長さが 1 に対する角度 θ で、

1（ラジアン）$= \dfrac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.3°$

である。

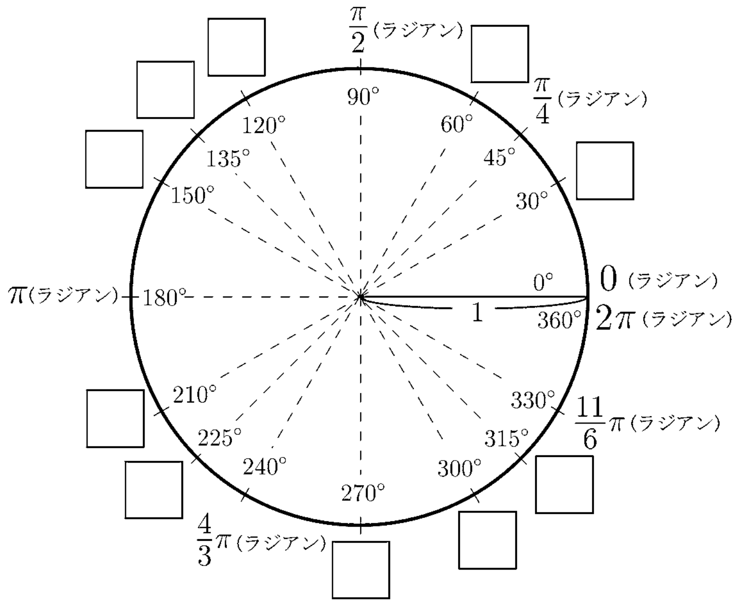
（注） 360°，180°，90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π

＜弧度法 2＞

問 1 右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の $\boxed{}$ 内に弧度法による角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例 0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1) $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ = 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \dfrac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

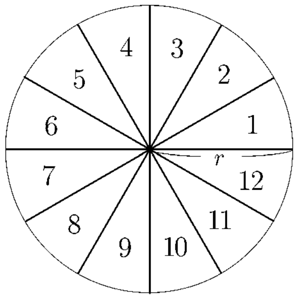
(2) $-510^\circ = -360^\circ - 150^\circ = -2\pi - \dfrac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\dfrac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

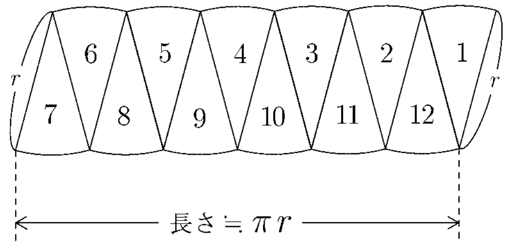
問 2 次の角度を弧度法で表せ。

(1) 540° (2) -270° (3) 630°

(4) -405° (5) 750° (6) -855°

問 3 前ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)

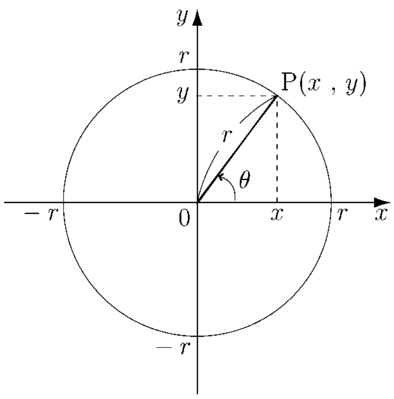




(1) 半径 r の円周の長さ ℓ を求めよ。 $\ell =$

(2) 半径 r の円の面積 S を求めよ。 $S =$

＜ 三角関数 ＞



x 軸の正の部分を始線とした一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点を P$(x\ ,\ y)$ とする。このとき

$$\frac{y}{r}\ ,\quad \frac{x}{r}\ ,\quad \frac{y}{x}$$

の値は、円の半径 r に関係なく、角度 θ によって定まる。これらを θ の三角関数といい、次のように書く。

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r}\ ,\quad \cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

(注) ただし $\tan\theta$ は $x = 0$ となるような角 θ に対しては定義されない。

問 1　次の表を完成せよ。

θ	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$																	
$\cos\theta$																	
$\tan\theta$																	

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$
$\sin\theta$																	
$\cos\theta$																	
$\tan\theta$																	

問 2　加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

を参考にして、次式を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 2\pi) =$　(2) $\cos(\theta + 2\pi) =$　(3) $\tan(\theta + 2\pi) =$

(4) $\sin(2\pi - \theta) =$　(5) $\cos(2\pi - \theta) =$　(6) $\tan(2\pi - \theta) =$

(7) $\sin(-\theta) =$　(8) $\cos(-\theta) =$　(9) $\tan(-\theta) =$

(10) $\sin(\theta + \pi) =$　(11) $\cos(\theta + \pi) =$　(12) $\tan(\theta + \pi) =$

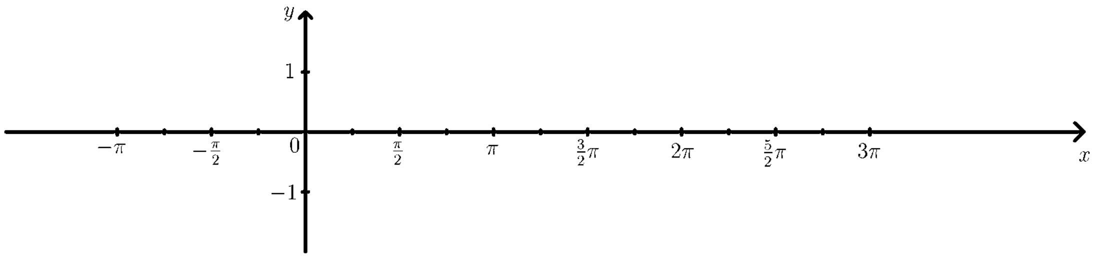
(13) $\sin(\pi - \theta) =$　(14) $\cos(\pi - \theta) =$　(15) $\tan(\pi - \theta) =$

＜三角関数のグラフ＞

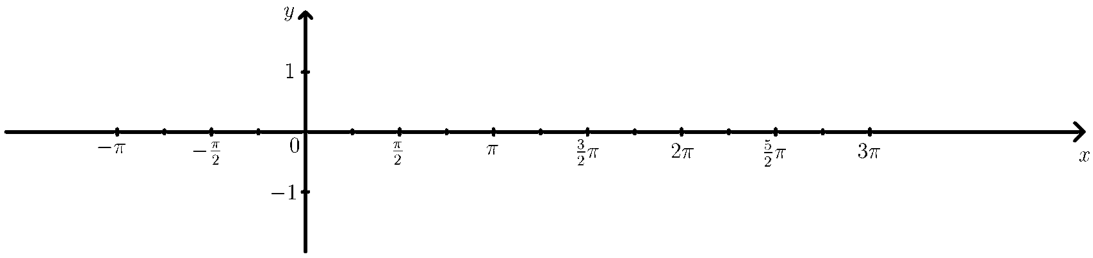
問 表を完成し、$y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法	$-180°$			$-45°$	$0°$		$90°$				$270°$	$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

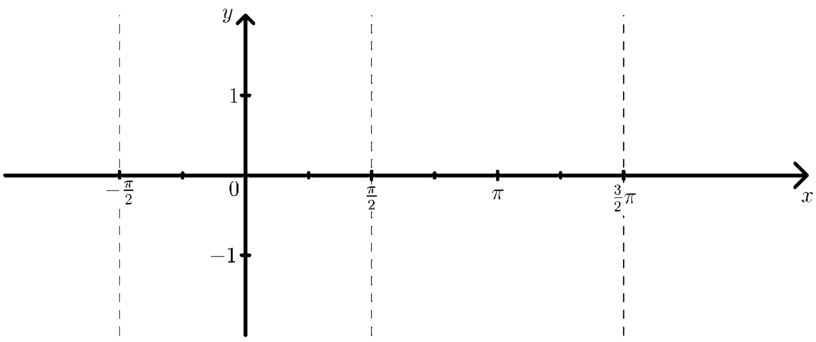


(2) $y = \cos x$



x																		
x	度数法	$-90°$			$-30°$	$0°$	$30°$		$60°$		$120°$			$180°$		$225°$	$240°$	
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$																		

(3) $y = \tan x$



＜ 正弦波 1 ＞

定数 A , B , C に対し、正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを
正弦波という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

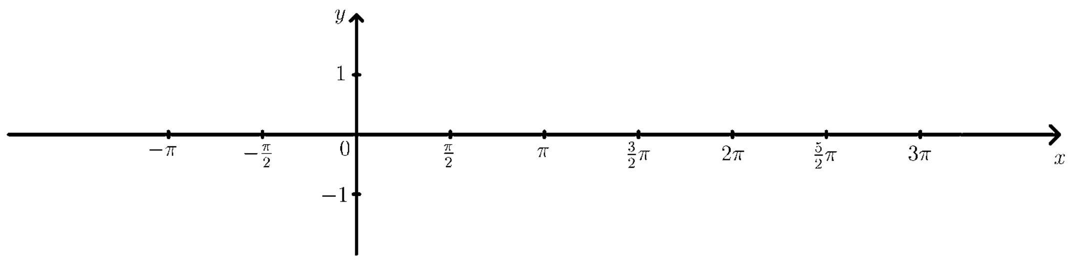
であるが $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの
$y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフ
は $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。
このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより
位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる」という。
一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において、(　　) の中の部分
(この場合は $Bx + C$) を**位相**という。

問 次の表を完成し、$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

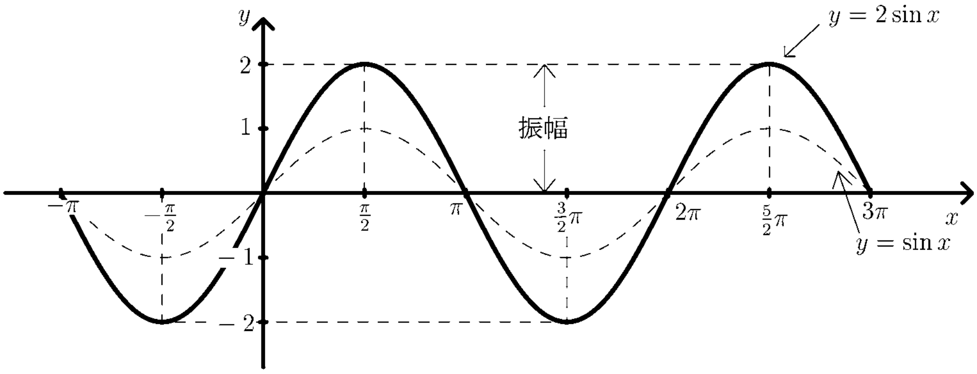
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$									



＜ 正弦波 2 ＞

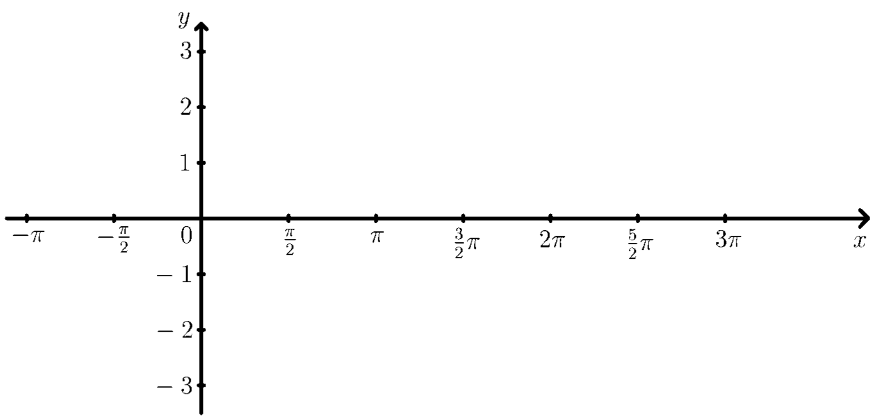
例 $y = 2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、
それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0



