

高知工科大学
基礎数学ワークブック

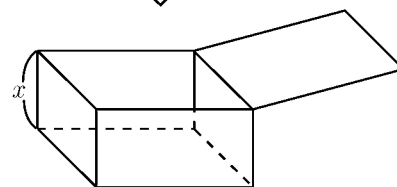
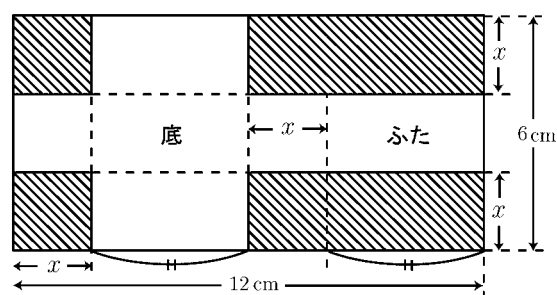
(2003年度版)

入門編

No. 3

内容

- ◎ 整関数の微分
- ◎ 関数の増減
- ◎ 位置と速度
- ◎ 整関数の不定積分
- ◎ 整関数の定積分



井上 昌昭 著

< 関数の値 >

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例 1 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \quad (f(\square) = \square^2 + 5 \times \square - 4)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 3^2 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問 1 $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(2) =$$

$$(2) f(x) = x^3 - 2x \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(2) = \quad , \quad f(3) =$$

$$(3) f(x) = x^4 - x^3 \quad , \quad f(-3) = \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(3) =$$

$$(4) f(x) = (x^2 - 1)(x + 1) \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(5) =$$

例 2 $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 + 3(1 + h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h)$$

問 2 $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a + h)$ を求めよ。

$$(1) f(x) = x^3 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(2) f(x) = x + 1 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - 5 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(4) f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

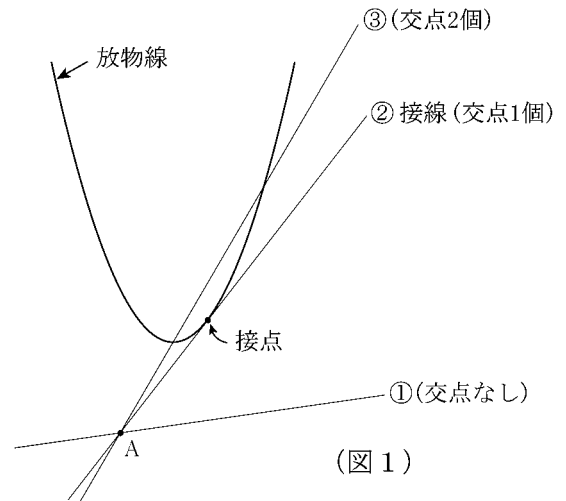
< 接線 >

放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると

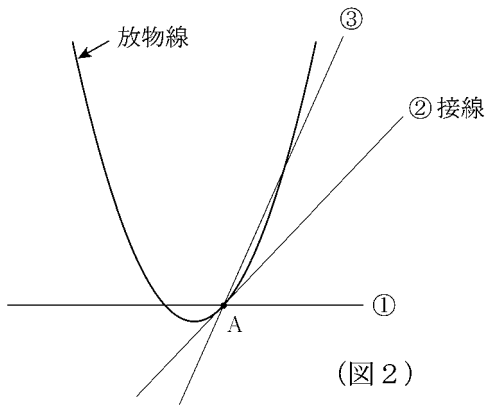
- ①: 交点なし
- ②: 交点は 1 個
- ③: 交点は 2 個

となる。直線②を接線といい、そのときの交点を接点という。

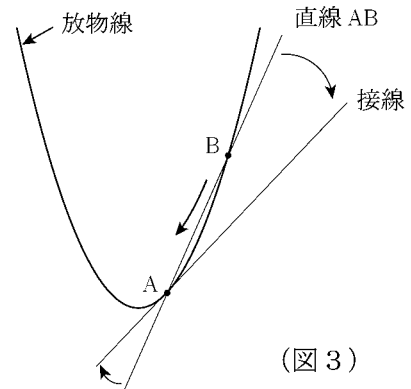
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線②が接線であり、点 A が接点である。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

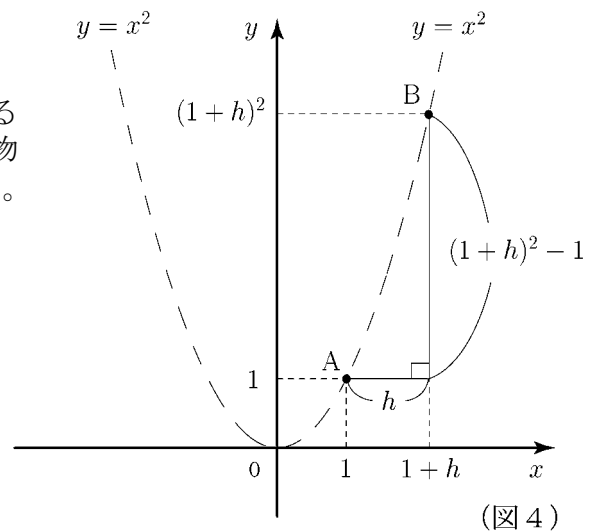
図 2 の接線②を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y = x^2$ 上の点 A (1, 1) を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(1+h, (1+h)^2)$ とする (図 4)。

(1) 直線 AB の傾きを h で表せ。

(2) $h = 0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。

(3) $h = 0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。



(図 4)

< 極限 1 >

前ページの結果より，放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(1, 1)$ と

$B(1+h, (1+h)^2)$ に対し，直線 AB の傾きは

$$\text{直線 } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

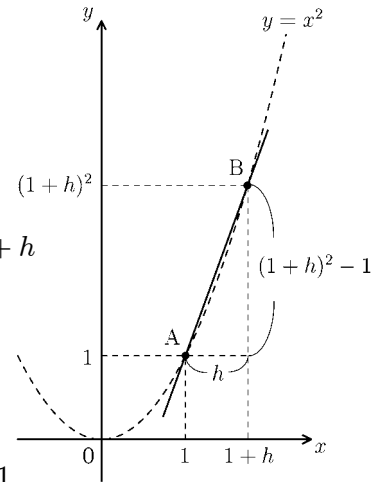
となる。ここで

$$h = 0.1 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = 0.01 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.0001$$



となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。
このことを記号 \rightarrow を使って

$$(1) \quad h \rightarrow 0 \text{ のとき } \text{直線 } AB \text{ の傾き} \rightarrow 2$$

とか

$$(2) \quad h \rightarrow 0 \text{ のとき } \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h \rightarrow 2$$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\frac{(1+h)^2 - 1}{h}$ の極限值

または単に極限 (limit) という。(2) を記号 \lim を使って次のように書く。

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

問 1 $h \rightarrow 0$ のとき直線 AB は放物線上の点 $A(1, 1)$ を接点とする接線に近づく。

(3) 式の極限值 2 は接線の何を意味するか？

$$\text{例 (1)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

問 2 次の極限值を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \frac{1}{4}}{h}$$

< 極限 2 >

例 1 (1) $h \rightarrow 0$ のとき $3h \rightarrow 0$ である。つまり $\lim_{h \rightarrow 0} 3h = 0$

(2) $h \rightarrow 0$ のとき $(2+h)(3+h) \rightarrow 6$ つまり $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)(3+h) = 6$

(注) (1) は $\lim_{h \rightarrow 0} 3h = 3 \times 0 = 0$, (2) は $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)(3+h) = (2+0) \times (3+0) = 6$

と考える。このように $h \rightarrow 0$ の極限值は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$ の式で $h = 0$ を代入

すると $\frac{0}{0}$ の形で答がわからないので, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h)$

の形になおしてから $h = 0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) = 6$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+6h+h^2) = 12$

(注) ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いた。

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 12}{h}$

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$

(4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^3 - 27}{h}$

例 3 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h) - 5a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2+2ah+h^2) - 3a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a+3h) = 6a$

問 2 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h) - 3a}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

