高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2003年度版)

入門編

No. 3

解答

＜１ページ. 関数の値＞

問１の解答

(1) $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(2) = 3$

(2) $f(1) = -1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 21$

(3) $f(-3) = 108$, $f(0) = 0$, $f(3) = 54$

(4) $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(5) = 144$

問２の解答

(1) $f(a) = a^3$, $f(a+h) = (a+h)^3$

(2) $f(a) = a + 1$, $f(a+h) = a + h + 1$

(3) $f(a) = 2a^2 - 5$, $f(a+h) = 2(a+h)^2 - 5$

(4) $f(a) = a^2 + 3a$, $f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h)$

< 2ページ. 接線 >

問の解答

(1) $\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$

(2) $2+h = 2+0.1 = 2.1$

(3) $2+h = 2+0.01 = 2.01$

< 3ページ. 極限 1 >

問 1 の解答

接線の傾き

問 2 の解答

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2-16}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(8+h)$$
$$=8$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+h)^2-\frac{1}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}+h+h^2-\frac{1}{4}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(1+h)$$
$$=1$$

＜ 4ページ. 極限 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{5(1+h)^2-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5+10h+5h^2-5}{h}=10$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-12}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12+12h+3h^2-12}{h}=12$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}=3$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-27}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{27+27h+9h^2+h^3-27}{h}=27$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)-3a}{h}=3$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}=3a^2$

＜ 5ページ. 接線の傾き 1 ＞

問 1 の解答

$$\lim_{h\to0}\frac{(\frac{1}{2}+h)^2-\frac{1}{4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{4}+h+h^2-\frac{1}{4}}{h}=\lim_{h\to0}(1+h)=1$$

問 2 の解答

$$\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=4$$

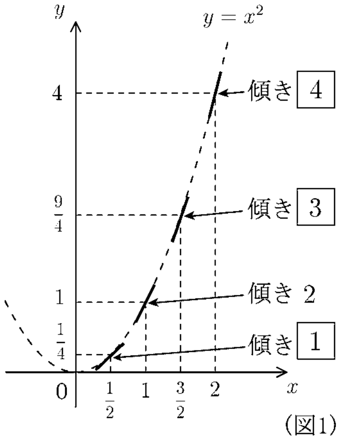
問 3 の解答

$$\lim_{h\to0}\frac{(\frac{3}{2}+h)^2-\frac{9}{4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{9}{4}+3h+h^2-\frac{9}{4}}{h}=3$$

＜ 6 ページ. 接線の傾き 2 ＞

問 1 の解答

(1)



(図1)

(2) $x = 2$ のときの傾き $= \lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \boxed{4}$

$x = \dfrac{3}{2}$ のときの傾き $= \lim_{h\to 0} \dfrac{\left(\boxed{\frac{3}{2}} + h\right)^2 - \left(\boxed{\frac{3}{2}}\right)^2}{h} = \boxed{3}$

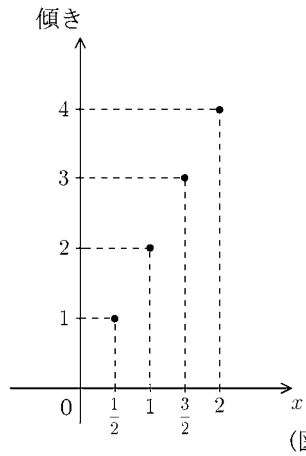
$x = \dfrac{1}{2}$ のときの傾き $= \lim_{h\to 0} \dfrac{\left(\boxed{\frac{1}{2}} + h\right)^2 - \left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2}{h} = \boxed{1}$

$x = 0$ のときの傾き $= \lim_{h\to 0} \dfrac{\left(\boxed{0} + h\right)^2 - \left(\boxed{0}\right)^2}{h} = \boxed{0}$

(3)

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
傾き	0	1	2	3	4

$\boxed{傾き = 2x}$



(図2)

問 2 の解答

$$x = a \text{ のときの傾き} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a$$

問 3 の解答

(1) $x = -1$ のときの傾き $= 2 \times (-1) = -2$

(2) $x = -2$ のときの傾き $= 2 \times (-2) = -4$

＜ 7ページ. 接線の傾き 3 ＞

問 1 の解答

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}\text{接線の傾き} &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(3a^2 + 3ah + h^2) \\ &= 3a^2\end{aligned}$$

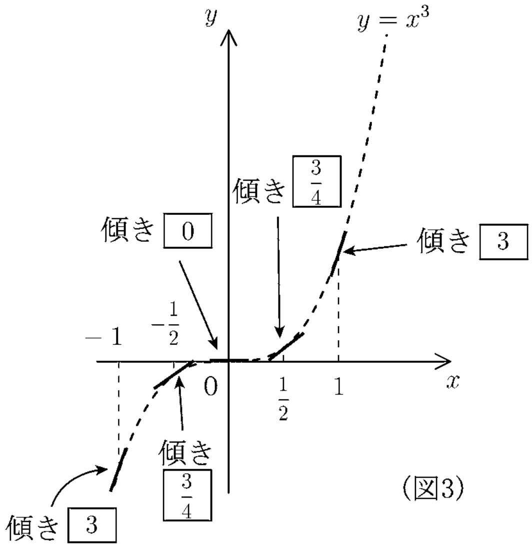
問 3 の解答

(1) $x = \dfrac{1}{2}$ のときの傾き $= 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

(2) $x = 0$ のときの傾き $= 3 \times 0^2 = 0$

(3) $x = -\dfrac{1}{2}$ のときの傾き $3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

(4) $x = -1$ のときの傾き $= 3 \times (-1)^2 = 3$



(図3)