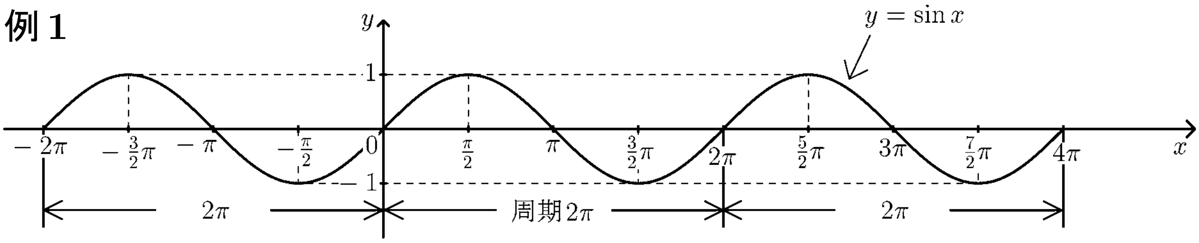
このグラフでは実線が $y = 2\sin x$ のグラフであり、点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は -2 である。
このような場合に「この正弦波の**振幅は 2**」という。
一般の正弦波の場合に、x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問 $y = -3\sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。



＜ 正弦波 3 ＞

例 1

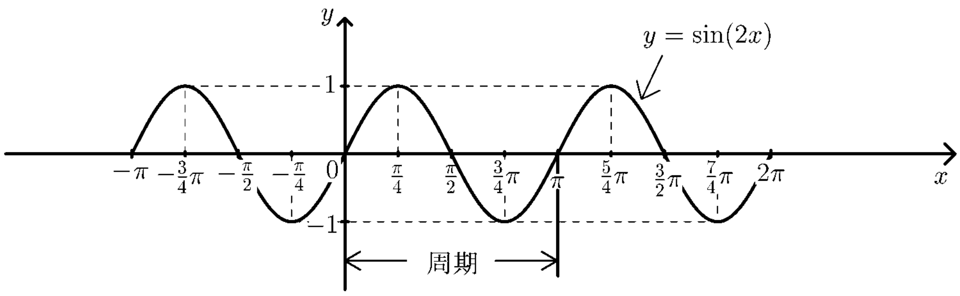


このグラフは $y = \sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい、一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$y = \sin x$ の周期は 2π である。

例 2　$y = \sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

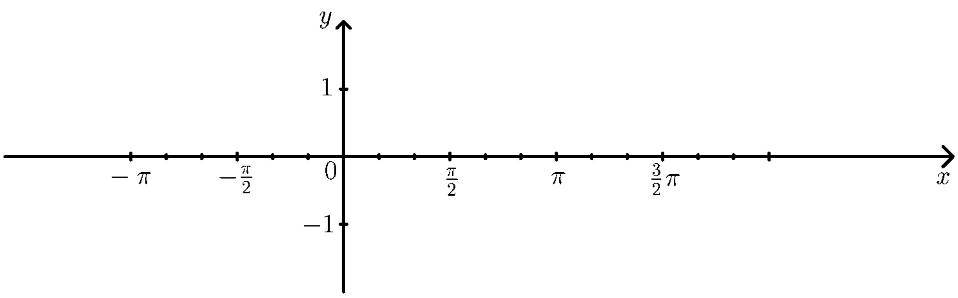
x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、
$y = \sin(2x)$ の周期は π である。

問　次の表を完成し、$y = \sin(3x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													



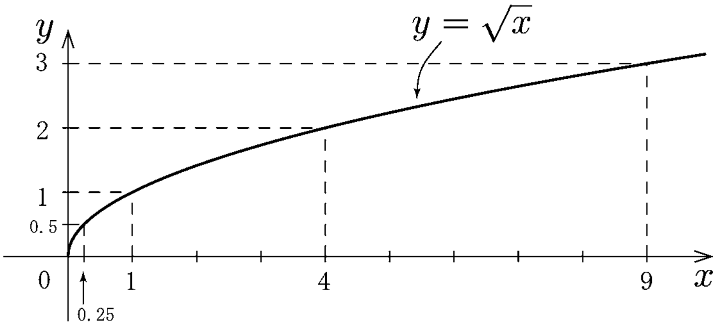
＜ 無理関数 1 ＞

$\sqrt{\quad}$ のついた関数を通常**無理関数**という。

例 1 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描きたい。
$\sqrt{\quad}$ の中は負になってはいけないので x は 0 以上の数を考える。

x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「$\sqrt{\quad}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 $(x \geqq 0)$ を**定義域**という。なお $\sqrt{\quad}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を**値域**という。

例 2 無理関数 $y=\sqrt{x+1}$ を考える。
$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$$x+1 \geqq 0 \;\Rightarrow\; x \geqq -1$$

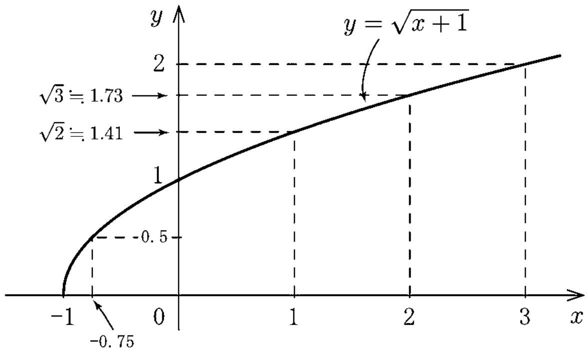
より

$\boxed{\text{定義域} : x \geqq -1}$

であり、値域は $\sqrt{\quad} \geqq 0$ だから

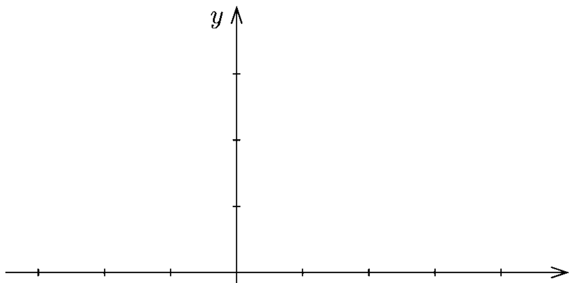
$\boxed{\text{値域} : y \geqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、対応表を完成し、グラフを描け。

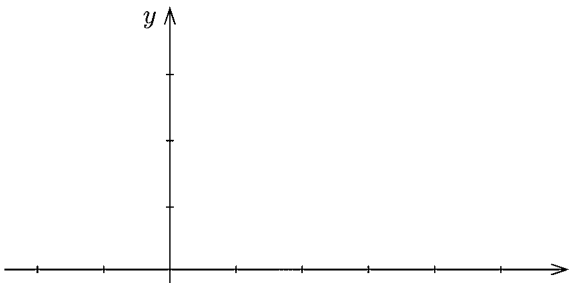
(1) $y=\sqrt{x+2}$



x	-2	-1	0	2
y				

定義域 : ＿＿＿＿＿＿ , 値域 : ＿＿＿＿＿＿

(2) $y=\sqrt{x-1}$



x	1	1.25	2	5
y				

定義域 : ＿＿＿＿＿＿ , 値域 : ＿＿＿＿＿＿

＜無理関数 2＞

例 1 無理関数 $y = \sqrt{3-x}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$3 - x \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geqq x$

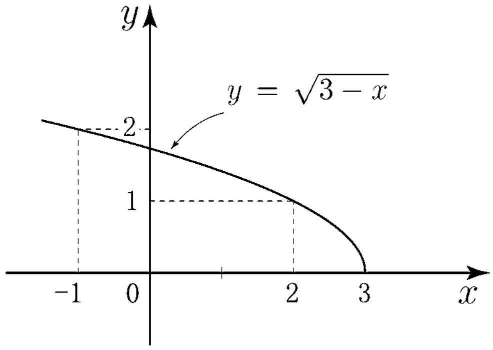
より

$\boxed{\text{定義域} \ : \ x \leqq 3}$

また $\sqrt{\quad} \geqq 0$ より

$\boxed{\text{値 域} \ : \ y \geqq 0}$

である。グラフは右図のようになる。



例 2 無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$x - 1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq 1$

より

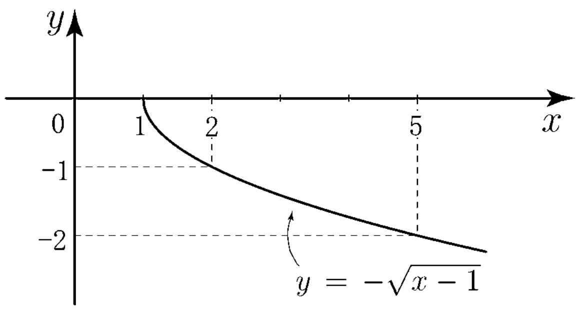
$\boxed{\text{定義域} \ : \ x \geqq 1}$

また $\sqrt{\quad} \geqq 0$ より $-\sqrt{\quad} \leqq 0$

だから

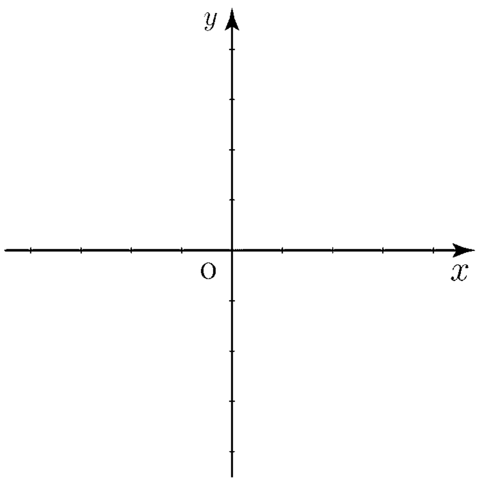
$\boxed{\text{値 域} \ : \ y \leqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



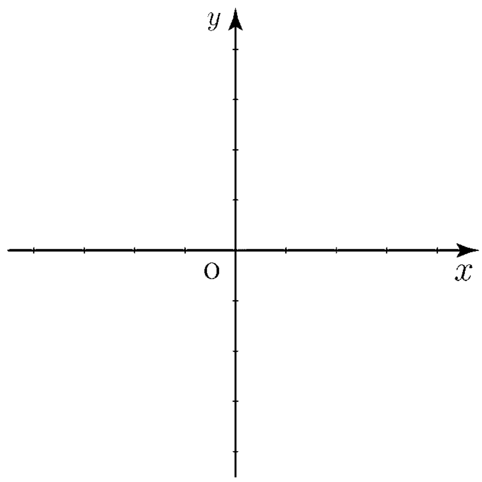
問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを書け。

(1) $y = \sqrt{-x+1}$



定義域 : , 値域 :

(2) $y = -\sqrt{x+2}$



定義域 : , 値域 :

＜ 分数関数 1 ＞

例 1 分数関数 $\dfrac{1}{x}$ を考える。

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$x=0$ のときは分母が 0 になるから定義できない。従って定義域は 0 以外の全ての実数となる。

$\boxed{\text{定義域}: x \neq 0}$

$y=\dfrac{1}{x}$ を変形すると

$xy = 1$

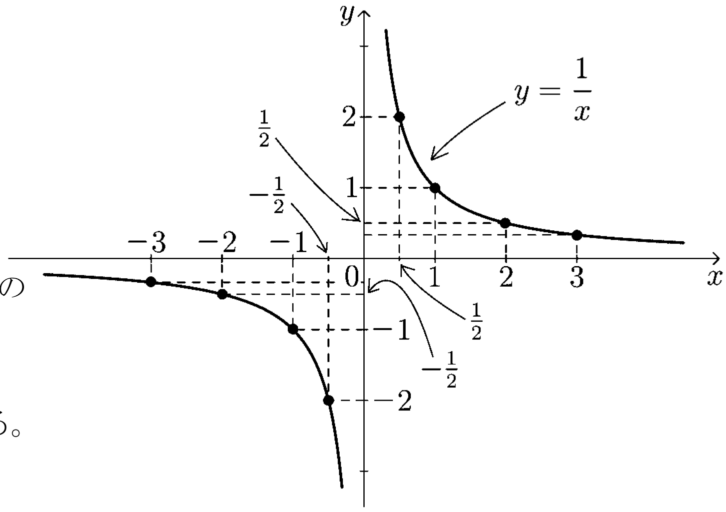
より y は 0 にはならない。結局

$y = \dfrac{1}{x} \neq 0$

となり、y は 0 以外のすべての実数の値を取る。

$\boxed{\text{値域}: y \neq 0}$

となり、グラフは右図のようになる。



例 2 分数関数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ を考える。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$