< 接線の傾き 1 >

直線の傾きは常に一定だが、曲線の傾きは場所によって変る。

曲線の傾き = 接線の傾き

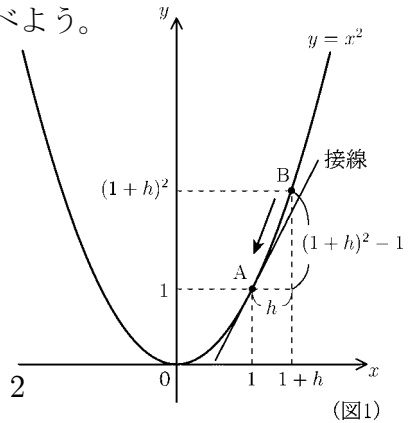
と考えて。接線の傾きを求めることによって曲線の傾きを調べよう。

例 放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(1, 1)$ における放物線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。

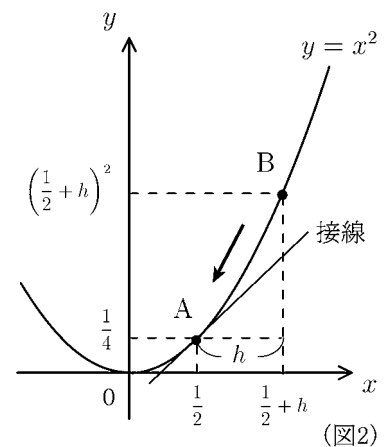
この接線の傾きは放物線上に点 B をとり、 B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{直線 } AB \text{ の傾き}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

である。つまり点 $A(1, 1)$ における放物線の傾きは 2 である。



問 1 図 2 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

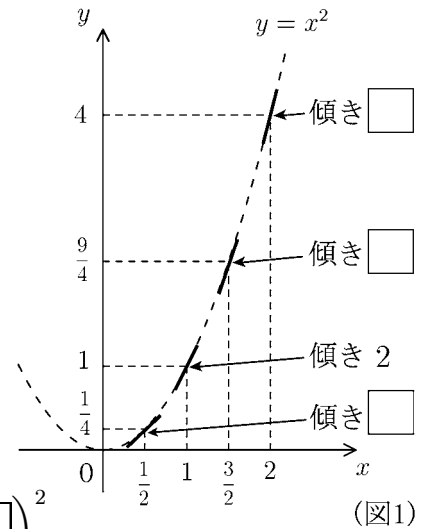


問 2 上の例と問 1 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(2, 4)$ における傾きを求めよ

問 3 上の例と問 1, 問 2 を参考にして放物線 $y = x^2$ 上の点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

< 接線の傾き 2 >

問1 (1) 前ページの例と問の結果をグラフで表すと図1のようになる。図1の□の中に傾きを表す数を入れよ。



(2) 前ページの例と問の計算をまとめると以下のようになる。□の中に適当な数を入れよ。

$$x = 2 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \square$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

$$x = 1 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

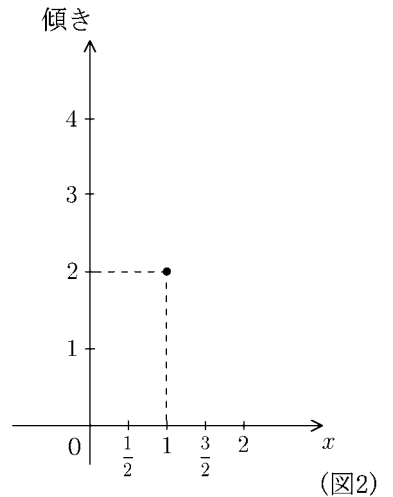
$$x = 0 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

(3) 上の結果を表にまとめたい。下の表の空欄に適当な数を入れよ。

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
傾き			2		

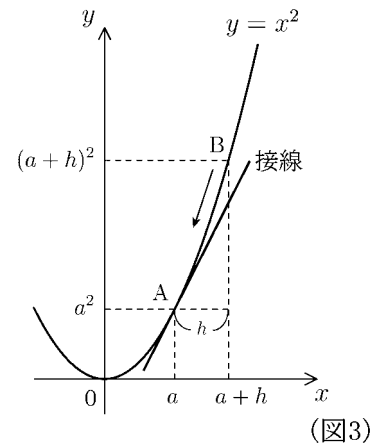
またこの表の結果を図2上に黒丸で作図せよ。さらにこの表および図2において、 x と傾きの関係を式で表せ。(傾きを x の式で表す)

傾き =



問2 放物線 $y = x^2$ 上の任意の点 $A(a, a^2)$ における傾きを求めたい。図3を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

$$x = a \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h} =$$



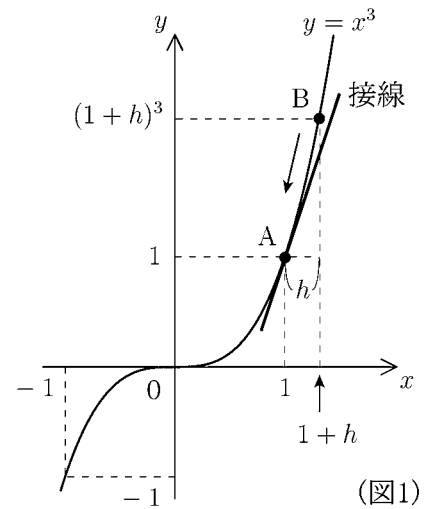
問3 問2の結果を用いて放物線 $y = x^2$ における以下の傾きを求めよ。

(1) $x = -1$ のときの傾き =

(2) $x = -2$ のときの傾き =

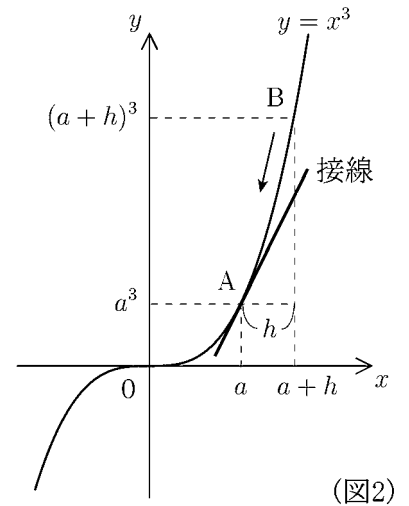
< 接線の傾き 3 >

問1 3次曲線 $y = x^3$ 上の点 $A(1, 1)$ における3次曲線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きは3次曲線上に点 B をとり、 B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。右図を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を用いて、点 A における傾きを求めよ。



(解) 接線の傾き = $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h} =$

問2 3次曲線 $y = x^3$ 上の任意の点 $A(a, a^3)$ における3次曲線の傾きを求めたい。図2を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。



接線の傾き = $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$
=

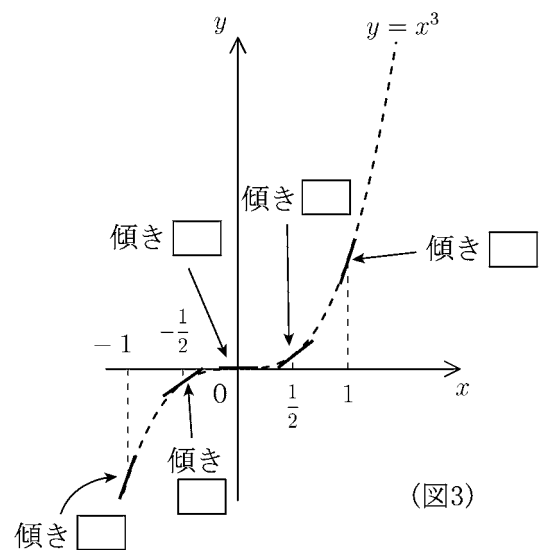
問3 問2の結果を用いて3次曲線 $y = x^3$ における以下の傾きを求め、図3の□内にその傾きを表す数を入れよ。