＜ 8ページ. 微分係数 1 ＞

問 1 の解答

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

問 2 の解答

接線の傾き

問 3 の解答

(1) $f(x) = x^4$ のとき $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^4 - a^4}{h}$

(2) $f(x) = 4x^3$ のとき $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{4(a+h)^3 - 4a^3}{h}$

(3) $f(x) = x^2 - 4x$ のとき $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - 4(a+h) - a^2 + 4a}{h}$

(4) $f(x) = x^3 + 3x^2$ のとき $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 + 3(a+h)^2 - a^3 - 3a^2}{h}$

＜ 9ページ. 微分係数 2 ＞

問の解答

(1) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2}{h}$

$= 6a$

(2) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 + 3(a+h)^2 - a^3 - 3a^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0}(2a + h - 4)$

$= 2a - 4$

(3) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^3 + 3(a+h)^2 - a^3 - 3a^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a^3 - 3a^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0}(3a^2 + 3ah + h^2 + 6a + 3h)$

$= 3a^2 + 6a$

＜ 10 ページ. 微分係数 3 ＞

問 1 の解答

$f'(a) = 2a - 4$

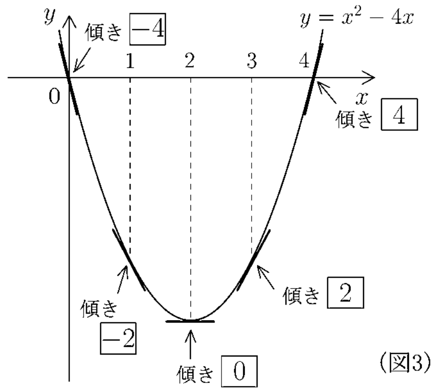
$f'(0) = -4$

$f'(1) = -2$

$f'(2) = 0$

$f'(3) = 2$

$f'(4) = 4$



(図3)

問 2 の解答

$f'(a) \quad = 3a^2 + 6a$

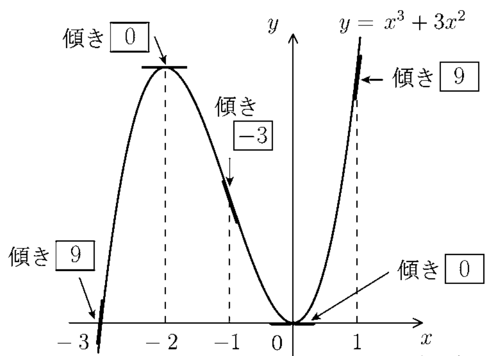
$f'(-3) = 9$

$f'(-2) = 0$

$f'(-1) = -3$

$f'(0) \quad = 0$

$f'(1) \quad = 9$



(図4)

< 11ページ. 導関数 1 >

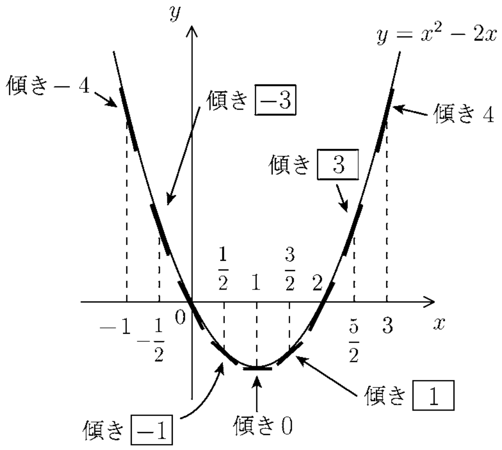
問 1 の解答

(1) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

(2) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

(3) $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$

(4) $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3$



問 2 の解答

(1) $f(x) = x^2$

$f'(a) = 2a$

$f'(x) = 2x$

(2) $f(x) = x^3$

$f'(a) = 3a^2$

$f'(x) = 3x^2$

(3) $f(x) = 5x^2$

$f'(a) = 10a$

$f'(x) = 10x$

(4) $f(x) = 2x^2 - 4x$

$f'(a) = 2a - 4$

$f'(x) = 2x - 4$

(5) $f(x) = x^3 + x^2$

$f'(a) = 3a^2 + 2a$

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

(6) $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(a) = 3a^2 + 6a$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

< 12ページ. 導関数 2 >

問 1 の解答

(1) $f'(x) = 0$

(2) $f'(x) = 5$

問 2 の解答

(1) $(3)' = 0$　(2) $(2)' = 0$　(3) $(2x - 1)' = 2$

(4) $(5x - 2)' = 5$　(5) $(5x^2)' = 10x$　(6) $(x^2 - 2x)' = 2x - 2$

(7) $(x^2 - 4x)' = 2x - 4$　(8) $(x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$　(9) $(x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$

< 13ページ.導関数 3 >

問の解答

(1) $(x^3+2)' = 3x^2$

(2) $(3x^2-2x^3)' = 6x-6x^2$

(3) $(x^2-3x+2)' = 2x-3$

(4) $(3x^3-x^2+5x-1)' = 9x^2-2x+5$

< 14 ページ. パスカルの三角形 >

問 1 の解答

(1) $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$= \boxed{1} \times a^4 + \boxed{4} \times a^3b + \boxed{6} \times a^2b^2 + \boxed{4} \times ab^3 + \boxed{1} \times b^4$

(2) $(a+b)^5 = (a+b)\left(\boxed{1} \times a^4 + \boxed{4} \times a^3b + \boxed{6} \times a^2b^2 + \boxed{4} \times ab^3 + \boxed{1} \times b^4\right)$