分母が 0 になってはならないので $x-2 \neq 0$ より

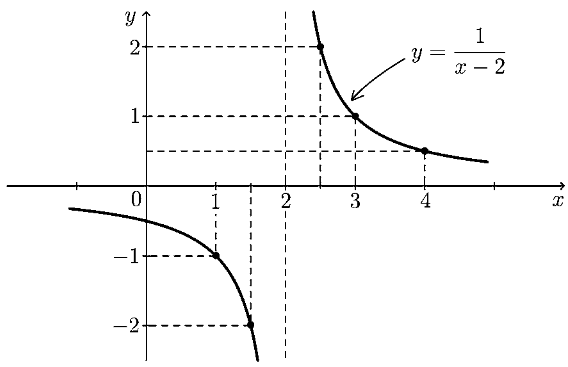
$\boxed{\text{定義域}: x \neq 2}$

となり、値域は上と同様に

$\boxed{\text{値域}: y \neq 0}$

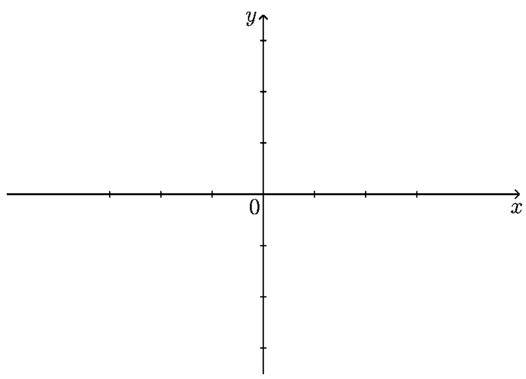
であり、グラフは右図のようになる。

このグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に $+2$ だけ平行移動したものである。



問 分数関数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ の定義域と値域を求め、対応表を作り、右にグラフを描け。

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
y				╳			



定義域：＿＿＿＿＿＿＿，値域：＿＿＿＿＿＿＿

< 分数関数 2 >

例 分数関数 $y = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ を考える。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$
y	2.5	2	1	╳	5	4	3.5

定義域は分母 $\neq 0$ より

$\boxed{\text{定義域}: x \neq 2}$

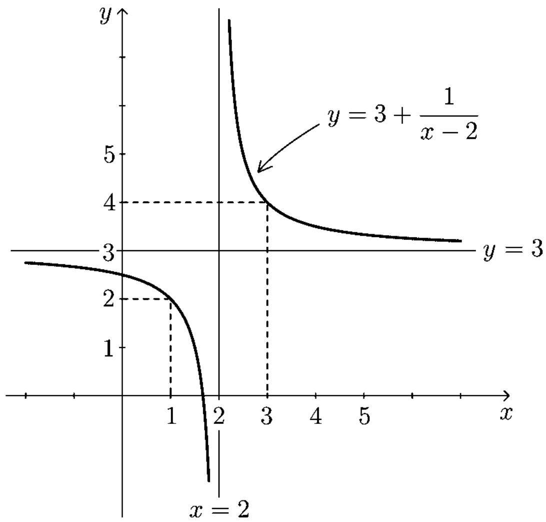
である。一方逆数 $\dfrac{1}{x-2} \neq 0$ より

$$y - 3 = \frac{1}{x-2} \neq 0$$

であるから $y - 3 \neq 0$ より

$\boxed{\text{値域}: y \neq 3}$

となる。このグラフは右図のように $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に +2、y 軸方向に +3 だけ平行移動したものである。



このグラフは x の値が 2 に近づくほど直線 $x = 2$ に近づき、x の値が 2 から遠ざかるほど直線 $y = 3$ に近づく。

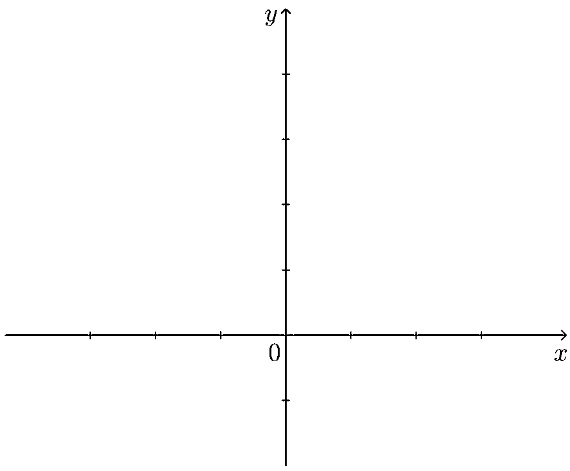
この 2 直線 $x = 2$, $y = 3$ を分数関数 $y = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ の **漸近線**(ゼンキンセン) という。

問 分数関数 $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$
定義域と値域および漸近線を求め、右にそのグラフを描け。
(漸近線のグラフも描く。)

定義域：__________

値域：__________

漸近線：$x =$ _____ , $y =$ _____



< 分数関数 3 >

例題 次の分数関数のグラフを描け。またその漸近線をいえ。

(1) $y = -\dfrac{1}{x}$ (2) $y = 3 - \dfrac{1}{x-2}$

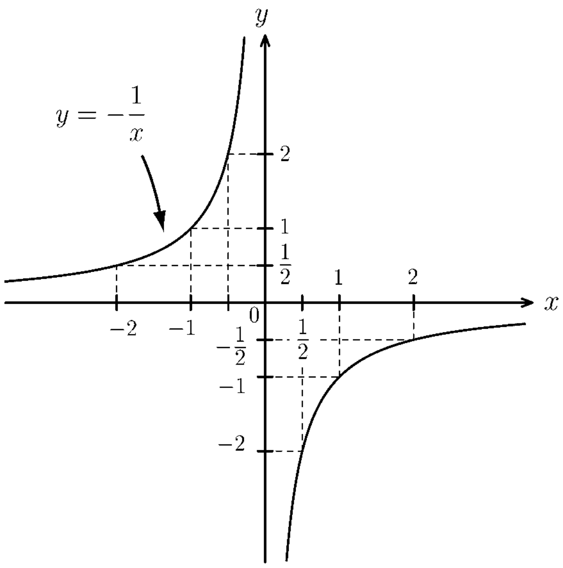
(解)

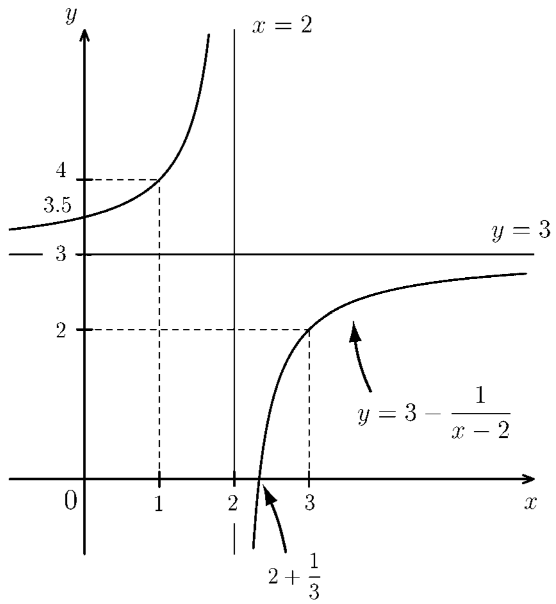
(1) 下図のグラフである。

漸近線は x 軸 $(y=0)$ と y 軸 $(x=0)$ である。

(2) 下図のグラフである。

漸近線は $x=2$ と $y=3$ である。





問 次の分数関数のグラフを描け。またその漸近線をいえ。

(1) $y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ (2) $y = 2 - \dfrac{1}{x-1}$

＜ 絶対値 ＞

実数 a に対し、プラス・マイナスの符号をとった値を $|a|$ と書き、 a の**絶対値**という。

例 1　$|2| = 2$, $|1.5| = 1.5$, $|0| = 0$, $|-1.2| = 1.2$, $|-3| = 3$

問 1　次の値を求めよ。

(1) $|4.5| =$　　(2) $|13.4| =$　　(3) $|-0.5| =$　　(4) $|-3.7| =$

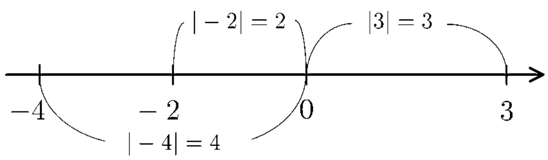
問 2　$|3| = 3$, $|-2| = 2 = -(-2)$ である。この例を参考にして下の□内に a または $-a$ のどちらかを入れよ。

(1) $a > 0$ のとき $|a| = \boxed{}$

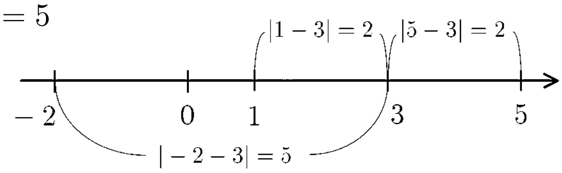
(2) $a = 0$ のとき $|a| = 0$

(3) $a < 0$ のとき $|a| = \boxed{}$

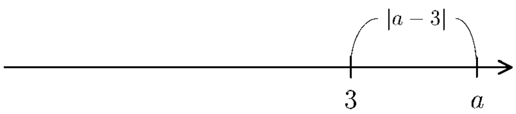
例 2　右図のように $|a|$ は a と原点 0 との距離を示す。



問 3　$|5-3| = 2$, $|1-3| = 2$, $|-2-3| = 5$ である。この例を参考にして以下の□内に $a-3$ または $3-a$ のどちらかを入れよ。

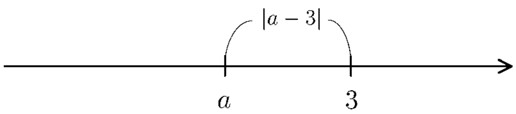


(1) $a > 3$ のとき $|a-3| = \boxed{}$



(2) $a = 3$ のとき $|a-3| = 0$

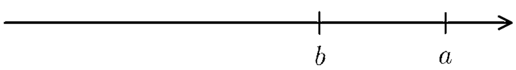
(3) $a < 3$ のとき $|a-3| = \boxed{}$



(注) $|a-3|$ は a と 3 との距離を示す。

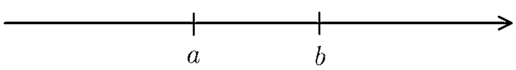
問 4　実数 a, b に対し以下の□の内に適当な文字式を入れよ。

(1) $a > b$ のとき $|a-b| = \boxed{}$



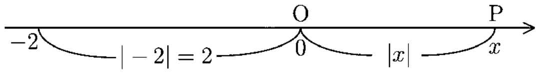
(2) $a = b$ のとき $|a-b| = 0$

(3) $a < b$ のとき $|a-b| = \boxed{}$



問 5　数直線上に実数 a と b がある。$|a-b|$ は何を意味するか答えよ。

＜絶対値のグラフ 1＞



問 1 実数 x の数直線上の位置を点 P(x) とする。
原点 O(0) からの距離 OP を x の絶対値といい、

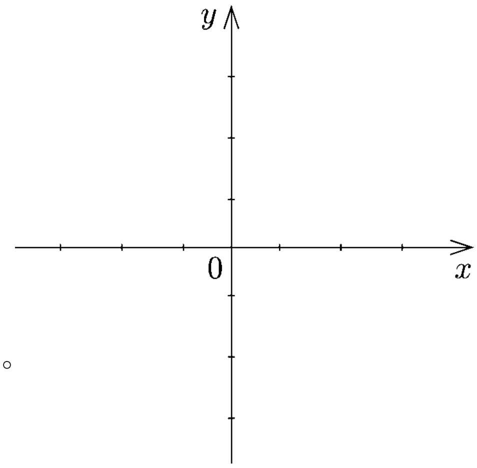
$$\mathrm{OP} = |x|$$

と表す。例えば $|2| = 2$、$|-2| = 2$ である。ここで、

$$y = |x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



また、以下の文章の $\boxed{\quad}$ の中に適当な文字式を入れよ。

「右のグラフより、$y = |x|$ のグラフは

$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad\quad}$ であり

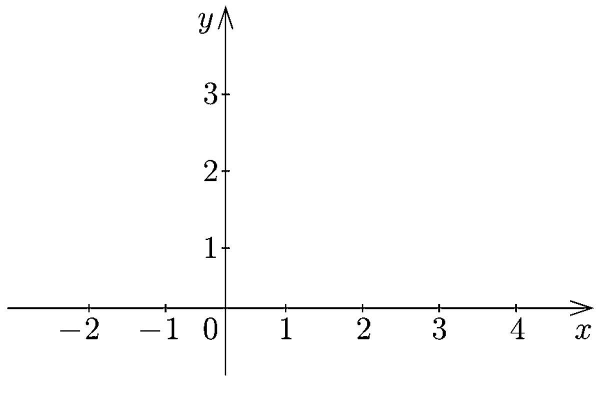
$x < 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad\quad}$ であることから、

$$y = |x| = \begin{cases} \boxed{\quad\quad} & (x \geqq 0) \\ \boxed{\quad\quad} & (x < 0) \end{cases}$$ が分かる。」