(1) $x = \frac{1}{2}$ のときの傾き =

(2) $x = 0$ のときの傾き =

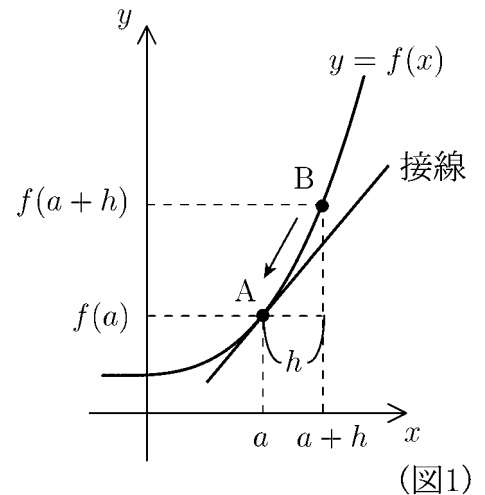
(3) $x = -\frac{1}{2}$ のときの傾き =

(4) $x = -1$ のときの傾き =



< 微分係数 1 >

問1 関数 $y = f(x)$ のグラフが図1のような曲線である場合に、点 $A(a, f(a))$ における曲線の傾きは点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きはこの曲線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。図1を参考にして接線の傾きを極限の式で表せ。



$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$$

一般の関数 $y = f(x)$ と任意の数 a に対して次の極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**といい、記号 $f'(a)$ で表す。すなわち

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (\text{微分係数})$$

問2 関数 $f(x)$ が問1のような場合、微分係数 $f'(a)$ は図1の何を意味するか答えよ。

例 (1) $f(x) = x^3$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

(2) $f(x) = 5x^2$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h)^2 - 5a^2}{h}$

(3) $f(x) = x^2 + 3x$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 3(a+h) - a^2 - 3a}{h}$

問3 関数 $f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を例のような極限の式で表せ。

(1) $f(x) = x^4$ のとき $f'(a) =$

(2) $f(x) = 4x^3$ のとき $f'(a) =$

(3) $f(x) = x^2 - 4x$ のとき $f'(a) =$

(4) $f(x) = x^3 + 3x^2$ のとき $f'(a) =$

< 微分係数 2 >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

である。 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ のときの傾きを意味する。このページでは $f'(a)$ の計算方法を示す。

例 1 $f(x) = 5x^2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h)^2 - 5a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a^2 + 2ah + h^2) - 5a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10ah + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10a + 5h) = 10a \end{aligned}$$

例 2 $f(x) = x^2 - 2x$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - 2(a+h) - (a^2 - 2a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - 2a - 2h - a^2 + 2a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 2) = 2a - 2 \end{aligned}$$

例 3 $f(x) = x^3 + x^2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 + (a+h)^2 - (a^3 + a^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) + (a^2 + 2ah + h^2) - a^3 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2 + 2a + h) = 3a^2 + 2a \end{aligned}$$

問 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ を極限の計算によって求めよ。

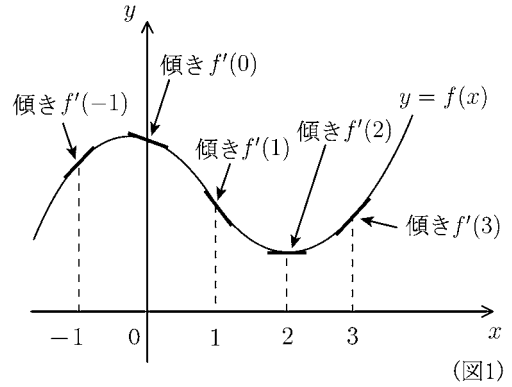
(1) $f(x) = 3x^2$, $f'(a) =$

(2) $f(x) = x^2 - 4x$, $f'(a) =$

(3) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $f'(a) =$

< 微分係数 3 >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ のときの傾きを意味する。 $f(x)$ が右図 (図1) のようなときには $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ のときの傾きは $f'(-1), f'(0), f'(1), f'(2), f'(3)$ である。



例 $y = x^2 - 2x$ のグラフは図2 のようになる。
 $f(x) = x^2 - 2x$ のとき前ページの例より

$$f'(a) = 2a - 2$$

であるから傾きは以下のように計算できる。

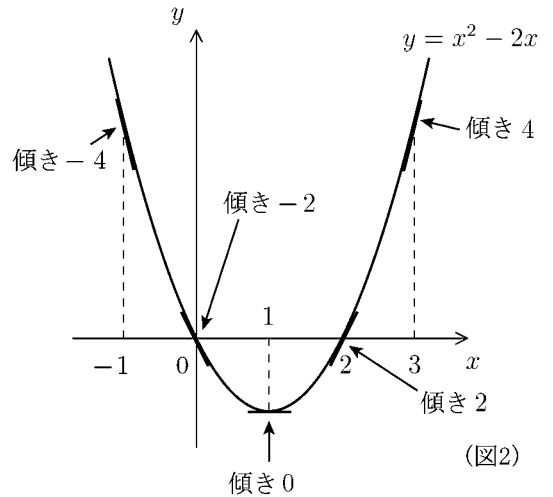
$$f'(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4 \Rightarrow x = -1 \text{ のときの傾き } -4$$

$$f'(0) = 2 \times 0 - 2 = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ のときの傾き } -2$$

$$f'(1) = 2 \times 1 - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ のときの傾きは } 0$$

$$f'(2) = 2 \times 2 - 2 = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ のときの傾きは } 2$$

$$f'(3) = 2 \times 3 - 2 = 4 \Rightarrow x = 3 \text{ のときの傾きは } 4$$



問1 $f(x) = x^2 - 4x$ に対し以下の微分係数を求め、図3の□内に傾きを記入せよ。
 (前ページ問の結果を使ってよい)

$$f'(a) =$$

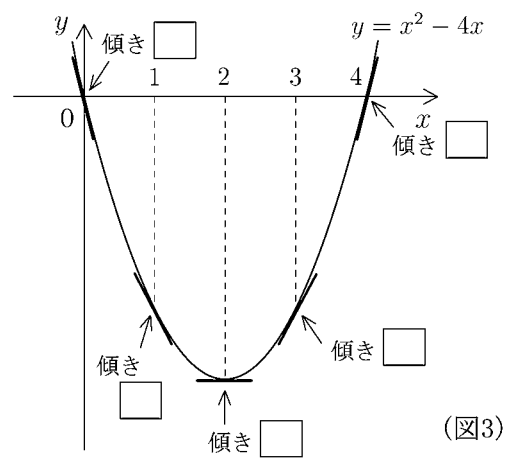
$$f'(0) =$$

$$f'(1) =$$

$$f'(2) =$$

$$f'(3) =$$

$$f'(4) =$$



問2 $f(x) = x^3 + 3x^2$ に対し以下の微分係数を求め、図4の□内に傾きを記入せよ。

$$f'(a) =$$

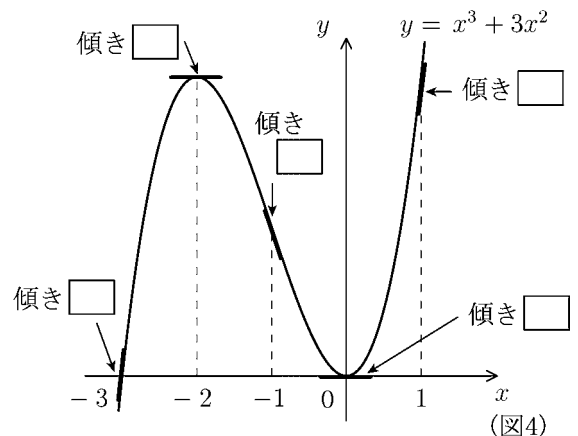
$$f'(-3) =$$

$$f'(-2) =$$

$$f'(-1) =$$

$$f'(0) =$$

$$f'(1) =$$



< 導関数 3 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y = f(x)$ を「微分する」という。**例 1** 前ページの結果より

$$(x^2)' = 2x \quad , \quad (5x^2)' = 10x = 5 \times 2x$$

であった。従って

$$(5x^2)' = 5 \times (x^2)'$$

が成り立つ。

一般に定数 k と関数 $f(x)$ に対して

$$\boxed{(kf(x))' = k \times (f(x))'} \quad (\text{定数倍の微分})$$

が成り立つ。

例 2 前ページの結果より

$$(x^3)' = 3x^2 \quad , \quad (x^2)' = 2x \quad , \quad (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$$

である。従って

$$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)'$$

が成り立つ。

一般に2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'} \quad (\text{和の微分})$$