$= \boxed{1} \times a^5 + \boxed{5} \times a^4b + \boxed{10} \times a^3b^2 + \boxed{10} \times a^2b^3 + \boxed{5} \times ab^4 + \boxed{1} \times b^5$

問 2 の解答

$(a+b)^0 = 1$ ⋯⋯ 1

$(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b^2$ ⋯⋯ 1 1

$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$ ⋯⋯ 1 2 1

$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$ ⋯⋯ 1 3 3 1

$(a+b)^4 = \boxed{1} \times a^4 + \boxed{4} \times a^3b + \boxed{6} \times a^2b^2 + \boxed{4} \times ab^3 + \boxed{1} \times b^4$ ⋯⋯ $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

$(a+b)^5 = \boxed{1} \times a^5 + \boxed{5} \times a^4b + \boxed{10} \times a^3b^2 + \boxed{10} \times a^2b^3 + \boxed{5} \times ab^4 + \boxed{1} \times b^5$ $\boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{5}\ \boxed{1}$

$(a+b)^6 = \boxed{1} \times a^6 + \boxed{6} \times a^5b + \boxed{15} \times a^4b^2 + \boxed{20} \times a^3b^3 + \boxed{15} \times a^2b^4 + \boxed{6} \times ab^5 + \boxed{1} \times b^6$

問 3 の解答

(1) $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

(2) $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

(3) $(x+h)^6 = x^6 + 6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + 15x^2h^4 + 6xh^5 + h^6$

＜ 15 ページ. 整関数の微分 1 ＞

問の解答

$$
\begin{aligned}
(x^4)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+x^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

＜ 16 ページ. 整関数の微分 2 ＞

問 1 の解答

$$
\begin{aligned}
(x^5)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\
&= 5x^4
\end{aligned}
$$

問 2 の解答

$$
\begin{aligned}
(x^6)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^6 - x^6}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^6 + 6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + 15x^2h^4 + 6xh^5 + h^6 - x^6}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5) \\
&= 6x^5
\end{aligned}
$$

問 3 の解答

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	$6x^5$

問 4 の解答

$$(x^n)' = n^{n-1}$$

< 17 ページ. 整関数の微分 3 >

問の解答

(1) $(x - x^3)' = 1 - 3x^2$

(2) $(7x^6)' = 42x^5$

(3) $(10x^4 + 8x^7)' = 40x^3 + 56x^6$

(4) $(6x^5 - 2x^3 + 3)' = 30x^4 - 6x^2$

(5) $(3x^5 - 6x^2 + 9)' = 15x^4 - 12x$

(6) $(4x^7 - 4x^4 + 9x^2 - 5x)' = 28x^6 - 16x^3 + 18x - 5$

(7) $((x-1)(x+4))' = (x^2 + 3x - 4)' = 2x + 3$

(8) $\big((x^2-3)(x^2-2)\big)' = (x^4 - 5x^2 + 6)' = 4x^3 - 10x$

＜ 18 ページ. 微分の練習 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+6h+3h^2-3}{h}=6$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}=3a^2$

(3) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+3(a+h)-a^2-3a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+3a+3h-a^2-3a}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}(2a+h+3)=2a+3$

問 2 の解答

(1) $y=2(x+1)(x-4)=2x^2-6x-8$ (答) $y'=4x-6$

(2) $y=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$ (答) $y'=3x^2-6x+3$

問 3 の解答

(1) $y'=2x-2$, $x=-1$ のとき $y'=2\times(-1)-2=-4$ (答) -4

(2) $y'=3x^2$, $x=2$ のとき $y'=3\times 2^2=12$ (答) 12

(3) $y'=3x^2+2x$, $x=1$ のとき $y'=3+2=5$ (答) 5

問 4 の解答

(1) $y'=3x^2-2x$, $x=3$ のとき $y'=3\times 3^2-2\times 3=21$ (答) 21

(2) $y'=3x^2-2x$, $x=a$ のとき

$\Rightarrow\quad y'=3a^2-2a=1\quad\Rightarrow\quad 3a^2-2a-1=0\quad\Rightarrow\quad (3a+1)(a-1)=0$

$\Rightarrow\quad a=-\dfrac{1}{3},\ 1$

$b=a^3-a^2=-\dfrac{4}{27},\ 0$ (答) $(a,b)=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{27}\right)$ または $(1,0)$

問 5 の解答

$f(x)=1+a+b+c=3\quad\Rightarrow\quad a+b+c=2\cdots\cdots$ ①

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(1)=3+2a+b=10\quad\Rightarrow\quad 2a+b=7\cdots\cdots\cdots$ ②

$f'(2)=12+4a+b=25\quad\Rightarrow\quad 4a+b=13\cdots\cdots\cdots$ ③

①, ②, ③より

$a=3,\ \ b=1,\ \ c=-2$ (答) $f(x)=x^3+3x^2+x-2$

< 19ページ. 関数の増減 1 >

問の解答

(1) $y' = 2x - 2$, 頂点 $(1, 2)$

x	$x < 1$	1	$1 < x$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	2	$\nearrow$

(2) $y' = -4x + 8$, 頂点 $(2, 7)$

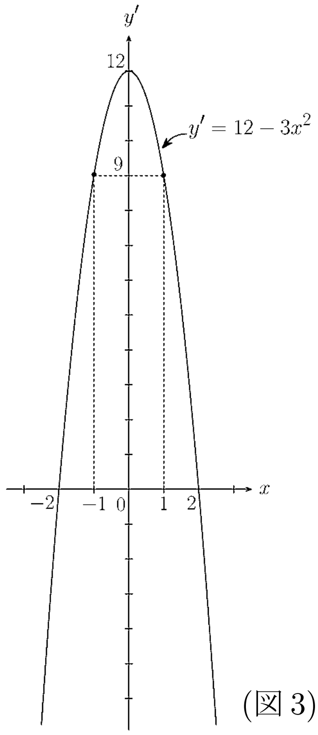
x	$x < 2$	2	$2 < x$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$