問 2 関数 $y = |x - 1|$ を考える。

(1) 表を完成し、グラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								



(2) 以下の $\boxed{\quad\quad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

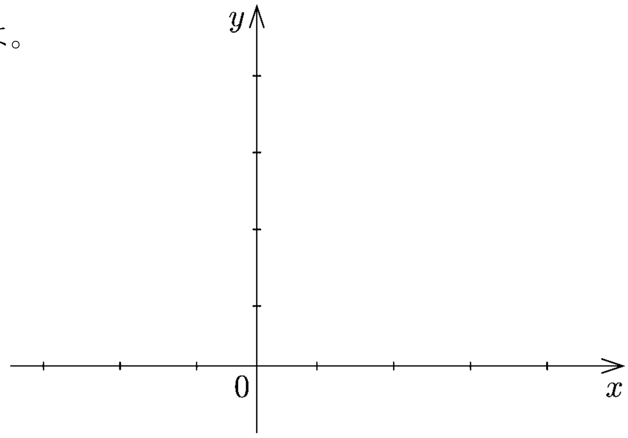
$x \geqq 1$ のとき　$|x - 1| = \boxed{\quad\quad}$

$x < 1$ のとき　$|x - 1| = \boxed{\quad\quad}$

問 3 関数 $y = |x + 1|$ のグラフを描き、
以下の $\boxed{\quad\quad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

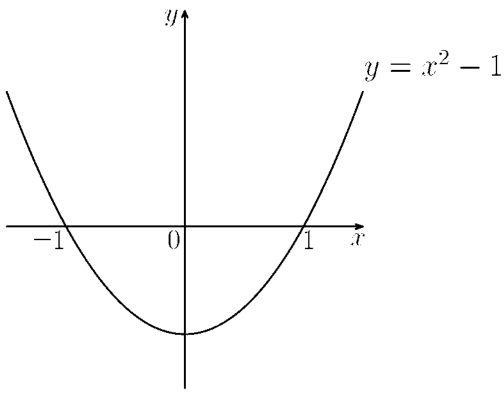
$x \geqq -1$ のとき　$|x + 1| = \boxed{\quad\quad}$

$x < -1$ のとき　$|x + 1| = \boxed{\quad\quad}$



< 絶対値のグラフ 2 >

問 1　関数 $y = |x^2 - 1|$ を考える。



(1)　表を完成せよ。

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y							

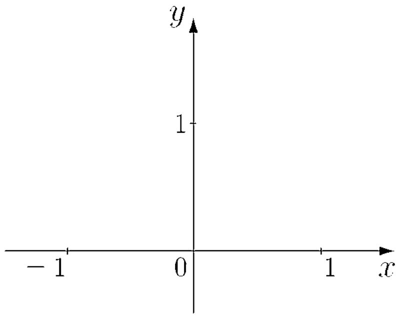
(2)　以下の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

$x \geqq 1$　　のとき　$|x^2 - 1| = \boxed{}$

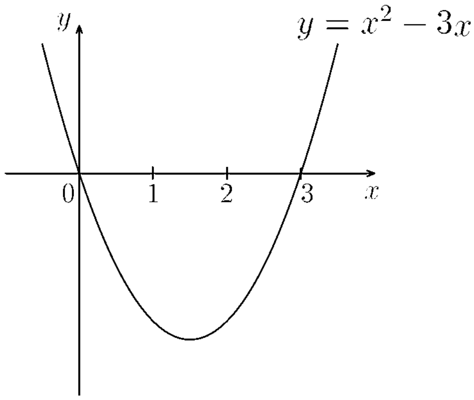
$-1 < x < 1$ のとき $|x^2 - 1| = \boxed{}$

$x \leqq -1$　 のとき　$|x^2 - 1| = \boxed{}$

(3)　$y = x^2 - 1$ のグラフを参考にして
$y = |x^2 - 1|$ のグラフを右に描け。



問 2　関数 $y = |x^2 - 3x|$ を考える。



(1) 表を完成せよ。

x	-1	0	1	2	3	4
y						

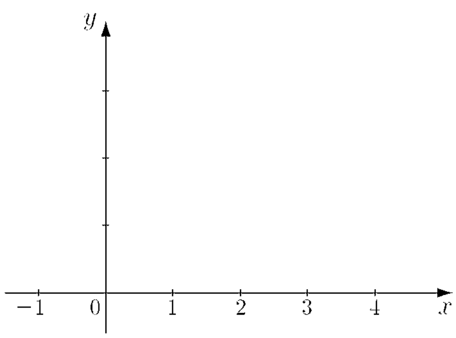
(2) 以下の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

$x \geqq 3$　 のとき　$|x^2 - 3x| = \boxed{}$

$0 < x < 3$ のとき $|x^2 - 3x| = \boxed{}$

$x \leqq 0$　 のとき　$|x^2 - 3x| = \boxed{}$

(3) $y = x^2 - 3x$ のグラフを参考にして
$y = |x^2 - 3x|$ のグラフを右に描け。



問 3　関数 $y = \dfrac{|x|}{x}$　$(x \neq 0)$ を考える。

(1) 表を完成せよ。

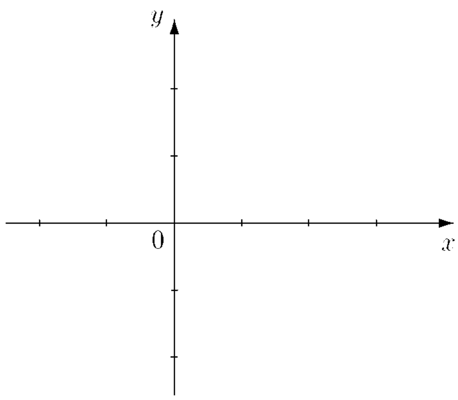
x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y							

(2) 以下の $\boxed{}$ 内に適当な数字を入れよ。

$x > 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{}$

$x < 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{}$

(3) 右に $y = \dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。



< ガウス記号 >

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leqq x < n+1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例
$[1.5] = \ 1$, $[2.76] = 2$

$[3.024] = \ 3$, $[4.8196] = 4$

$[0.135] = \ 0$, $[-0.52] = -1$

$[-1.23] = -2$, $[-2.746] = -3$

問 1 次の値を求めよ。

(1) $[1.23] =$ (2) $[9.87] =$ (3) $[\ 0.9999\ ] =$

(4) $[-0.1] =$ (5) $[-3.69] =$ (6) $[-9.5\ ] =$

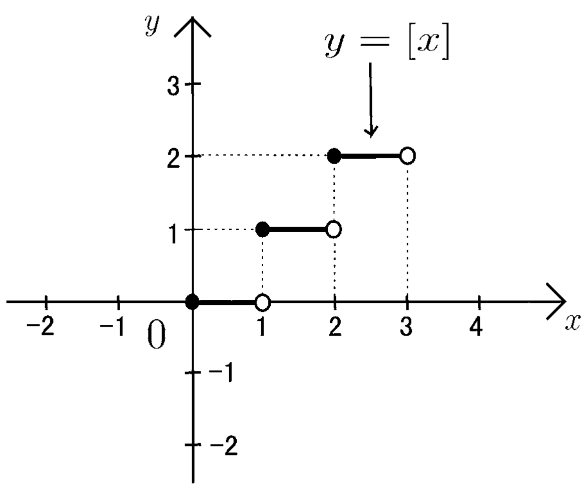
問 2 関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



< 関数のグラフ 1 >

問　$-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で以下の三角関数のグラフを描き、周期を求めよ。

(1)　$y = \sin(x - \pi)$

(2)　$y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(3)　$y = 3\sin x$

(4)　$y = -2\cos x$

(5)　$y = \sin(2x)$

(6)　$y = \cos(3x)$

(7)　$y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(8)　$y = 3\cos(x + \pi)$

(9)　$y = 3\sin(2x)$

(10)　$y = 2\sin(4x + \pi)$

< 関数のグラフ 2 >

問 次の関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1) $y = -2\sin x$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(2) $y = 3\cos x$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(3) $y = \sqrt{x-2}$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(4) $y = -\sqrt{3-x}$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(5) $y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(6) $y = 3 - \dfrac{1}{x+2}$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(7) $y = |x+1|$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(8) $y = |x^2 - 4|$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(9) $y = \dfrac{x+|x|}{2}$

定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿

(10) $y = \dfrac{x-|x|}{2}$

定義域＿＿＿＿＿＿

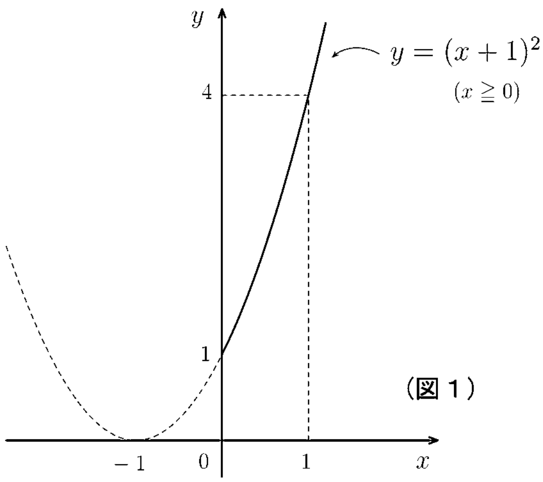
値域＿＿＿＿＿＿

＜定義域の制限＞

関数の通常の定義域をさらに制限する場合がある。そのような場合の定義域に対応する値域を考える。

例 1　$y=(x+1)^2$ の通常の定義域は実数全体であり, 値域は $y \geqq 0$ である。

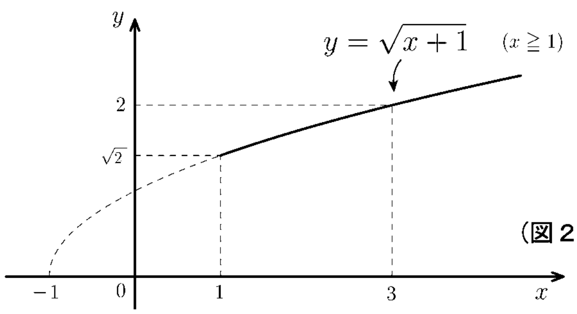
例 2　$y=(x+1)^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である。(図 1)