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))'} \quad (\text{差の微分})$$

が成り立つ。

$$\text{例 3 (1)} \quad (5x^3 + 7x^2)' = (5x^3)' + (7x^2)' = 5 \times (x^3)' + 7 \times (x^2)'$$

$$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$$

$$(2) \quad (x^2 - 4x + 3)' = (x^2)' - 4 \times (x)' + (3)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。

定数関数の傾きは 0(ゼロ) だからである。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x^3 + 2)'$

(2) $(3x^2 - 2x^3)'$

(3) $(x^2 - 3x + 2)'$

(4) $(3x^3 - x^2 + 5x - 1)'$

< パスカルの三角形 >

例 $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

問1 次の展開式を求めたい。□の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$
 $= \square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4$

(2) $(a + b)^5 = (a + b) \left(\square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4 \right)$
 $= \square \times a^5 + \square \times a^4b + \square \times a^3b^2 + \square \times a^2b^3 + \square \times ab^4 + \square \times b^5$

問2 $(a + b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= 1 \dots\dots\dots 1 \\ (a + b)^1 &= 1 \times a + 1 \times b \dots\dots\dots 1 \quad 1 \\ (a + b)^2 &= 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2 \dots\dots\dots 1 \quad 2 \quad 1 \\ (a + b)^3 &= 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3 \dots\dots\dots 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ (a + b)^4 &= \square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4 \dots\dots\dots \square \square \square \square \square \\ (a + b)^5 &= \square \times a^5 + \square \times a^4b + \square \times a^3b^2 + \square \times a^2b^3 + \square \times ab^4 + \square \times b^5 \square \square \square \square \square \square \end{aligned}$$

右のようにピラミッド状に並んだ数をパスカルの三角形という。

これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。

この法則を発見し、 $(a + b)^6$ の展開式を求めよ。

$$(a + b)^6 = \square \times a^6 + \square \times a^5b + \square \times a^4b^2 + \square \times a^3b^3 + \square \times a^2b^4 + \square \times ab^5 + \square \times b^6$$

問3 次式を展開せよ。

(1) $(x + h)^4 =$

(2) $(x + h)^5 =$

(3) $(x + h)^6 =$

< 整関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、 $f(x)$ を**整関数**という。
 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であった。 $f(x)$ が整関数の場合にこの極限值を調べる。

例 1 $f(x) = 1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

例 2 $f(x) = x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

例 3 $f(x) = x^2$ のとき

$$\begin{aligned} (x^2)' = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

例 4 $f(x) = x^3$ のとき

$$\begin{aligned} (x^3)' = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

問 $f(x) = x^4$ のとき $f(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^4)' = f'(x) =$$

< 整関数の微分 2 >

問 1 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^5)' = f'(x) =$$

問 2 $f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^6)' = f'(x) =$$

問 3 下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$, $x^1 = x$ である。

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問 4 n が一般の自然数のとき, x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$$(x^n)' =$$

< 整関数の微分 3 >

導関数の定義から以下の性質がわかる。関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$$(kf(x))' = k \times f'(x) \quad (\text{定数倍の微分})$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (\text{和の微分})$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (\text{差の微分})$$

が成り立つ。

例 (1) $(x^5 + x^6)' = (x^5)' + (x^6)' = 5x^4 + 6x^5$

(2) $(7x^4)' = 7 \times (x^4)' = 7 \times 4x^3 = 28x^3$

(3) $(6x^5 + 5x^4)' = (6x^5)' + (5x^4)' = 30x^4 + 20x^3$

(4) $(x^7 - 4x^5 + 5x^2 - 8)' = (x^7)' - (4x^5)' + (5x^2)' - (8)'$
 $= 7x^6 - 20x^4 + 10x$

(5) $((x^2 + 3)(x^2 - 4))' = (x^4 - x^2 - 12)' = 4x^3 - 2x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x - x^3)'$

(2) $(7x^6)'$

(3) $(10x^4 + 8x^7)'$

(4) $(6x^5 - 2x^3 + 3)'$

(5) $(3x^5 - 6x^2 + 9)'$

(6) $(4x^7 - 4x^4 + 9x^2 - 5x)'$

(7) $((x - 1)(x + 4))'$

(8) $((x^2 - 3)(x^2 - 2))'$

< 微分の練習 >

問 1 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$$

$$(3) f(x) = x^2 + 3x \text{ のとき } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

問 2 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = 2(x+1)(x-4)$$

$$(2) y = (x-1)^3$$

問 3 次の関数のグラフ上の点 P における接線の傾きを求めよ。

$$(1) \text{ 関数 } y = x^2 - 2x - 8 \text{ のグラフ上の点 } P(-1, -5)$$

$$(2) \text{ 関数 } y = x^3 \text{ のグラフ上の点 } P(2, 8)$$

$$(3) \text{ 関数 } y = x^3 + x^2 \text{ のグラフ上の点 } P(1, 2)$$

問 4 曲線 $y = x^3 - x^2$ について次の問に答えよ。

$$(1) \text{ 曲線上の点 } (3, 18) \text{ における接線の傾きを求めよ。}$$

$$(2) \text{ 曲線上の点 } (a, b) \text{ における接線の傾きが } 1 \text{ となるように } a, b \text{ を定めよ。}$$

問 5 3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が次の 3 つの条件をすべて満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

$$f(1) = 3 \quad , \quad f'(1) = 10 \quad , \quad f'(2) = 25$$

< 関数の増減 1 >

例 2次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは図1のような放物線である。このグラフの頂点の座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y' = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6$$

を求める。次に $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

であるから $x = 3$ のとき傾き y' が 0 (ゼロ) になるのでそこが頂点である。

$$x = 3 \text{ のとき } y = -x^2 + 6x = -3^2 + 6 \times 3 = 9$$

であるから頂点の座標は (3, 9) である。

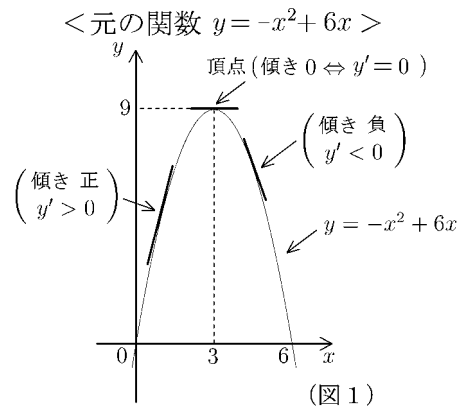
y' のグラフ (図2) より

$$x < 3 \text{ のとき } y' > 0$$

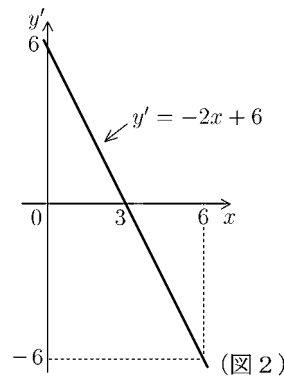
$$x = 3 \text{ のとき } y' = 0$$

$$x > 3 \text{ のとき } y' < 0$$

となる。 $y' > 0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。 $y' < 0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を **増減表** という。



<導関数 $y' = -2x + 6$ >



x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	+	0	-
y	↗	9	↘

(注) 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

(1) $y' = 0$ となる x (この場合は $x = 3$) を求める。

(2) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より小さい数 x (例えば $x = 0$) を代入してプラスであれば ($x < 3$ の列で) y' の欄に + と書き入れ, y の欄に ↗ (右上がり) の記号を入れる。

(3) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より大きい数 x (例えば $x = 4$) を代入してマイナスであれば ($x > 3$ の列で) y' の欄に - と書き入れ, y の欄に ↘ (右下がり) の記号を入れる。

問 次の関数を微分し, 増減表を作り, 頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$, 頂点 (,)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$, 頂点 (,)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

< 関数の増減 2 >

例 3次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。
導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。 $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。

導関数のグラフ (図2) より

- $x < -1$ のとき $y' > 0$
- $x = -1$ のとき $y' = 0$
- $-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
- $x = 1$ のとき $y' = 0$
- $1 < x$ のとき $y' > 0$