＜ 20 ページ. 関数の増減 2 ＞

問の解答

$$y' = 12 - 3x^2$$
$$= 3(4 - x^2)$$
$$= -3(x-2)(x+2)$$

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$2 < x$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-16	↗	16	↘



(図 3)

< 21 ページ. 関数の増減 3 >

問の解答

(1) $y = -x^3 + 3x^2$

$y' = -3x^2 + 6x$

$= -3x(x-2)$

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-1)(x-3)$

x	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

< 22 ページ. 極大・極小 1 >

問の解答

$$
\begin{aligned}
y' &= 6x^2 + 6x - 12 \\
&= 6(x^2 + x - 2) \\
&= 6(x-1)(x+2)
\end{aligned}
$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

<u>$x = -2$ のとき極大値 $y = 20$</u>

<u>$x = 1$ のとき極小値 $y = -7$</u>

< 23ページ. 極大・極小 2 >

問の解答

(1) $y' = -4x^3 + 4x$

$= -4x(x^2 - 1)$

$= -4x(x - 1)(x + 1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	6	$\searrow$

$$\begin{cases} x = \pm 1 & \text{のとき極大値} \quad y = 6 \\ x = 0 & \text{のとき極小値} \quad y = 5 \end{cases}$$

(2) $y' = 12x^3 - 24x^2 - 36x$

$= 12x(x^2 - 2x - 3)$

$= 12x(x - 3)(x + 1)$

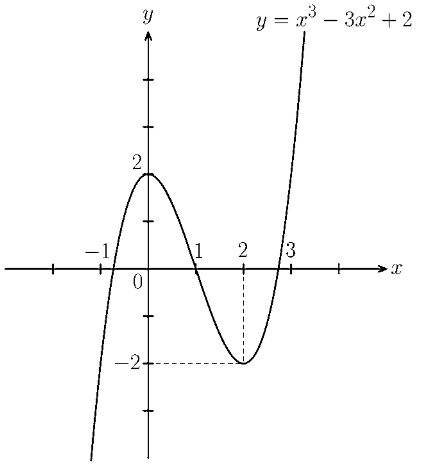
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-135	$\nearrow$

$$\begin{cases} x = -1 & \text{のとき極小値} \quad y = -7 \\ x = 0 & \text{のとき極大値} \quad y = 0 \\ x = 3 & \text{のとき極小値} \quad y = -135 \end{cases}$$

＜ 24 ページ. 関数のグラフ ＞

問の解答

(1) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

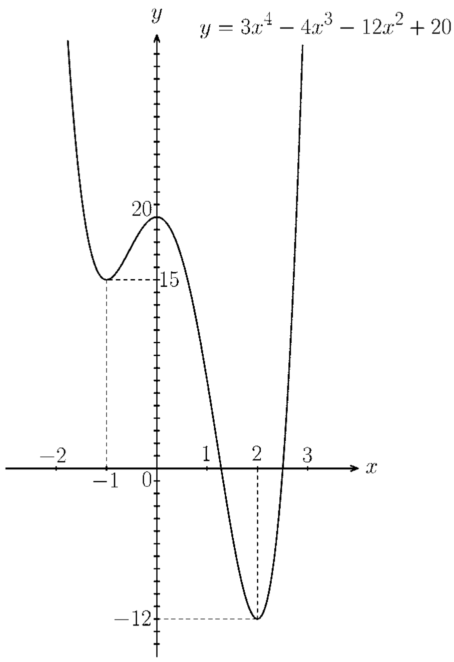
$x = 0$ のとき極大値 $y = 2$

$x = 2$ のとき極小値 $y = -2$

(2) $y' = 12^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x(x^2 - x - 2)$

$= 12x(x-2)(x+1)$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	15	↗	20	↘	-12	↗

$x = -1$ のとき極小値 $y = 15$

$x = 0$ 　のとき極大値 $y = 20$

$x = 2$ 　のとき極小値 $y = -12$

< 25 ページ. 最大・最小 1 >

問の解答

$$
\begin{aligned}
y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\
&= 3(x^2 - 4x + 3) \\
&= 3(x-3)(x-1)
\end{aligned}
$$

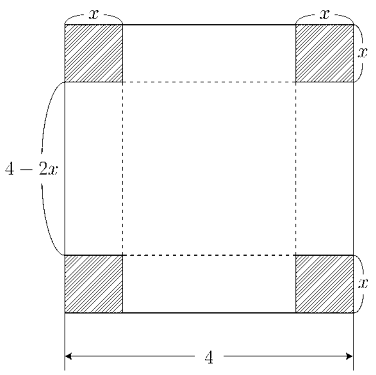
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-19	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3

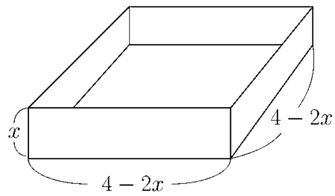
$x = 1$ のとき最大値 $y = 1$

$x = -1$ のとき最小値 $y = -19$

< 26 ページ. 最大・最小 2 >

問の解答





x の範囲は $\underline{\ 0 < x < 2\ }$ である

$$
\begin{aligned}
y &= x(4-2x)^2 \\
&= x(16-16x+4x^2) \\
&= 4x^3-16x^2+16x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^2-32x+16 \\
&= 4(3x^2-8x+4) \\
&= 4(3x-2)(x-2)
\end{aligned}
$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
y'	╳	$+$	0	$-$	╳
y	0	↗	$\frac{128}{27}$	↘	0

$$x = \frac{2}{3} \ \Rightarrow \ y = \frac{128}{27}$$

(答) $x = \dfrac{2}{3}$(cm) のとき最大容積 $y = \dfrac{128}{27}$(cm^3)