（図１）

例 3　$y=\sqrt{x+1}$ の通常の定義域は $x \geqq -1$ であり値域は $y \geqq 0$ である。

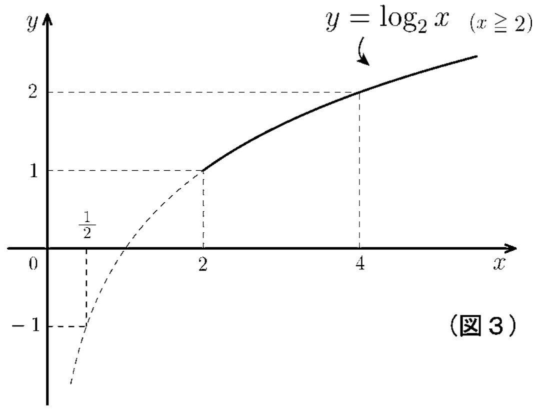
例 4　$y=\sqrt{x+1}$ の定義域を $x \geqq 1$ に制限する場合の値域は $y \geqq \sqrt{2}$ である。(図 2)



（図２）

例 5　$y=\log_2 x$ の通常の定義域は $x>0$ であり値域は実数全体である。

例 6　$y=\log_2 x$ の定義域を $x \geqq 2$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である (図 3)



（図３）

問　次の関数の (　) 内の定義域に対応する値域を求めよ。

(1) $y=(x-1)^2$　　$(x \geqq 2)$

(2) $y=\sqrt{x+3}$　　$(x \geqq 1)$

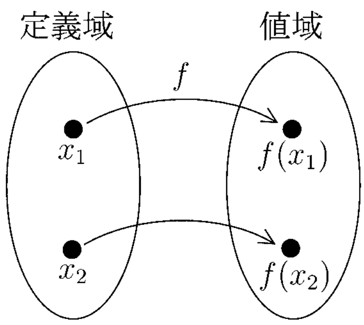
(3) $y=\log_3 x$　　$(x \geqq 1)$

(4) $y=2^x$　　$(x \geqq 0)$

(5) $y=\sin x$　　$(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$

(6) $y=\cos x$　　$(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$

＜１対１関数＞



（図１）

関数 $y = f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり

(∗) $\boxed{x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)}$

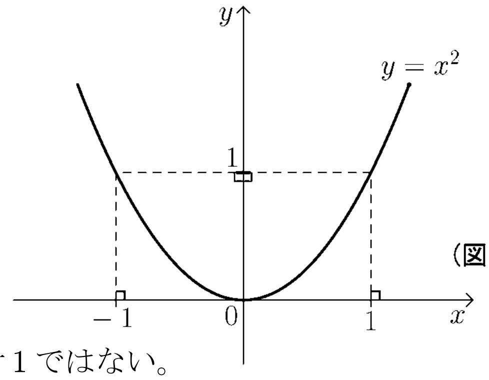
が成り立つとき、関数 $y = f(x)$ は **1 対 1** であるという。

例 1 $f(x) = x^2$ のとき、定義域を実数全体とすれば、関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 ではない。

なぜなら、$x_1 = -1,\ x_2 = 1$ のとき

$$f(x_1) = f(x_2) = 1$$

となり (∗) 式が成立しないから。



（図２）

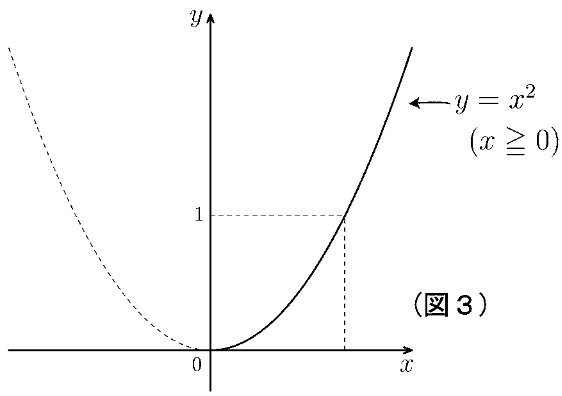
(注)　このような $x_1,\ x_2$ が 1 組でもあれば 1 対 1 ではない。

例 2 $f(x) = x^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限する場合は, 1 対 1 である。(図 3)

（なぜならば $x_1 \neq x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$ であれば

$$f(x_1) - f(x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$$

より $f(x_1) \neq f(x_2)$ だから。）



（図３）

問 次の関数が 1 対 1 であるかどうか判定せよ。(ただし (　) 内は定義域である)

(1) $y = 3x - 2$　　(2) $y = x^3 - x$　　(3) $y = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

(4) $y = [x]$　　(5) $y = (x-1)^2 \quad (x \geqq 2)$　　(6) $y = \sqrt{x-1}$

(7) $y = 2^x$　　(8) $y = \sin x$　　(9) $y = \sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \right)$

< 逆関数 1 >

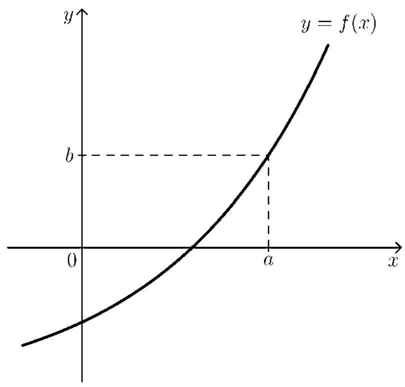
関数 $f(x)$ が 1 対 1 であるとき、y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 である。

$$b = f(a)$$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

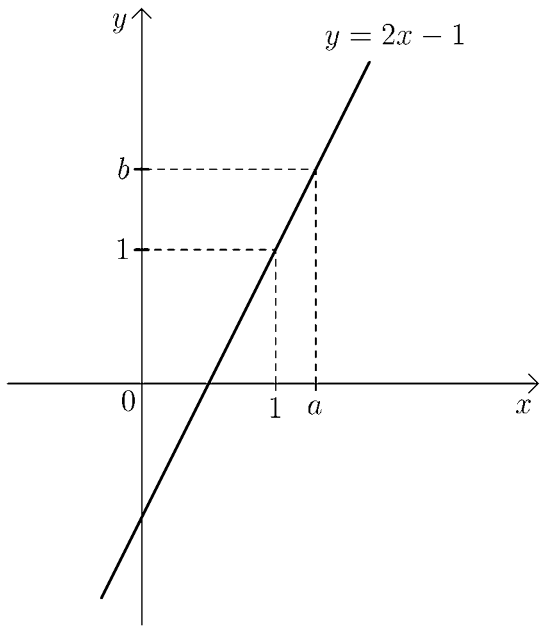
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。

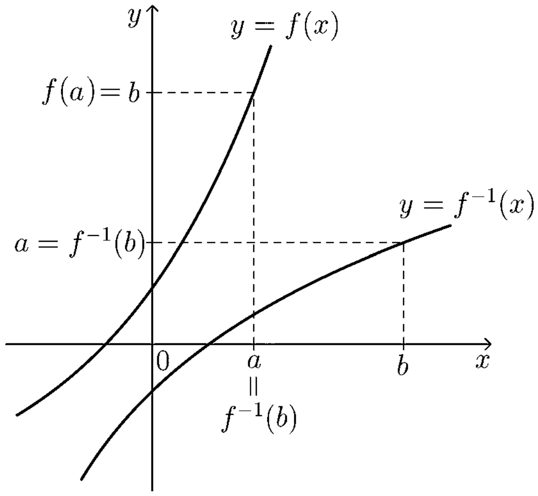


問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて 1 対 1 である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$　　(3) $f(x) = \sqrt{x}$

(解)　　(解)　　(解)

< 逆関数 2 >



関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 のとき、y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。

例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

(注) 次のようにして逆関数を求めてよい。

元の関数 : $y = 2x + 1$

$\Downarrow$ < x について解く >

$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$\Downarrow$ < x と y を入れ替える >

逆関数 : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

よって $\underline{(答)\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

問 $f(x)$ が以下の場合に, 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

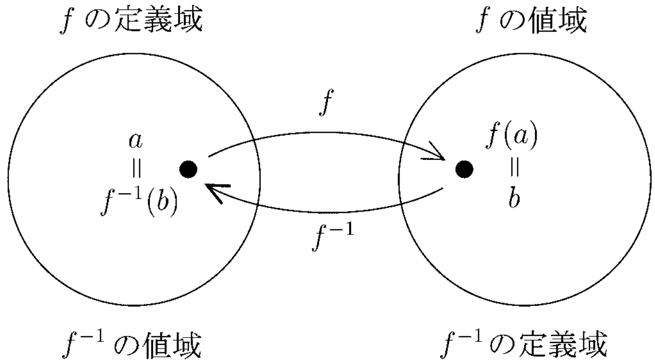
(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad (x \geqq 0)$

＜ 逆関数 3 ＞

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例 $f(x) = x^2 + 1$ のとき、f の定義域を $x \geqq 0$ に制限すれば $y = f(x)$ は 1 対 1 にある。
この逆関数を以下のようにして求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

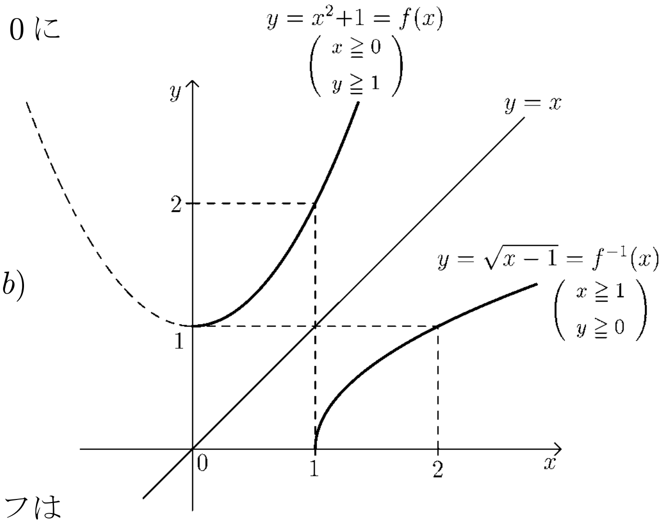
より

$$\underset{(a \geqq 0,\ b \geqq 1)}{b = a^2 + 1} \iff \underset{(a \geqq 0,\ b \geqq 1)}{a = \sqrt{b-1} = f^{-1}(b)}$$

となる。b を x でおきかえると、逆関数

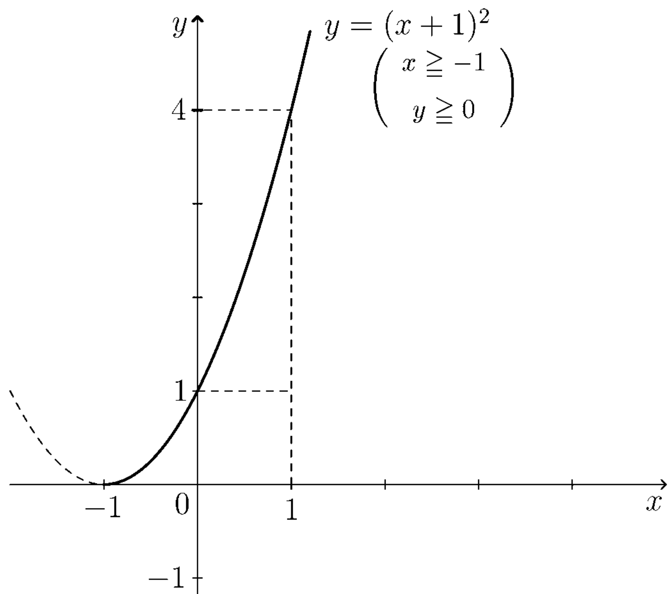
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad (\text{定義域}\ x \geqq 1)$$

が求まる。$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y = x$ に関し、対称になる。



問 $f(x) = (x+1)^2$ のとき f の定義域を $x \geqq -1$ に制限すれば $y = f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を求め、グラフを右図に描け。

(解)