となる。 $x = \pm 1$ のとき y の値は

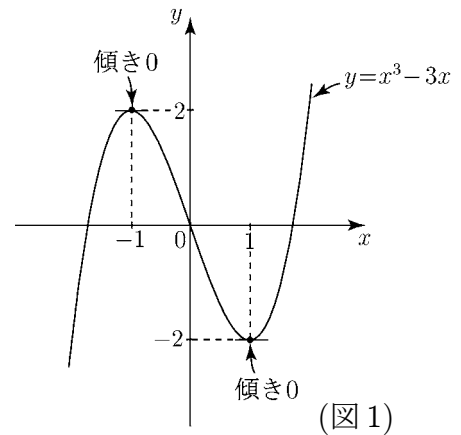
$$x = -1 \text{ のとき } y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

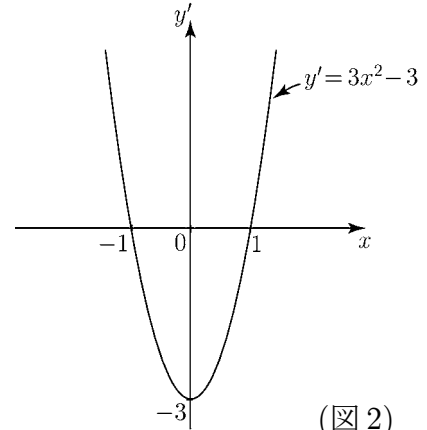
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

< 元の関数 $y = x^3 - 3x$ >



(図1)

< 導関数 $y' = 3x^2 - 3$ >

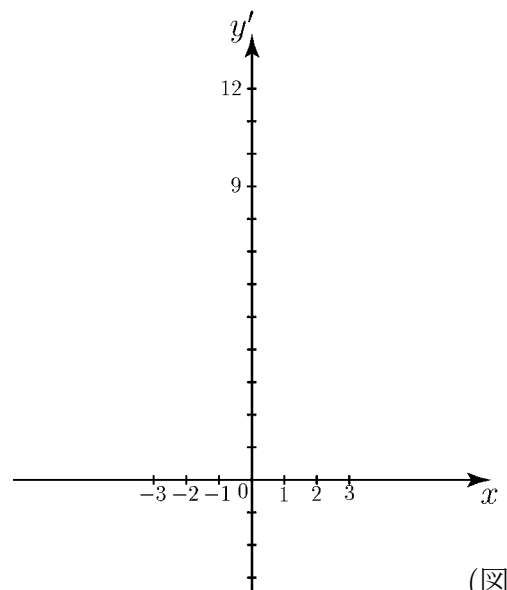


(図2)

問 関数 $y = 12x - x^3$ を微分し、導関数 y' のグラフを図3に書き、増減表を作れ。

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					

$$y' =$$



(図3)

< 関数の増減 3 >

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は (表 1)
導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。
その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合、たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$x = -2$ のとき

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に + 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し、 $y' < 0$ となれば、 y' の欄に - 記号を書き入れる。

(表 2)

(6) y' が + であれば傾き正であるから y は右上がり ↗ となる。

y' が - であれば傾き負であるから y は右下がり ↘ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

↓

(表 2)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y					

↓

(表 3)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗

↓

(表 4)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

問 次の関数を微分し、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$, $y' =$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y' =$

x					
y'					
y					

< 極大・極小 1 >

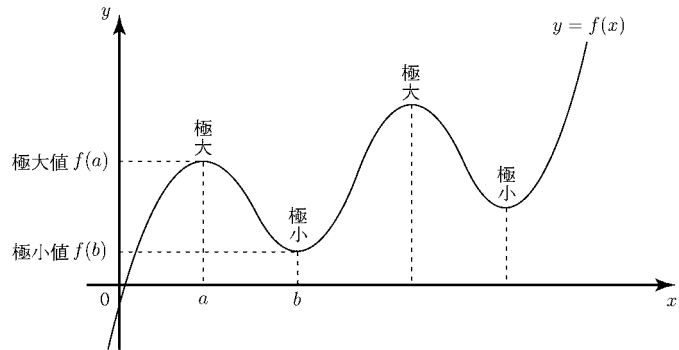
関数 $f(x)$ について, a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい, $f(a)$ を**極大値**という。

また, b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



が成り立つとき, $f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい, $f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例 3次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには, 増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	3	↘	2	↗

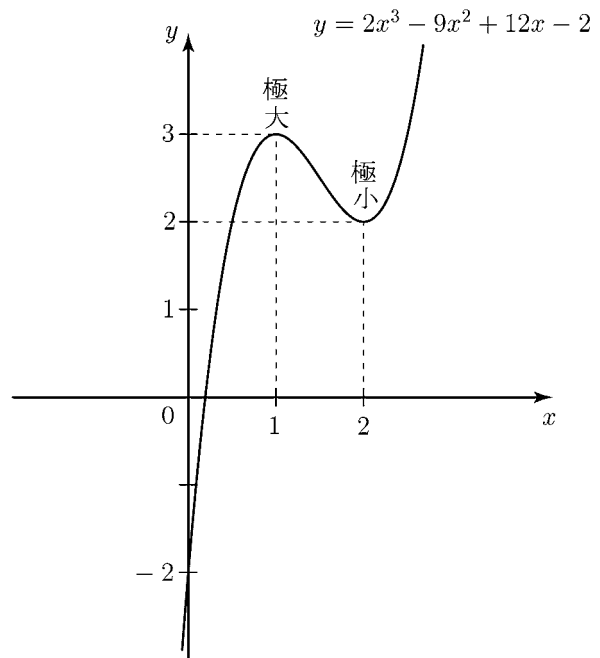
極大 極小

増減表より

$$\underline{x = 1 \text{ のとき 極大値 } y = 3}$$

$$\underline{x = 2 \text{ のとき 極小値 } y = 2}$$

であることがわかる。



(注) 上の増減表の x の欄の ... は以下の意味である。

x	...	1	...	2	...	⇔	x	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$
-----	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---------	---	-------------	---	---------

今後はこのように x の範囲を省略してよい。

問 3次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り, 極値を調べよ。

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ のとき極大値 } y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ のとき極小値 } y = \underline{\hspace{2cm}}$$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

例 4次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ の極値を調べるには、3次関数と同様に増減表を作ればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