< 27ページ. 微分記号 >

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -9.8$

(3) $\dfrac{d\ell}{dt} = 6t - 2$

(4) $\dfrac{dS}{dr} = 2\pi r$

(5) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

< 28 ページ. 時間の関数 >

問 1 の解答

(1) $f(2) = 19.6$　(2) $f(4) = 78.4$　(3) $f(3.5) = 60.025$

問 2 の解答

$x(0) = 0$　$y(0) = 0$

$x(1) = 19.6$　$y(1) = 14.7$

$x(2) = 39.2$　$y(2) = 19.6$

問 3 の解答

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad , \quad v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

問 4 の解答

(1) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{4.9 \times (3+h)^2 - 4.9 \times 3^2}{h}$　(2) $f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{4.9 \times (t+h)^2 - 4.9 \times t^2}{h}$

問 5 の解答

$x'(t) = 29.4$

$y'(t) = -9.8t + 29.4$

$v'(t) = 0$

＜ 29 ページ. 平均速度 ＞

問 1 の解答

$$72(\text{km/h}) = \frac{72\text{km}}{60\text{min}} = \boxed{1.2}\,(\text{km/min}) = \boxed{20}\,(\text{m/s})$$

問 2 の解答

(1) $$\frac{4.9\times 3^2 - 4.9\times 1^2}{3-1} = \frac{44.1-4.9}{2} = \frac{39.2}{2} = 19.6(\text{m/s})$$

(2) $$\frac{4.9\times 4^2 - 4.9\times 3^2}{4-3} = \frac{4.9}{1}\left(4^2-3^2\right) = 4.9\times 7 = 34.3(\text{m/s})$$

(3) $$\frac{4.9\times 3.5^2 - 4.9\times 3^2}{3.5-3} = \frac{4.9}{0.5}\left(3.5^2-3^2\right) = 9.8\times 3.25 = 31.85(\text{m/s})$$

(4) $$\frac{4.9\times 3.1^2 - 4.9\times 3^2}{3.1-3} = \frac{4.9}{0.1}\left(3.1^2-3^2\right) = 49\times 0.61 = 29.89(\text{m/s})$$

< 30 ページ. 瞬間の速度 1 >

問 1 の解答

(1)
$$\frac{4.9\times 3.01^2-4.9\times 3^2}{3.01-3}=\frac{4.9}{0.01}\left(3.01^2-3^2\right)$$
$$=490\times 0.0601$$
$$=29.449(\mathrm{m/s})$$

(2)
$$\frac{4.9\times(3+h)^2-4.9\times 3^2}{3+h-3}=\frac{4.9}{h}\times\left\{9+6h+h^2-9\right\}$$
$$=\frac{4.9}{h}(6h+h^2)$$
$$=4.9(6+h)$$
$$=29.4+4.9h(\mathrm{m/s})$$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(29.4+4.9h)=29.4$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{4.9\times(t+h)^2-4.9\times 1^2}{t+h-t}=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left\{2th+h^2\right\}}{h}=9.8t$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

問 3 の解答

(1) 29.4 (m/s)

(2) $9.8t$ (m/s)

問 4 の解答

(1) $f'(3)$

(2) $f'(t)$

< 31 ページ. 瞬間の速度 2 >

問 1 の解答

(1) 2 秒後の速度 $= f'(2) = 9.8 \times 2 = 19.6$

(2) 4 秒後の速度 $= f'(4) = 9.8 \times 4 = 39.2$

問 2 の解答

(1) $v(t) = f'(t) = -9.8t + 29.4$

(2) $v(0) = -9.5 \times 0 + 29.4 = 29.4(\mathrm{m/s})$

(3) $v(t) = -9.8t + 29.4 = 0 \iff t = 3$ (答) 3 秒後

(4) $f(3) = 83.3(\mathrm{m})$

< 32 ページ. 速度の応用 1 >

問の解答

(1) $v(t) = y'(t) = -9.8t + 19.6(\mathrm{m/s})$

(2) $v(0) = 19.6(\mathrm{m/s})$

(3) $v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \iff t = 2$ (答) 2 秒後

(4) $y(2) = 44.1(\mathrm{m})$

(5)
$$\begin{aligned} y(t) &= -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 = 0 \\ &\Downarrow \quad \div 4.9 \\ &-t^2 + 4t + 5 = 0 \\ &\Downarrow \\ &t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1) = 0 \end{aligned}$$
(答) 5 秒後

< 33 ページ. 速度の応用 2 >

問の解答

(1) $v_x(t) = x'(t) = 14.7$

(2) $v_y(t) = y'(t) = -9.8t + 19.6$

(3) $v_y(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \;\Rightarrow\; t = 2$ (答) 2 秒後

(4) $y(2) = 19.6$ (答) 19.6(m)

(5) $y(t) = -4.9t^2 + 19.6t = 0$

$-4.9t(t-4) = 0$ (答) 4 秒後

(6) $x(4) = 14.7 \times 4 = 58.8$ (答) 58.8(m)