< 逆関数 4 >

$y = f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を次のように求めてもよい。

< 逆関数の求め方 >

1. $y = f(x)$ を x について解き，$x = f^{-1}(y)$ の形に表す。
2. x と y を入れ替えて，$y = f^{-1}(x)$ とする。

   $y = f^{-1}(x)$ の定義域は，$y = f(x)$ の値域と同じにとる。

例　前ページの例の関数 $f(x) = x^2 + 1$　(定義域 $x \geqq 0$，値域 $y \geqq 1$)

の場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を上の方法で求める。

元の関数 : $y = x^2 + 1$　$(x \geqq 0\ ,\ y \geqq 1)$

$\Downarrow$　< x について解く >

$x = \sqrt{y-1}$　$(x \geqq 0\ ,\ y \geqq 1)$

$\Downarrow$　< x と y を入れ替える >

逆関数 : $y = \sqrt{x-1}$　$(y \geqq 0\ ,\ x \geqq 1)$

よって逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ であり，定義域は $x \geqq 1$ である。

問　$f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ とその定義域を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$　(定義域 $x \neq 1$,　値域 $y \neq 0$)

(2) $f(x) = x^2 - 1$　(定義域 $x \geqq 0$,　値域 $y \geqq -1$)

(3) $f(x) = \sqrt{x-2}$　(定義域 $x \geqq 2$,　値域 $y \geqq 0$)

< 逆関数 5 >

例題　次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x+1}$　　　　(2) $y = 4^x$

(解)　(1) 定義域は $x \geqq -1$ であり値域は $y \geqq 0$ である。

$$y = \sqrt{x+1} \qquad (x \geqq -1\ ,\ y \geqq 0)$$

$\Downarrow$　　< x について解く >

$$x = y^2 - 1 \qquad (x \geqq -1\ ,\ y \geqq 0)$$

$\Downarrow$　　< x と y を入れ替える >

$$y = x^2 - 1 \qquad (y \geqq -1\ ,\ x \geqq 0)$$

(答) 逆関数は $y = x^2 - 1$ であり, その定義域は $x \geqq 0$ である。

(2) $y = 4^x$ の定義域は実数全体であり　値域は $y > 0$ である。

$$y = 4^x \qquad (y > 0)$$

$\Downarrow$

$$\log_4 y = \log_4 4^x = x$$

$\Downarrow$

$$x = \log_4 y \qquad (y > 0)$$

$\Downarrow$　　< x と y を入れ替える >

$$y = \log_4 x \qquad (x > 0)$$

(答) 逆関数は $y = \log_4 x$ であり, その定義域は $x > 0$ である。

問　次の関数の逆関数を求め , その定義域も求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-1}$

(2) $y = 3^x$

(3) $y = \log_2 x$

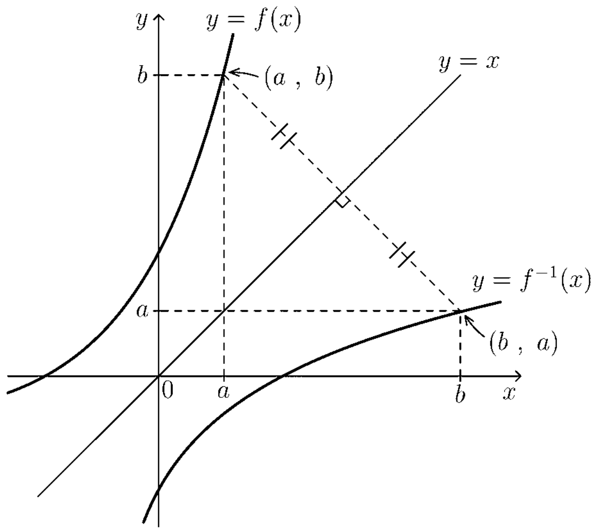
＜ 逆関数 6 ＞

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 であるとき、$y = f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a, b) とすると

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より、点 (b, a) は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは , 元の関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = x$ に関して、対称に折り返したものになっている。

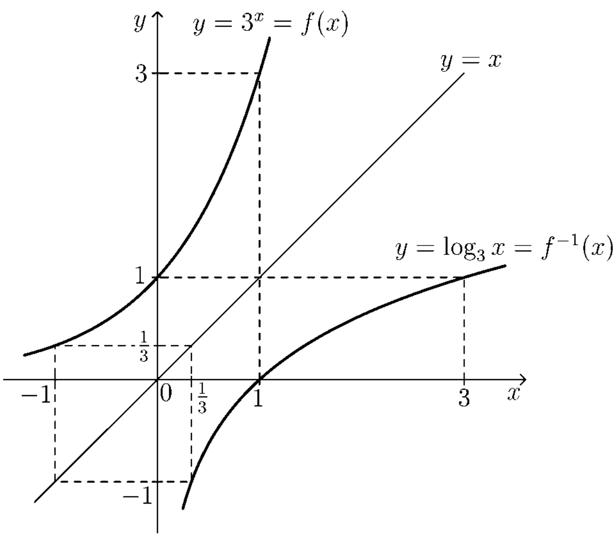


例 $f(x) = 3^x$ のとき、前ページの結果より逆関数は

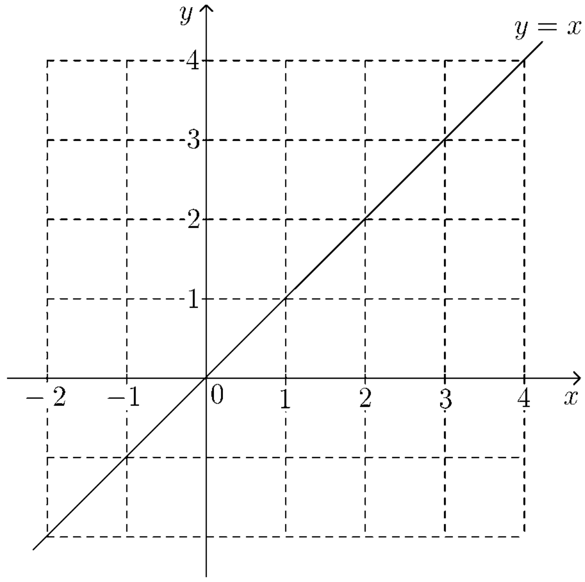
$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

である。

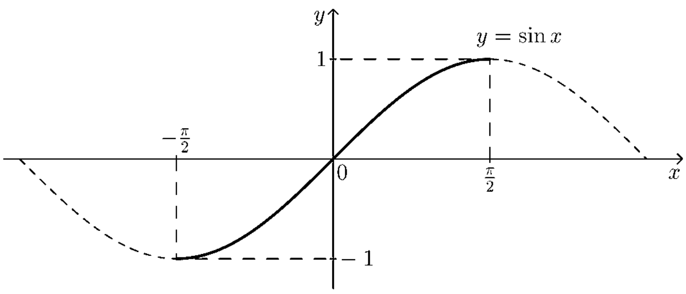
対数関数 $y = \log_3 x$ は指数関数 $y = 3^x$ の逆関数である。
$y = \log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。



問 $f(x) = 2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, 元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



＜逆三角関数 1＞



正弦関数 $y = \sin x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、1 対 1 になる。このとき、関数

$$y = \sin x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

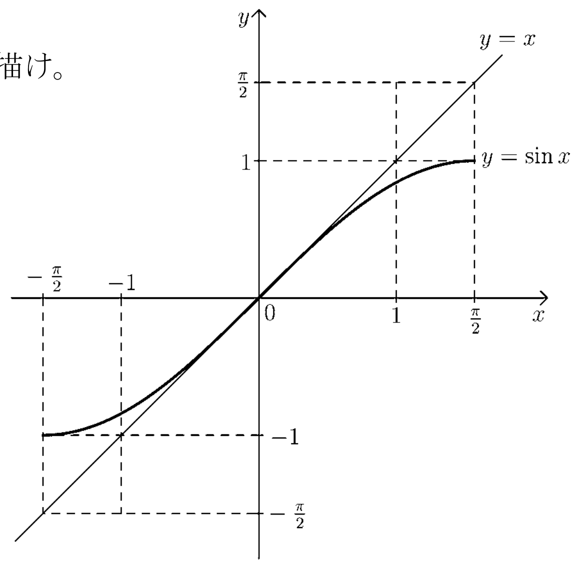
$$y = \sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arcsin x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン)　(アークサイン)

と表す。$y = \sin^{-1} x$ のグラフは、$y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$ と書く。

問 1 右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから (答) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

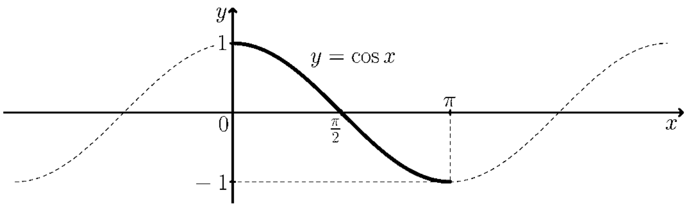
問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$　　(2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　(3) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

＜ 逆三角関数 2 ＞

余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数



$$y=\cos x \quad (\text{ 定義域: } 0 \leqq x \leqq \pi,\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

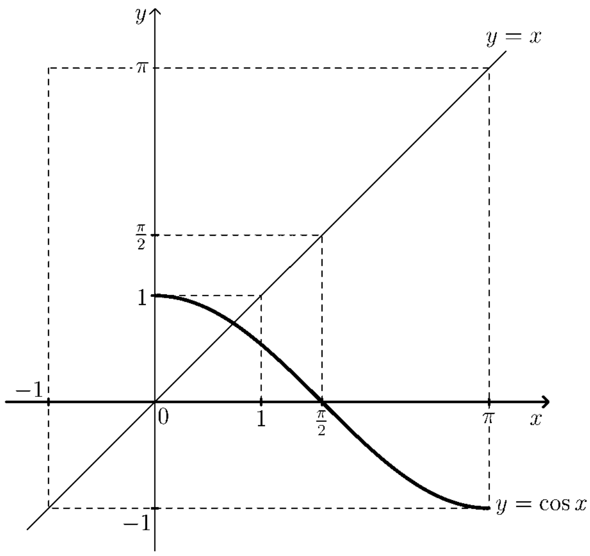
$$y=\cos^{-1} x \qquad \text{又は} \qquad y=\arccos x \quad (\text{ 定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } 0 \leqq y \leqq \pi)$$

(インバースコサイン)　(アークコサイン)

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは、$y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから (答)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

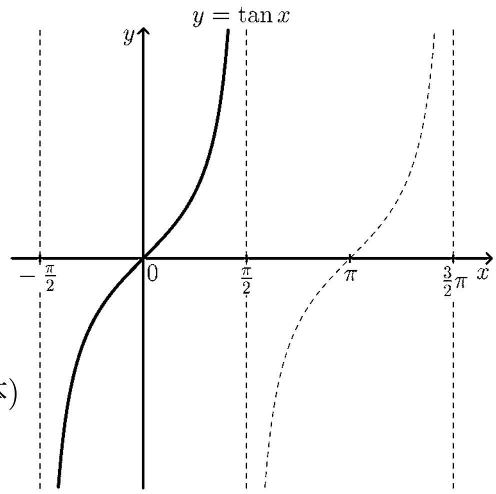
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　　　(2)　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　　　(3)　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

＜逆三角関数 3＞



正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、値域は実数全体である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ \text{値域: 実数全体})$$

の逆関数が存在して、これを、

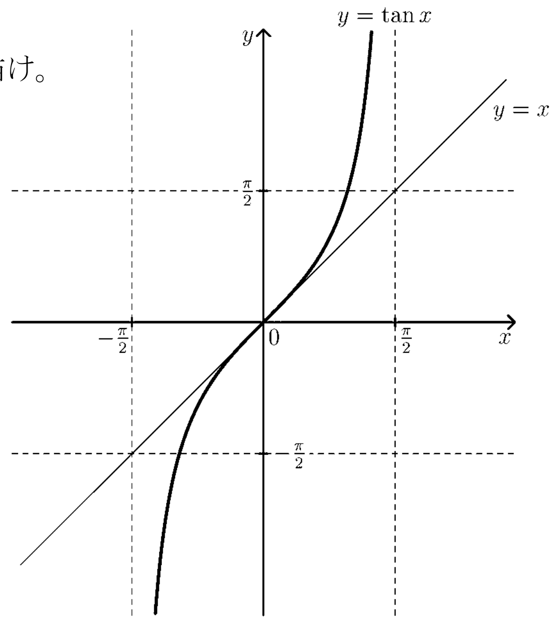
$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{又は} \qquad y = \arctan x \quad (\text{定義域: 実数全体}\ ,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは、$y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$ と書く。