x	...	0	...	1	...	3	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	

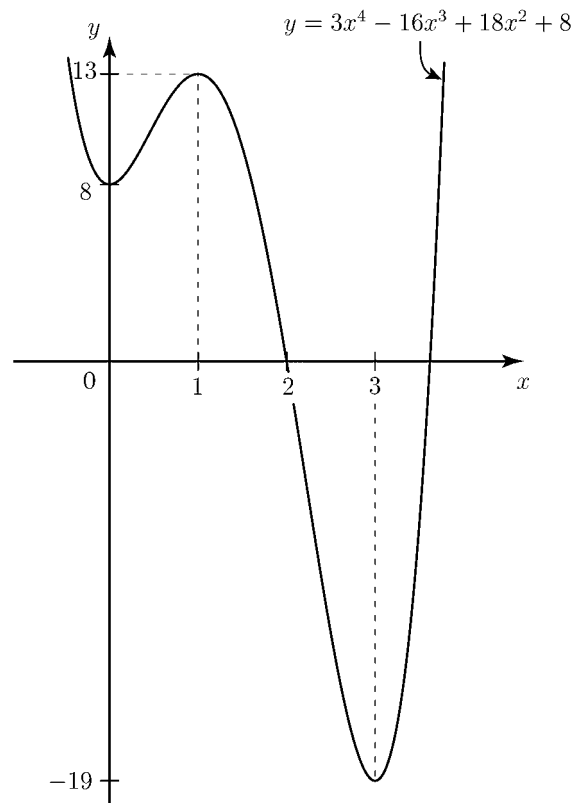
増減表より

$$x = 1 \text{ のとき極大値 } y = 13$$

$$x = 0 \text{ のとき極小値 } y = 8$$

$$x = 3 \text{ のとき極小値 } y = -19$$

であることがわかる。



問 以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = -x^4 + 2x^2 + 5$

x	
y'	
y	

(2) $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

x	
y'	
y	

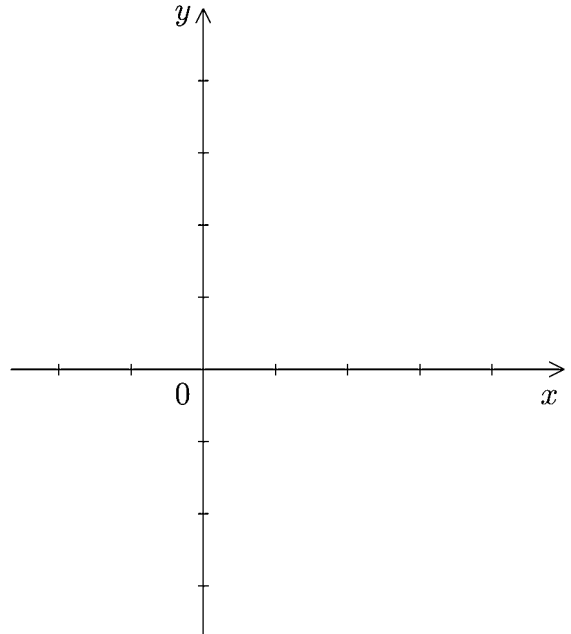
< 関数のグラフ >

問 次の関数を微分し，増減表を作り，極値を調べよ。また右図の上にその関数のグラフを書け。(グラフは極値の座標が分かるように目盛りを書く)

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$$y' =$$

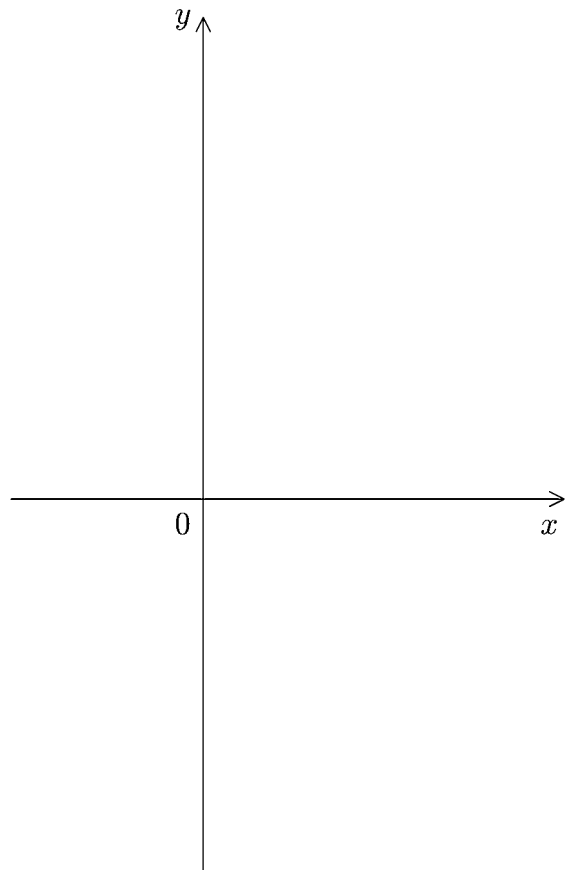
x	
y'	
y	



(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

$$y' =$$

x	
y'	
y	



< 最大・最小 1 >

例題 次の関数の最大値と最小値を，指定された定義域

(x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 5)$$

(解) 導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

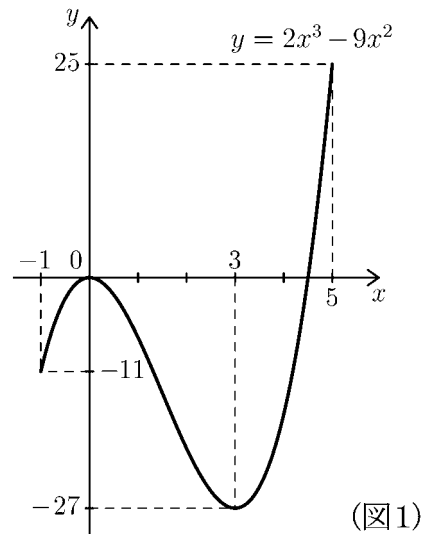
を求め， $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leq x \leq 5$ の範囲で増減表

は次のようになる。

x	-1	...	0	...	3	...	5
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-11	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	25



この表よりグラフは図1のようになるから

(答) $x = 5$ のとき最大値 $y = 25$ をとり， $x = 3$ のとき最小値 $y = -27$ をとる。

(注) 最大や最小は定義域によって違

ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leq x \leq 4)$$

x	-2	...	0	...	3	...	4
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-52	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	-16

のとき 増減表は右表のようになり，

この場合の答えは $x = 0$ のとき最大値 $y = 0$ ， $x = -2$ のとき最小値 $y = -52$ である。

問 次の関数に対し，指定された定義域内で増減表を書き，最大値と最小値

を求めよ。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 3)$$

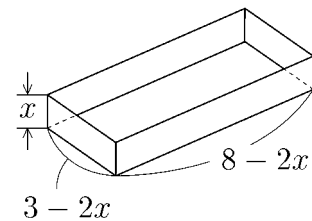
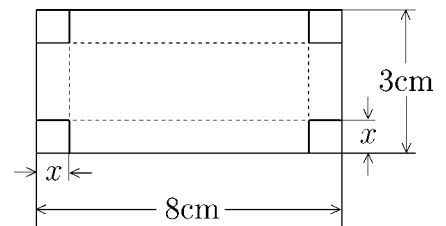
x	-1			3
y'	\times			\times
y				

(答) $x =$ _____ のとき最大値 $y =$ _____

$x =$ _____ のとき最小値 $y =$ _____

< 最大・最小 2 >

例題 たて 3cm, よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から, 一辺 x cm の正方形を切り取り, 右上図の点線のところを折り曲げて, 右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 y cm³ を最大にするには, 切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか?



(解) 容器のたては $3 - 2x$ (cm), よこは $8 - 2x$ (cm), 高さは x (cm) だから, 容積 y (cm³) は

$$y = (3 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

である。題意より $x > 0$ でしかも $2x < 3$ で

あるから, x の範囲は $0 < x < \frac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り, y の最大値を求める。 y を微分すれば

$$y' = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x - 2)(x - 3)$$

でかつ,

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{27}$$

より, 増減表は右のようになる。よって

(答) $x = \frac{2}{3}$ (cm) のとき, 最大容積 $y = \frac{200}{27}$ (cm³) をとる。

x	0	...	$\frac{2}{3}$...	$\frac{3}{2}$
y'	×	+	0	-	×
y	0	↗	$\frac{200}{27}$	↘	0

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から, 例題と同様にして, ふたのない容器を作るとき, 容器の容積 y (cm³) を最大にするには, 切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか?

x の範囲を求め, その範囲内で増減表を作り, y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	
y'	×		0		×
y					

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す(全て同じ意味である)。 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ 等の記号は, 変数が x である関数の導関数(x についての微分)であることを明記するためである。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$$y = t^3 - 2t^2 \text{ のとき } \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$$

$$S = r^3 - 2r^2 \text{ のとき } \frac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は, 変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\frac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\frac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\frac{dS}{dr} =$

(5) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dr} =$

< 時間の関数 >

時間 (*time*) を表す文字として t がよく使われるので、時間の関数を表すのに t を変数として使う。例えば $f(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $v(t)$ などである。

例 1 球を静かに手離すとき、落ち始めてから t 秒間に落下した距離を $f(t)$ m とすると

$$f(t) = 4.9t^2$$

の関係がある。従って 3 秒後に落下した距離は

$$f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1 \quad (\text{m})$$

である。

問 1 例 1 の $f(t)$ に対して次の値を求めよ。(単位不要)

$$(1) f(2) = \quad (2) f(4) = \quad (3) f(3.5) =$$

問 2 $x(t) = 19.6t$, $y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ のとき次の値を求めよ。

$$x(0) = \quad y(0) =$$

$$x(1) = \quad y(1) =$$

$$x(2) = \quad y(2) =$$

例 2 x を変数とする関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (x についての導関数) である。同様にして変数 t についての導関数 $f'(t)$ は

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} \quad (\text{変数 } t \text{ についての導関数})$$

で定義される。同様に t の関数 $y(t)$ の導関数は

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

で定められる。

問 3 変数 t の関数 $x(t)$, $v(t)$ の導関数の定義を例 2 のような極限の式で表せ。

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad}, \quad v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad}$$