< 34 ページ. 速度の応用 3 >

問の解答

(1) $v_x(t) = x'(t) = 29.4$

$v_y(t) = y'(t) = -9.8t + 29.4$

(2) $v_y(t) = -9.8t + 29.4 = 0 \Rightarrow t = 3$　　(答) 3 秒後

(3) 高さ $= y(3) = 78.4$　　(答) 78.4m

水平距離 $= x(3) = 88.2$　　(答) 88.2m

(4) $y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 = 0$

$$\Downarrow \div(-4.9)$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(t-7)(t+1) = 0$$

(答) 7 秒後

(5) $x(7) = 29.4 \times 7 = 205.8$　　(答) 205.8m

< 35ページ.速度と速さ >

問１の解答

速度　$\overrightarrow{v}(1.5) = (2,\ -8 \times 1.5 + 8) = (2,\ -4)$

速さ　$|\overrightarrow{v}(1.5)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

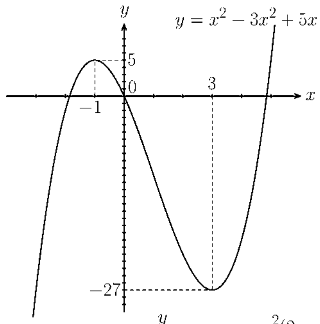
問２の解答

$\overrightarrow{v}(t) = (4,\ -6t + 9)$

速度　$\overrightarrow{v}(1) = (4,\ 3)$

速さ　$|\overrightarrow{v}(1)| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

< 36 ページ. 微分の応用 >

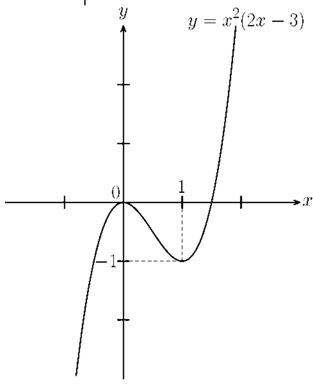


問 1 の解答

(1) $x = -1$ のとき極大値 $y = 5$

$x = 3$ のとき極小値 $y = -27$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	5	↘	-27	↗



(2) $x = 0$ のとき極大値 $y = 0$

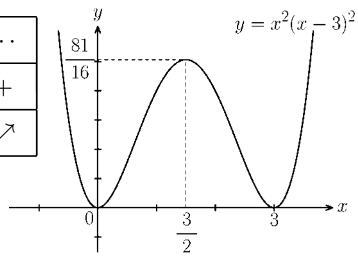
$x = 1$ のとき極小値 $y = -1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-1	↗

(3) $x = \dfrac{3}{2}$ のとき極大値 $y = \dfrac{81}{16}$

$x = 0,\ 3$ のとき極小値 $y = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	$\frac{81}{16}$	↘	0	↗



問 2 の解答

(1) $x = -2$ のとき最大値 $y = 7$

$x = 1$ のとき最小値 $y = -2$

x	-2	$\cdots$	1
y'	0	$-$	$-$
y	7	↘	-2

(2) $x = 3$ のとき最大値 $y = 27$

$x = -1,\ 5$ のとき最小値 $y = -5$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	╳	$-$	0	$+$	0	$-$	╳
y	2	↘	-5	↗	27	↘	-5

問 3 の解答

(1) $y = x(6 - 2x)(6 - x) = 2x^3 - 18x^2 + 36x$

(2) $y' = 6x^2 - 36x + 36 = 6\left\{(x - 3)^2 - 3\right\}$

(答) $x = 3 - \sqrt{3}$ (cm)

x	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'	╳	$+$	0	$-$	╳
y	0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0

問 4 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + 29.4$

(2) $v(t) = 0 \ \Rightarrow\ t = 3$

$y(3) = 122.5$

(答) 3 秒後，高さ 122.5m

(3) $y(t) = 0 \ \Rightarrow\ -4.9t^2 + 29.4t + 78.4 = 0$

$$\Downarrow \ \div(-4.9)$$

$$(t - 8)(t + 2) = 0$$

(答) 8 秒後

< 37 ページ. 原始関数 >

問の解答

(1) x^4 の原始関数の一般形 $= \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) x^5 の原始関数の一般形 $= \frac{1}{6}x^6 + C$

(3) x^6 の原始関数の一般形 $= \frac{1}{7}x^7 + C$

< 38 ページ. 不定積分 1 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) $\displaystyle\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

(3) $\displaystyle\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$

問 2 の解答

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

< 39 ページ. 不定積分 2 >

問 1 の解答

2 式の右辺の関数を微分すると

$$(F(x)+G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x) + g(x)$$

より、 $F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の原始関数である。

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int 6x^2 dx = 2x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int (x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

(3) $\displaystyle\int (x^2+4x+3)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + C$

(4) $\displaystyle\int (2x^2-x-1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

< 40 ページ. 不定積分 3 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int (x-2)^3 dx = \int (x^2-4x+4)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$

(2) $\displaystyle\int (3x+1)^2 dx = \int (9x^2+6x+1)dx = 3x^3 + 3x^2 + x + C$

(3) $\displaystyle\int (x-1)(x-2)dx = \int (x^2-3x+2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

(4) $\displaystyle\int (x+1)(x-3)dx = \int (x^2-2x-3)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$

(5) $\displaystyle\int (2-x)(x-3)dx = \int (-x^2+5x-6)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C$

(6) $\displaystyle\int (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x + C$

問 2 の解答

(1) $F(x) = 3x + C$

$F(1) = 3 + C = 2 \ \Rightarrow\ C = -1$　　　(答) $F(x) = 3x - 1$

(2) $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$

$F(2) = \dfrac{5}{2} \times 4 + 4 \times 2 + C$

$= 18 + C = 6 \ \Rightarrow\ C = -12$　　　(答) $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 4x - 12$