問 1 右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$(\text{答})\quad \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$ (2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$ (3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

< 逆関数の練習 >

問 1 次の関数の逆関数を求め、元の関数と逆関数のグラフを同じ座標平面上に描け。

(1) $y = 2x - 1$

(2) $y = x^2 - 2$ (定義域 $x \geqq 0$)

(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (定義域 $x > 0$)

問 2 次の関数の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (3) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

(4) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (5) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (6) $\arctan(-1)$

(7) $\mathrm{cosec}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ (8) $\sec\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (9) $\cot\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$

< 合成関数 1 >

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。
これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$

$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例 2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。
例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問 2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - x + 2)^7$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

< 合成関数 2 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数を

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \; (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

という記号で表すことがある。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$

問 1 次の合成関数を求めよ。

(1) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x - 2$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(3) $f(x) = x^4 + 3x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(4) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_3 x$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

関数 $f(x)$ どうしの合成関数を

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) \quad , \quad f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$$

のように書くことがある。

例 2 $f(x) = 2x - 1$ のとき

$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$

$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(4x - 3) = 2(4x - 3) - 1 = 8x - 7$

問 2 $f(x) = 3x - 2$ のとき、次の合成関数を求めよ。

$f^2(x) =$, $f^3(x) =$

問 3 $f(x) = 2x - 1$ に対し

(1) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

$f^{-1}(x) =$

(2) 次の合成関数を求めよ。

$(f^2 \circ f^{-1})(x) = f^2(f^{-1}(x)) =$

$(f^3 \circ f^{-1})(x) = f^3(f^{-1}(x)) =$

< 合成関数 3 >

問 1 次の合成関数を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$ のとき $(f\circ g)(x)=$, $(g\circ f)(x)=$

(2) $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$ のとき $(f\circ g)(x)=$, $(g\circ f)(x)=$

例 1 $2^{\log_2 8}=2^{\log_2(2^3)}=2^3=8$

問 2 次の値を求めよ。(ただし、$x>0$ とする)

(1) $2^{\log_2 4}=$ (2) $2^{\log_2 16}=$ (3) $2^{\log_2 32}=$ (4) $2^{\log_2 x}=$

問 3 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_2 x$ のとき次の合成関数を求めよ。

$(f\circ g)(x)=$, $(g\circ f)(x)=$

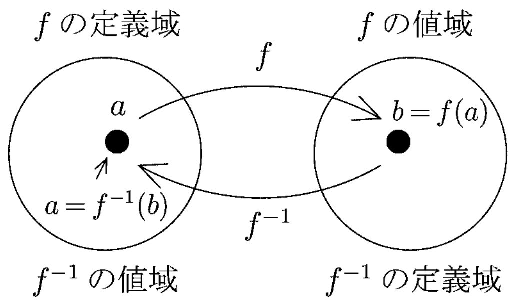
一般に関数 $f(x)$ が 1 対 1 関数のとき

$$b=f(a)\iff a=f^{-1}(b)$$

であるから

$$(f^{-1}\circ f)(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a$$

$$(f\circ f^{-1})(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b$$



例 2 $f(x)=2^x$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\log_2 x$ であるから

$2^{\log_2 3}=f(\log_2 3)=f(f^{-1}(3))=(f\circ f^{-1})(3)=3$

問 4 次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 3}$ (2) $3^{\log_3 5}$

(3) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ (4) $\tan(\tan^{-1}(1))$

< 合成関数 4 >

問 1 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ と $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$ に対し次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の定義域は $x \neq 1$ である。$f(x)$ の値域を求めよ。

(2) $g(x)$ の定義域は $x \neq 0$ である。$g(x)$ の値域を求めよ。

(3) 次式を計算せよ。

① $\big(f \circ f\big)(x) =$ ② $\big(g \circ f\big)(x) =$

(4) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(5) $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ を求めよ。

問 2 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = 4x + 5$ のとき
次の関数を x の式で表せ。

(1) $f\big(g(x)\big)$ (2) $g\big(h(x)\big)$ (3) $h\big(f(x)\big)$

(4) $g\big(f(x)\big)$ (5) $h\big(g(x)\big)$ (6) $f\big(h(x)\big)$

問 3 以下の関数を $y = g\big(f(x)\big)$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 + 4x + 5)^6$ $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $f(x) =$, $g(x) =$

問 4 次式の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ (2) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right)$

(3) $\log_3\left(3^{100}\right)$ (4) $4^{\log_4 7}$

< 数列 >

ある規則に従って並んでいる数の列を**数列**という。数列の各数を**項**といい、最初の項から順に**第 1 項** , **第 2 項** , **第 3 項** , $\cdots$, **第$\boldsymbol{n}$項** , $\cdots$ という。特に第 1 項を**初項**という。第 n 項が n についての式で表されるとき、これを**一般項**という。第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

問 1 数列の各項と 1 つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を**等差数列**といい、前の項との差を**公差**という。
初項 a , 公差 d の等差数列

$$a\ ,\ a+d\ ,\ a+2d\ ,\ a+3d\ ,\ a+4d\ ,\ \cdots\cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問 2 次の等差数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ \cdots$

(2) $5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ 17\ ,\ 21\ ,\ 25\ ,\ \cdots$

問 3 数列の各項と 1 つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。
初項 a , 公比 r の等比数列

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ ar^4\ ,\ \cdots\cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問 4 次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96\ ,\ \cdots$

(2) $4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ 108\ ,\ 324\ ,\ 972\ ,\ \cdots$

(3) $81\ ,\ 27\ ,\ 9\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{3}\ ,\ \cdots$

(4) $8\ ,\ -4\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ -\dfrac{1}{4}\ ,\ \cdots$

(5) $1\ ,\ r\ ,\ r^2\ ,\ r^3\ ,\ r^4\ ,\ r^5\ ,\ \cdots$

＜ 等比数列の和 ＞

例題　初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解)S に公比 3 をかけて、S から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{rcl}
S &=& 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\
-)3S &=& \quad 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\
\hline
-2S &=& 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \times 3^{100}
\end{array}$$

よって　　$S = \dfrac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \dfrac{5(3^{100} - 1)}{2}$

問 1　例題と同じ数列で、第 n 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$$

を求めよ。

問 2　初項 a, 公比 r の等比数列の第 n 項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

を求めよ。ただし $r \neq 1$ とする。

問 3　次の数列の和

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$$

を求めよ。

問 4　次の数列の和

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

を求めよ。

< 数列の極限 1 >

項がかぎりなく続く数列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ \cdots$$

を**無限数列**という。この無限数列において、a_n を第 n 項または一般項といい、上の無限数列を、単に $\{a_n\}$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ の極限のようす、つまり n をかぎりなく大きくしていくとき、項 a_n の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

n をかぎりなく大きくすることを、$n \to \infty$ と表す。

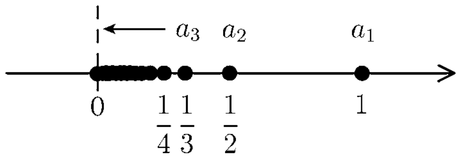
（注） 記号 ∞ は「無限大」と読む。

例 $a_n = \dfrac{1}{n}$ のときこの無限数列は

$$\frac{1}{1}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \cdots\ ,\ \frac{1}{n}\,,\ \cdots$$

となり、n を限りなく大きくすると第 n 項 $\dfrac{1}{n}$ は限りなく 0 に近づく。

このようなとき数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は **0 に収束する**といい、これを



$$n \to \infty \quad のとき \quad \frac{1}{n} \to 0$$

または

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

と表す。

一般に数列 $\{a_n\}$ について、n を限りなく大きくすると、第 n 項が限りなく一定の値 α に近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ **に収束する**といい、これを

$$n \to \infty \quad のとき \quad a_n \to \alpha$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という。

問 例の $a_n = \dfrac{1}{n}$ に対して次の値を求めよ。

(1) $a_{10} =$ 　　　　, (2) $a_{100} =$ 　　　　, (3) $a_{1000} =$ 　　　　, (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n =$

< 数列の極限 2 >

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$$

である。この結果の応用例を示す。

例 1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}2\times\frac{1}{n}=2\times 0=0$

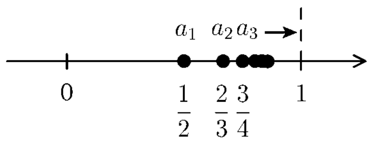
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2+0=2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=0\times 0=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}=\sqrt{0}=0$

例 2 数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ は

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots$$



となりしだいに 1 に近づくことがわかる。
これを計算式で求めるには、分母と分子を n で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

とすればよい。

例 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2-0}=0$

例 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{3n^2-2n+4}$

＜数列の極限 3＞

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、数列 $\{a_n\}$ は**発散する**という。

例 1 $a_n = 2n-1$ のとき

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ \cdots\ ,\ 2n-1\ ,\ \cdots$$

となり、n を限りなく大きくするとき第 n 項 $a_n = 2n-1$ は限りなく大きくなる。このようなとき

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$$

と表す。

一般に数列 $\{a_n\}$ において、n を限りなく大きくするとき、a_n が限りなく大きくなるならば、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**という。

これを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と表す。

例 2 $a_n = 0.01n = \dfrac{n}{100}$ のとき、数列は

$$\frac{1}{100}\ ,\ \frac{2}{100}\ ,\ \frac{3}{100}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n}{100}\ ,\ \cdots$$

となり、なかなか大きくならないが、n がさらに大きな数になると

$n = 100$ のとき $a_n = \dfrac{100}{100} = 1$

$n = 100^2$ のとき $a_n = \dfrac{(100)^2}{100} = 100$

$n = 100^3$ のとき $a_n = \dfrac{(100)^3}{100} = 100^2$

のようになるので、n が限りなく大きくなると $a_n = \dfrac{n}{100}$ も限りなく大きくなる。従って

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0.01n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100} = \infty$$

である。

一般に次の定理が成り立つ。

[**定理**] $\boxed{\text{正の数 } h > 0 \text{ に対し } \lim_{n\to\infty} h \times n = \infty}$ (チリも積れば山となる)

この定理は h がどんなに小さな数でもなりたつ。この定理を「チリも積れば山となる定理」と呼ぶことにする。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.0001n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10000} =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+0.001n} =$

< 数列の極限 4 >

数列の極限には次の性質がある。

[1] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

① $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (ただし k は定数)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

⑤ 全ての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $a_n \leqq b_n$ であれば $\alpha \leqq \beta$

⑥ 全ての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ でかつ $\alpha = \beta$
ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

[2] ① $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

② 全ての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $a_n \leqq b_n$ でかつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

(注)[2] の①は分子が一定で、分母が無限大になる分数列の極限
は常に 0 に収束することを示す。これを $\boxed{\dfrac{1}{\infty} = 0}$ と覚えるとよい。

問 1 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 4b_n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)$ (3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

問 2 $a_n = 1 - \dfrac{1}{n},\quad b_n = 1 + \dfrac{1}{n},\quad c_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ のとき次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ (2) $\lim_{n\to\infty} b_n$ (3) $\lim_{n\to\infty} c_n$

問 3 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n + n^2}$ (2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

< 数列の極限 5 >

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束しなくても数列 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ が収束することがある。

例 1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

(2) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{3n^2-2n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