例 3 $f(t) = 4.9t^2$ のとき、 $t = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次の極限式になる。

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (2+h)^2 - 4.9 \times 2^2}{h}$$

問 4 $f(t) = 4.9t^2$ に対し次の微分係数を例 3 の右辺のような極限の式で表せ。

$$(1) f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad} \quad (2) f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$$

例 4 $f(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ の導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = (-4.9t^2 + 19.6t)' = -4.9 \times 2t + 19.6 \times 1 = -9.8t + 19.6$$

問 5 $x(t) = 29.4t$, $y(t) = -4.9t^2 + 29.4t$, $v(t) = 29.4$ の導関数を求めよ。

$$x'(t) = \quad y'(t) = \quad v'(t) =$$

< 平均速度 >

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{\text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}}$$

例 1 車が 144 km を 2 時間で走ったときの平均速度は

$$\text{平均速度} = \frac{144 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 72 \text{ (km/h)} \quad (= \text{時速 } 72 \text{ km})$$

問 1 72 (km/h) を分速 (km/min) および秒速 (m/s) になおせ。

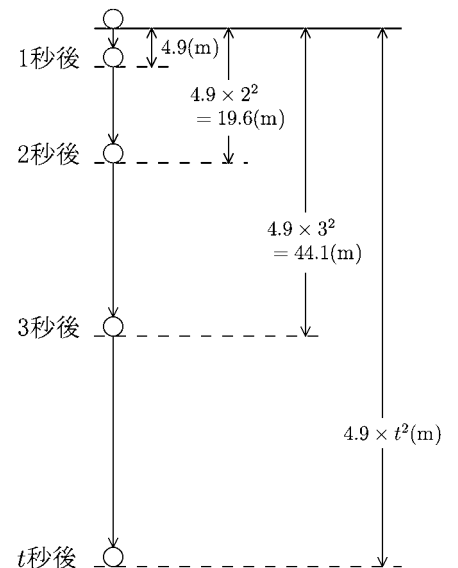
$$72 \text{ (km/h)} = \frac{72 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \boxed{} \text{ (km/min)} = \boxed{} \text{ (m/s)}$$

例 2 (自由落下) 球を静かに手離すとき落ち始めてから t 秒間の落下距離は

$$t \text{ 秒後の落下距離} = 4.9 \times t^2 \text{ (m)}$$

となる。2 秒後から 4 秒後の 2 秒間の平均速度は

$$\begin{aligned} \text{2 秒後から 4 秒後の平均速度} &= \frac{\text{落下距離}}{\text{時間}} \\ &= \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{4 - 2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$



問 2 例 2 の場合に以下の平均速度を求めよ。

- (1) 1 秒後から 3 秒後までの平均速度
- (2) 3 秒後から 4 秒後までの平均速度
- (3) 3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度
- (4) 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度

< 瞬間の速度 1 >

車が 144 (km) を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 (km/h) であるが、常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし、72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると、スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。

このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「瞬間の速度」といい、「平均速度」と区別する。

このページでは「瞬間の速度」を求めることを目標にする。

問 1 前ページの例 2(自由落下) の場合に 3 秒後の瞬間の速度を求めたい。前ページ問 2(4) より 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は

$$\frac{4.9 \times 3.1^2 - 4.9 \times 3^2}{3.1 - 3} = \frac{2.989}{0.1} = 29.89 \text{ (m/s)}$$

である。

(1) 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度を求めよ。

(2) 3 秒後から 3+h 秒後までの平均速度を求めよ。

(3) 以下の極限值を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(3 \text{ 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度} \right) =$$

(4) 以下の場合の極限值を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(t \text{ 秒後から } (t+h) \text{ 秒後までの平均速度} \right) =$$

問 2 $f(t) = 4.9 \times t^2$ とおく。問 1 の (3) および (4) で計算した極限の式を f と (または t) と h を用いた極限の式にしたい。以下の () の中に適当な数、文字または式を入れよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3 \text{ 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

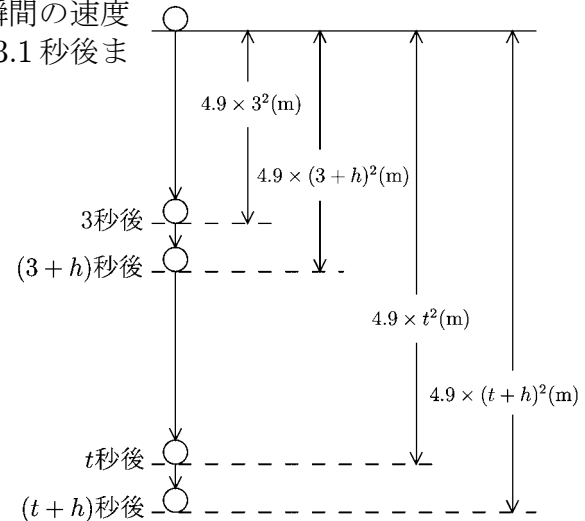
$$\lim_{h \rightarrow 0} (t \text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

問 3 問 1(3), (4) の結果から以下の瞬間の速度を求めよ。

(1) 3 秒後の瞬間の速度 = () (m/s) , (2) t 秒後の瞬間の速度 = () (m/s)

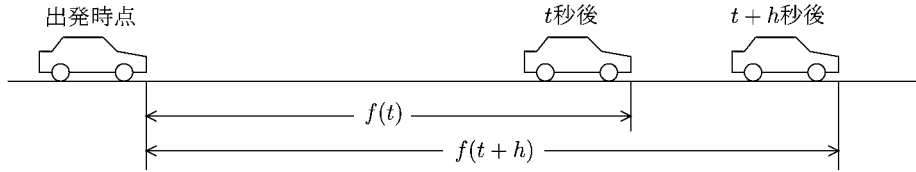
問 4 問 2 の結果から以下の瞬間の速度を関数 $f(t) = 4.9t^2$ の微分係数として $f'(\square)$ の形で表せ。

(1) 3 秒後の瞬間の速度 = () , (2) t 秒後の瞬間の速度 = ()



< 瞬間の速度 2 >

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
 出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。 $t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ である。

「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから、時間間隔 h を 0 (ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

$$t \text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h \rightarrow 0} (t \text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

となる。この「瞬間の」というのを略して、単に「 t 秒後の速度」という。

例 1 前ページの間では $f(t) = 4.9t^2$ だから

$$t \text{ 秒後の速度} = f'(t) = 4.9 \times 2t = 9.8t \text{ (m/s)}$$

$$\text{であり} \quad 3 \text{ 秒後の速度} = f'(3) = 4.9 \times 2 \times 3 = 29.4 \text{ (m/s)}$$

となる。

問 1 例 1 の場合に以下の速度を求めよ。

(1) 2 秒後の速度

(2) 4 秒後の速度

例 2 地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。

t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えると)

$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad (\text{m})$$

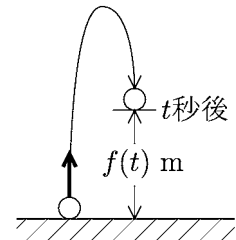
となる。 t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad (\text{m/s})$$

となる。ボールが最高点に達するとき速度は 0 (ゼロ) になるから

$$v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \quad \iff \quad t = 2$$

より 2 秒後に最高点に達する。このときの高さは $f(2) = -4.9 \times 2^2 + 19.6 \times 2 = 19.6$ (m) である。