(3) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + C$

$F(4) = \dfrac{2}{3} \times 64 - \dfrac{7}{2} \times 16 + C$

$= \dfrac{128-167}{3} + C = -5 \ \Rightarrow\ C = \dfrac{25}{3}$　　　(答) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{25}{3}$

(4) $F(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + C$

$F(0) = C = 0 \ \Rightarrow\ C = 0$　　　(答) $F(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

< 41 ページ. 不定積分 4 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int(10-9.8t)dt = 10t - 4.9t^2 + C$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 + C$

(3) $\displaystyle\int(6t^2-4t+5)dt = 2t^3 - 2t^2 + 5t + C$

(4) $\displaystyle\int(u-1)(u-2)dt = \int(u^2-3u+2)du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 2u + C$

(5) $\displaystyle\int(t+3)^2dt = \int(t^2+6t+9)dt = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 9t + C$

＜ 42 ページ. 不定積分の応用 1 ＞

問 1 の解答

(1) $F(t) = 5t + C \ \Rightarrow\ C = 8$ (答) $F(t) = 5t + 8$

(2) $F(t) = -2t^2 + 6t + C$

$F(1) = -2 + 6 + C = 4 + C = 7 \ \Rightarrow\ C = 3$ (答) $F(t) = -2t^2 + 6t + 3$

問 2 の解答

$v(t) = -10t + C$

$v(0) = C = 20$ (答) $v(t) = -10t + 20$

問 3 の解答

$y'(t) = -10t + 20$

$y(t) = -5t^2 + 20t + C$

$y(0) = C = 25$ (答) $y(t) = -5t^2 + 20t + 25$

問 4 の解答

$y'(t) = v(t) = -10t + 20 = -10(t - 2)$

$t = 2 \ \Rightarrow\ y(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 + 25 = 45$

(答) $t = 2$ のとき最大値 $y(t) = 45$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	45	$\searrow$

＜ 43 ページ. 不定積分の応用 2 ＞

問 1 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + 19.6$

(2) $y(t) = \int (-9.8t + 19.6)dt$

$= -4.9t^2 + 19.6t + C$　　　(答) $y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 58.8$

(3) $y'(t) = v(t)$

$= -9.8t + 19.6$

$= -9.8(t - 2)$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	78.4	$\searrow$

(4) (3) の増減表より、2 秒後に最高点に達する。

そのときの高さ y は 78.4m 、速度 v は 0(m/s) 。

(5) $-4.9t^2 + 19.6t + 58.8 = 0$

$t^2 - 4t - 12 = 0$

$(t - 6)(t + 2) = 0$　　　$t = 6,\ -2$

(6) 6 秒後

問 2 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + 39.2$

(2) $y(t) = -4.9t^2 + 39.2t + 44.1$

(3) ボールが最高点に達するのは $v(t) = 0$ を満たすときである。

すなわち、(1) の式

$$v(t) = -9.8t + 39.2 = -9.8(t - 4) = 0$$

となるときであり、これを満たすのは $t = 4$ のときである。

よって、ボールが最高点に達するのは 4 秒後である。

また、そのときの高さは

$$y(4) = -4.9 \times 16 + 39.2 \times 4 + 44.1 = 122.5\text{m}$$

となる。

(4) $y(t) = -4.9t^2 + 39.2t + 44.1 = 0$

$t^2 - 8t - 9 = 0$

$(t - 9)(t + 1) = 0$　　　(答) 9 秒後

< 44 ページ. 定積分 1 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_a^b 2x dx = \left[x^2\right]_a^b = b^2 - a^2$

(2) $\displaystyle\int_a^b 4x^3 dx = \left[x^4\right]_a^b = b^4 - a^4$

< 45 ページ. 定積分 2 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_4^9 1dx = [x]_4^9 = 5$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^1 = 3$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2 = 0$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3 + x^2 + x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

(6) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 + 3x^2 - 5x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_0^4 = 88$

(7)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx &= \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-b)dx &= \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+b}{2}x^2 + abx\right]_a^b \\ &= \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a+b}{2}b^2 + ab^2\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a+b}{2}a^2 + a^2b\right) \\ &= \frac{1}{6}\left\{2b^3 - 3ab^2 - 3b^3 + 6ab^2 - (2a^3 - 3a^3 - 3a^2b + 6a^2b)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{-b^3 + 3ab^2 - \left(-a^3 + 3a^2b\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}(a-b)^3\end{aligned}$$

＜ 46 ページ. 定積分 3 ＞

問 1 の解答

$\displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = F(x) + G(x) + c$ より、

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(b) \\ &= \{F(b) - F(a)\} + \{G(b) - G(a)\} \\ &= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx &= [F(x)]_b^a \\ &= F(a) - F(b) \\ &= -(F(b) - F(a)) \\ &= -\left([F(x)]_a^b\right) \\ &= -\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

問 3 の解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 kx^2dx = k\int_1^3 x^2dx = k\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{26}{3}k$

(2) $$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+3x)dx + \int_0^1 (x^2-3x)dx &= \int_0^1 \left\{(x^2+3x)+(x^2-3x)\right\}dx \\ &= \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} \left(x^2 + x + 4\right) dx = 0$

(4) $$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \left(x^2+2x\right)dx + \int_0^1 \left(x^2+2x\right)dx + \int_1^3 \left(x^2+2x\right)dx &= \int_{-1}^3 \left(x^2+2x\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^3 = \frac{52}{3}\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_1^3 \left(x^2 - x\right)dx + \int_3^1 \left(x^2 - x\right)dx = \int_1^1 \left(x^2 - x\right)dx = 0$