例 2 r >1 なる定数 r を公比とする等比数列 $\{r^n\}$ の極限を考える。

$r^2>1, r^3>1, \cdots, r^{n-1}>1$ であるから
$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}>n$$
等比数列の和を求めると
$$\frac{r^n-1}{r-1}>n$$
よって
$$r^n>n(r-1)+1$$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{n(r-1)+1\}=\infty$ であるから、前ページ [2] の②より
$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$$

例 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}=\frac{1}{\infty}=0$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1.01)^n$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}3\times(0.9)^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{4^n+3^n}$

< 数列の収束・振動 >

数列 a_n が実数 α に収束するということは、a_n と α との距離 $|a_n - \alpha|$ が限りなく 0 に近づくことを同じである。

$$a_n \to \alpha \iff a_n \text{ と } \alpha \text{ との距離} \to 0 \iff |a_n - \alpha| \to 0$$

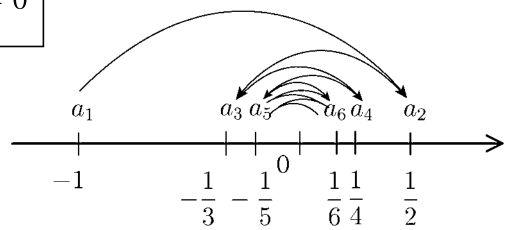
従って

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0}$$

となる。特に $\alpha = 0$ のときは

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0}$$

である。



例　数列 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ は

$a_1 = -1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = -\dfrac{1}{3}$, $a_4 = \dfrac{1}{4}$, $\cdots$

となってプラス・マイナスが交互にくるが、その絶対値をとると

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty \text{ のとき})$$

より

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ だから } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-0.99)^n =$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-3)^n} =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} =$

問 2　等比数列 $a_n = r^n$ を考える。前ページを参考にして、以下の□の中に極限値を記入せよ。

(1) $r > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(2) $r = 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \boxed{}$

(3) $0 < r < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(4) $r = 0$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \boxed{}$

(5) $-1 < r < 0$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(注)　$r = -1$ のときは $a_n = (-1)^n$ であるから

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$, $a_6 = 1$, $\cdots$

となって -1 と $+1$ が交互に表われる。従ってこの場合は収束しない。このような場合 $\{a_n\}$ は**振動する**という。

＜ 正・負の無限大 ＞

例 1 数列 $a_n = -n^2$ を考える。

$a_1 = -1$, $a_2 = -4$, $a_3 = -9$, $a_4 = -16$, $a_5 = -25$, $\cdots$

このように a_n は常にマイナスであり、その絶対値は限りなく大きくなる。
このようなとき数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい

$$n \to \infty \text{ のとき} \qquad a_n \to -\infty$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ であるが負の無限大 $(-\infty)$ と区別するために

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

と書くことがある。$+\infty$ を**正の無限大**という。

例 3 $a_n = n - n^2$ は

$a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_{10} = 10 - 100 = -90$, $a_{100} = 100 - 10000 = -9900$, $\cdots$
のようになるので $a_n \to -\infty$ と考えられる。実際

$$a_n = n - n^2 = n^2 \times \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

となるので n が十分大きいときは $\dfrac{1}{n} \fallingdotseq 0$ と考えると

$$a_n \fallingdotseq n^2 \times (-1)$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$$

がわかる。

(注) (1) $\boxed{+\infty \times (-1) = -\infty}$ として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2 \times \left(\frac{1}{n} - 1\right) = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$
と考えてもよい。

(2) n と n^2 を比較すると例 3 は n より n^2 の方が早く大きくなることを意味している。

例 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$

例 5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n - 3^n) = \lim_{n\to\infty} 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3 - n^4) =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^5 - n^4) =$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 3^n) =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 5^n) =$

< 無限級数 >

数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

を**無限級数**という。数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第 n 項までの**部分和**という。部分和を作る数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

が収束して、その極限値が S (つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$) のとき、無限級数 (1) は S に**収束する**といい、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、S を**無限級数の和**という。

例 無限級数

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分和を S_n とすると

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} \\
-) & \dfrac{1}{2}S_n = & \qquad \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \\
\hline
 & \dfrac{1}{2}S_n = & \dfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{1}{2^{n+1}}
\end{array}$$

より

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ だから

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(注) この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を**無限等比級数**という。

問 次の無限級数の和 S を求めよ。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

$<$ 無限等比級数 $>$

問 1 $-1 < r < 1$ とする。

(1) 43 ページ問 2(3)〜(5) を参考にして次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n =$ 　　　　　　　　　　, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^{n+1} =$

(2) $S_n = r + r^2 + \cdots + r^n$ とおく。以下の□に適当な文字式または数字を入れよ。

$$\begin{array}{rl} S_n = & r + r^2 + \cdots + r^n \\ -)\ rS_n = & \Box + \Box + \cdots + \Box \\ \hline (\Box - \Box)\, S_n = & \Box \quad - \quad \Box \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad S_n = \frac{\Box - \Box}{\Box - \Box}$$

(3) 等比級数の和 $S = r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ を S_n の極限として求めよ。

$S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n =$

問 2 $-1 < r < 1$ とする。任意の実数 a に対して以下の問に答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^n =$

(2) $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ とおく。上の問 1(1) を参考にして S_n を a と r で表せ。

$S_n =$

(3) 等比級数の和 $S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ を求めよ。

$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots =$

問 3 問 2 の結果を用いて以下の等比級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots$

$=$

(2) $\displaystyle\frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^4 + \cdots + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + \cdots$

$=$

(3) $\displaystyle 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

$=$

＜ 循環小数 1 ＞

分数は有限小数かまたは循環する無限小数で表される。

例 1 $\dfrac{1}{8} = 0.125$, $\dfrac{1}{25} = 0.04$, $\dfrac{3}{40} = 0.075$

(注) 分母が 2 または 5 の積の場合は必ず有限小数で表される。
それ以外の場合は必ず循環する無限小数になる。これは
小数を 10 進法で表しているからである。

例 2 $\dfrac{1}{3} = 0.33333333\cdots$, $\dfrac{1}{6} = 0.166666\cdots$

$\dfrac{7}{12} = 0.583333\cdots$, $\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123123\cdots$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 0. & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \cline{2-6}
11\,\big) & 4 & 0 & & & \\
 & 3 & 3 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 7 & 0 & & \\
 & & 6 & 6 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 & 0 & \\
 & & & 3 & 3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 7 & 0 \\
 & & & & 6 & 6 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 4
\end{array}
$$

このように同じ数が無限に繰り返さ
れる小数を**循環小数**という。
限りなく続くことをあらわすために、
繰り返される最初と最後の数の
上にドット (黒丸) を付けて表す。
例えば

$\dfrac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\dot{3}$

$\dfrac{1}{6} = 0.16666\cdots = 0.1\dot{6}$

$\dfrac{7}{12} = 0.58333\cdots = 0.58\dot{3}$

$\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123\cdots = 0.5\dot{1}2\dot{3}$

等で表す。

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & 0. & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & & & \\ \cline{2-9}
1665\,\big) & 8 & 5 & 3 & 0 & & & & & & & \\
 & 8 & 3 & 2 & 5 & & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & \multicolumn{4}{c}{\boxed{2\ \ 0\ \ 5\ \ 0}} & & & & & & \\
 & & 1 & 6 & 6 & 5 & & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 3 & 8 & 5 & 0 & & & & & \\
 & & & 3 & 3 & 3 & 0 & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 5 & 2 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & 4 & 9 & 9 & 5 & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & \multicolumn{4}{c}{\boxed{2\ \ 0\ \ 5\ \ 0}} & & & \\
 & & & & & 1 & 6 & 6 & 5 & & & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & 3 & 8 & 5 & 0 & & \\
 & & & & & & 3 & 3 & 3 & 0 & & \\ \cline{7-10}
 & & & & & & & 5 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & 4 & 9 & 9 & 5 & \\ \cline{8-11}
 & & & & & & & & \multicolumn{4}{c}{\boxed{2\ \ 0\ \ 5\ \ 0}}
\end{array}
$$

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{11}{16} =$ (2) $\dfrac{3}{125} =$ (3) $\dfrac{31}{80} =$

(4) $\dfrac{5}{12} =$ (5) $\dfrac{4}{33} =$ (6) $\dfrac{15}{37} =$

< 循環小数 2 >

前ページで分数を有限小数または循環小数になおした。このページでは逆に循環小数を分数になおす。このとき 46 ページで得られた無限等比級数の和の式

$$\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \ = \frac{a}{1-r}} \qquad (-1 < r < 1)$$

を用いる。

例 (1) $0.\dot{3} = 0.3333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$$

より初項 $a = \dfrac{3}{10}$, 公比 $r = \dfrac{1}{10}$ の等比級数の和であるから

$$0.\dot{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $0.\dot{3}\dot{6} = 0.36363636\cdots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + 0.00000036 + \cdots$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + \frac{36}{100000000} + \cdots$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

問　次の循環小数を分数になおせ。

(1)$0.\dot{5} = 0.5555\cdots =$

(2)$0.\dot{9} = 0.9999\cdots =$

(3)$0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\cdots =$

(4)$0.\dot{4}\dot{3} = 0.434343\cdots =$

(5)$0.0\dot{9} = 0.09999\cdots =$

＜小数の表示＞

例 1　前ページの結果より以下の等式が成り立つ。

(1)　$0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$

(2)　$$\begin{aligned} 0.0\dot{9} &= 0.09999\cdots = 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots \\ &= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{0.09}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0.09}{\frac{9}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1 \end{aligned}$$

例 2　$$\begin{aligned} 0.00\dot{9} &= 0.009999\cdots = 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \cdots \\ &= 0.009 + 0.009 \times \frac{1}{10} + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{0.009}{1 - \frac{1}{10}} = 0.01 \end{aligned}$$

問 1　次の循環小数を有限小数になおせ。

(1) $0.000\dot{9} =$

(2) $0.0000\dot{9} =$

例 3　(1)　$1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 1 + 0.9999\cdots = 1 + 0.\dot{9} = 1 + 1 = 2$

(2)　$2.4\dot{9} = 2.4 + 0.0\dot{9} = 2.4 + 0.1 = 2.5$

(3)　$3.13\dot{9} = 3.13 + 0.00\dot{9} = 3.13 + 0.01 = 3.14$

問 2　次の循環小数を整数または有限小数になおせ。

(1) $9.\dot{9} =$

(2) $0.1\dot{9} =$

(3) $2.78\dot{9} =$

(4) $5.0123\dot{9} =$

上記の結果より以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned} 0.9 &= 0.9999\cdots = 1 = 1.000\cdots = 1.\dot{0} \\ 1.\dot{9} &= 1.9999\cdots = 2 = 2.000\cdots = 2.\dot{0} \\ 2.4\dot{9} &= 2.4999\cdots = 2.5 = 2.5000\cdots = 2.5\dot{0} \\ 3.13\dot{9} &= 3.13999\cdots = 3.14 = 3.14000\cdots = 3.14\dot{0} \end{aligned}$$

これらの式の右辺のように有限小数は小数の途中から 0 が続く循環小数とも考えられる。有限小数は循環小数によって 2 通りに表すことができる。

< 極限の練習 >

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{3n+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{100}\right)^n$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{100}\right)^n$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n+3^n}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n}-n\right\}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^4-n^5\right)$　　(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(4^n-3^n\right)$

問 2　次の無限等比級数の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots$

(2) $8+4+2+1+\dfrac{1}{2}+\cdots$

(3) $\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{100}+\dfrac{3}{1000}+\dfrac{3}{10000}+\cdots$

問 3　次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{11}{12}$　　(2) $\dfrac{5}{9}$

(3) $\dfrac{5}{11}$　　(4) $\dfrac{3}{7}$

問 4　次の循環小数を分数になおせ。

(1) $0.\dot{7}=0.777\cdots=$　　(2) $0.\dot{1}\dot{3}=0.13131313\cdots=$

(3) $0.1\dot{2}=0.1222\cdots=$　　(4) $2.\dot{3}=2.3333\cdots=$