< 47 ページ. 定積分 4 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4-9.8t)dt = \left[4t-4.9t^2\right]_1^3 = -31.2$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr = \left[\pi r^2\right]_0^R = \pi R^2$

(3) $$\int_0^2 t(t-2)dt = \int_0^2 (t^2-2t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

(4) $$\int_1^4 (t-1)(4-t)dt = \int_1^4 (-t^2+5t-4)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t\right]_1^4 = \frac{9}{2}$$

(5) $$\int_1^x \left(t^2+t\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{6}$$

(6) $$\int_a^x \left(6t^2-4t\right) dt = \left[2t^3-2t^2\right]_a^x = 2x^3 - 2x^2 - 2a^3 + 2a^2$$

＜ 48ページ. 定積分 5 ＞

問1の解答

(1) $\displaystyle\int_1^x (2t+3)dt = \left[t^2+3t\right]_1^x = x^2+3x-4$

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (2t+3)dt = \frac{d}{dx}(x^2+3x-4) = 2x+3$$

(2) $\displaystyle\int_0^x (6t^2+4t+5)dt = \left[2t^3+2t^2+5t\right]_0^x = 2x^3+2x^2+5x$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (6t^2+4t+5)dt = \frac{d}{dx}(2x^3+3x^2+5x) = 6x^2+4x+5$$

(3) $\displaystyle\int_a^x (5t^2-6t)dt = \left[\frac{5}{3}t^3-3t^2\right]_a^x = \frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{5}{3}a^3+3a^2$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (5t^2-6t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{5}{3}a^3+3a^2\right) = 5x^2-6x$$

問2の解答

$$\int_a^t (6x^2+8x)dx = \left[2x^3+4x^2\right]_a^t = 2t^3+4t^2-2a^3-4a^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^t (6x^2+8x)dx = \frac{d}{dt}(2t^3+4t^2-2a^3-4a^2) = 6t^2+8t$$

< 49 ページ. 変位と道のり >

問の解答

(1)
$$\int_1^3 (2-t)dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^3$$
$$= \left(6 - \frac{9}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 0$$

(2)
$$\int_1^3 |2-t|dt = \int_1^2 |2-t|dt + \int_2^3 |2-t|dt$$
$$= \int_1^2 (2-t)dt + \int_2^3 (t-2)dt$$
$$= \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^3$$
$$= \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$$
$$= 1$$

< 50 ページ. 積分の練習 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int(3x-5)dx = \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$

(2) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7\right)dx = \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$

(3) $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4x\right)dx = -\frac{1}{9}x^3 + 2x^2 + C$

(4) $\displaystyle\int(x-1)(2x+1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(5) $\displaystyle\int(t^2 - 4x + 3)dt = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + C$

(6) $\displaystyle\int(2t+1)^2dt = \int(4t^2 + 4t + 1)dt = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + t + C$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{1} = \frac{20}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx = \int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\frac{32}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2}(t-1)^2dt = \int_{0}^{2}(t^2 - 2t + 1)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + t\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{3}|10 - 5t|dt = \int_{1}^{2}(10 - 5t) + \int_{2}^{3}(5t - 10)dt = 5$

問 3 の解答

(1) $F(t) = -\dfrac{5}{2}t^2 + 10t + C$

$F(1) = -\dfrac{5}{2} + 10 + C = 3 \quad\Rightarrow\quad C = -\dfrac{9}{2}$

(答) $F(t) = -\dfrac{5}{2}t^2 + 10t - \dfrac{9}{2}$

(2) $F(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 7t + C$

$F(0) = C = 0$

(答) $F(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 7t$

問 4 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + C\ , \qquad v(0) = 19.6 \quad\Rightarrow\quad C = 19.6$

(答) $v(t) = -9.8t + 19.6$

(2) $\displaystyle y(t) = \int(-9.8t + 19.6)dt = -4.9t^2 + 19.6t + C\ , \qquad y(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 0$

(答) $y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$

(3) $y'(t) = v(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad -9.8t + 19.6 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 2\ , \qquad y(2) = 19.6$

(答) 2 秒後に最高の高さ 19.6m に達する

(4) 道のり $\displaystyle = \int_{1}^{3}|v(t)|dt = \int_{1}^{3}|-9.8t + 19.6|dt = \int_{1}^{2}(-9.8t + 19.6)dt + \int_{2}^{3}(9.8t - 19.6)dt = 9.8$

(答) 9.8m

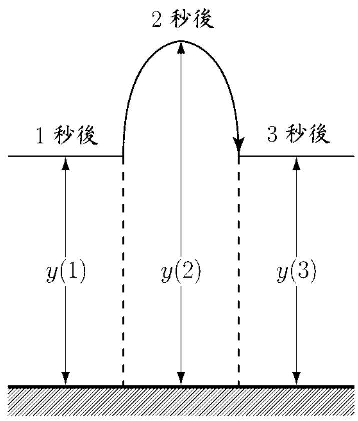
(4) の別解

◎ 2 秒後に最高点に達する

1 秒後の高さ $= y(1) = 14.7$(m)

2 秒後の高さ $= y(2) = 19.6$(m)

3 秒後の高さ $= y(3) = 14.7$(m)



よって

① 1 秒後から 2 秒後までの間に動いた距離 $= y(2) - y(1) = 4.9$(m)

② 2 秒後から 3 秒後までの間に動いた距離 $= y(2) - y(3) = 4.9$(m)

①と②より

(答) 1 秒後から 3 秒後までの間に動いた距離 $= 4.9 + 4.9 = 9.8$(m)