問 2 地上 39.2 (m) の高さから真上にボールを投げ上げたとき t 秒後の高さ $f(t)$ は

$$f(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 39.2 \text{ (m)}$$

となった。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。

(2) 初速 ($t = 0$ のときの速度) を求めよ。

(4) 最高点の高さを求めよ。

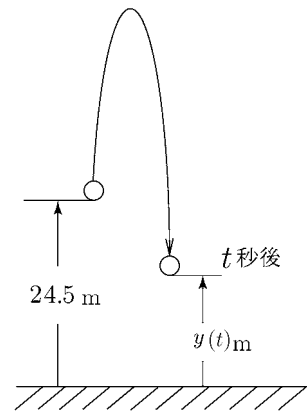
< 速度の応用 1 >

問 地上 24.5m から物体を真上に
投げ上げた。 t 秒後の高さ

$y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 \text{ (m)}$$

となったとせよ。



(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$$v(t) = y'(t) =$$

(2) 初速度 何 m/s で物体を投げ上げたか? $t = 0$ のときの v の値で答えよ。

$$v(0) =$$

(3) 何秒後に最も高くなるか? 速度が 0 ($v = 0$) のときの t の値で答えよ。

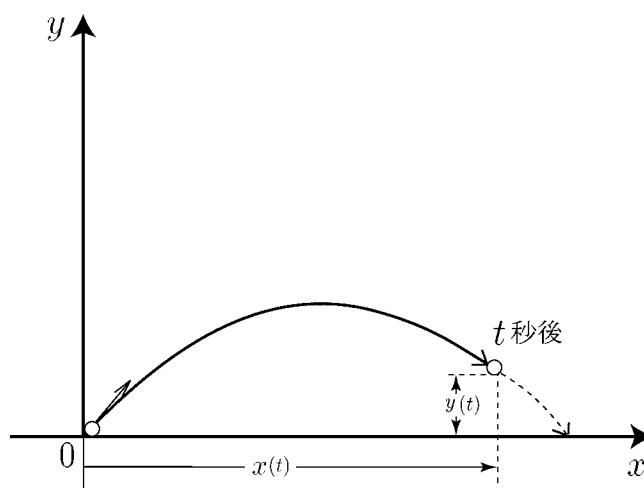
(4) 最高点は地上 何 m か?

(5) 何秒後に地上に落下するか?

< 速度の応用 2 >

問 ボールを投げたとき t 秒後のボールの位置を座標平面の点として表すことにする。
 t 秒後の水平距離を $x(t)$
 t 秒後の垂直距離を $y(t)$
とする。今

$$\begin{cases} x(t) = 14.7t \\ y(t) = -4.9t^2 + 19.6t \end{cases}$$



の場合に次の問に答えよ。

(1) t 秒後の水平方向の速度 $v_x(t)$ を $x(t)$ を微分することにより求めよ。

$$v_x(t) = x'(t) =$$

(2) t 秒後の垂直方向の速度 $v_y(t)$ を $y(t)$ を微分することにより求めよ。

$$v_y(t) = y'(t) =$$

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か？

(4) 最高点の高さを求めよ。

(5) 地上に落下するのは何秒後か？

(6) 落下したとき、投げた地点からの水平距離を求めよ。

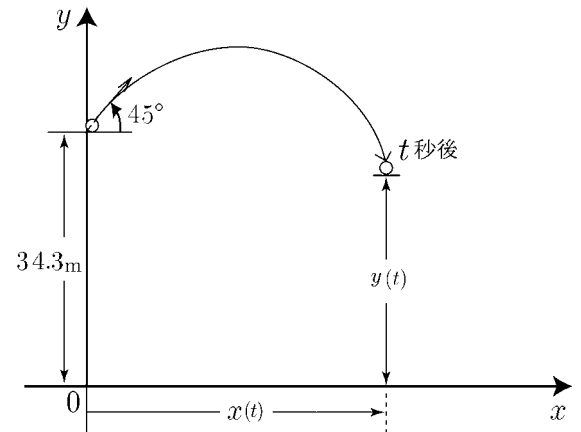
< 速度の応用 3 >

問 地上 34.3m の高さから物体を
45° の角度で投げ上げた。

t 秒後の位置 $(x(t), y(t))$ は

$$\begin{cases} x(t) = 29.4t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 & (\text{垂直距離}) \end{cases}$$

であるとする。



(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$, 垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$$v_x(t) = x'(t) = \quad , \quad v_y(t) = y'(t) =$$

(2) 最高点に達するのは何秒後か？

(3) 最高点の高さとそのときの水平距離を求めよ。

高さ =

水平距離 =

(4) 地上に落下するのは何秒後か？

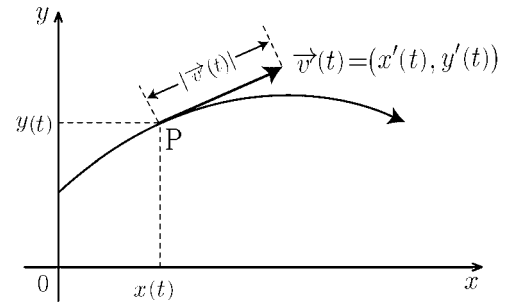
(5) 落下したときの水平距離を求めよ。

< 速度と速さ >

33 ページや 34 ページの問題の場合、水平方向と垂直方向をそれぞれ考えていた。このような場合は水平方向を x 軸、垂直方向を y 軸として xy 平面上の運動と考えるとわかりやすい。

一般に xy 平面上の点 P の運動で、 t 秒後の位置が $P(x(t), y(t))$ であるとき、 x 軸方向の速度 $x'(t)$ と y 軸方向の速度 $y'(t)$ を成分にもつベクトル

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) \quad (\text{速度})$$

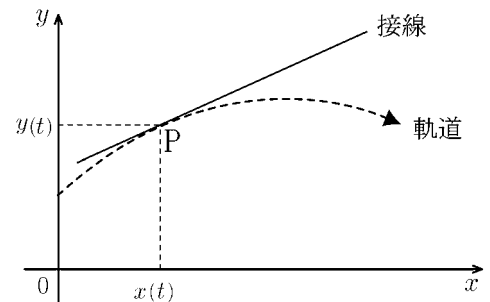


を t 秒後の「速度ベクトル」または単に「速度」という。物理学では「速度」は「方向をもったベクトル」と考える。これに対し、速度の大きさ

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \quad (\text{速さ} = \text{速度の大きさ})$$

を単に「速さ」といい、「速度」と区別する。

(注) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の方向は軌道(右図点線)上の点 P における接線と同じ方向である。ただし、このことを証明するためには後で習う「合成関数の微分法」の知識が必要である。



例 t 秒後の位置が $(x(t), y(t)) = (2t, -4t^2 + 8t)$ であるとき

$$x(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad x'(t) = 2$$

$$y(t) = -4t^2 + 8t \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -8t + 8$$

より t 秒後の速度は $\vec{v}(t) = (2, -8t + 8)$ である。0.5 秒後の速度と速さは

$$\text{速度 } \vec{v}(0.5) = (2, 4) \quad , \quad \text{速さ } |\vec{v}(0.5)| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

である。

問 1 例の場合に 1.5 秒後の速度と速さを求めよ。

問 2 t 秒後の位置が $(x(t), y(t)) = (4t, -3t^2 + 9t)$ であるとき、

1 秒後の速度と速さを求めよ。

< 微分の応用 >

問 1 次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$

(2) $y = x^2(2x - 3)$

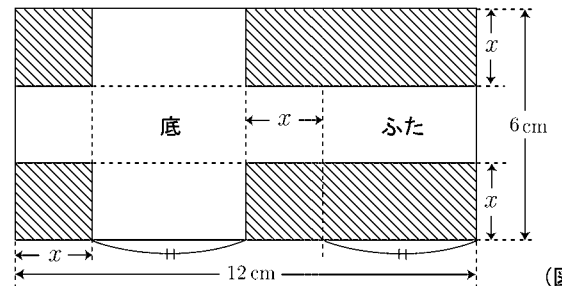
(3) $y = x^2(x - 3)^2$

問 2 次の関数の () 内に示した範囲における最大値および最小値を求めよ。

(1) $y = -x^2 - 4x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$)

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ ($-2 \leq x \leq 5$)

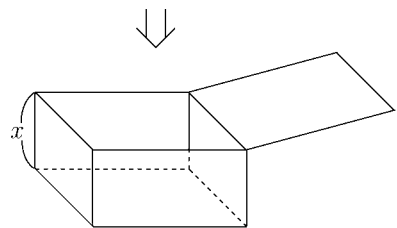
問 3 縦 6 cm，横 12 cm の長方形のブリキの板から図 1 の斜線部分を切り取り，点線のところを折り曲げて，図 2 のような高さ x cm のふた付き容器を作る。



(図 1)

(1) 容器の容積を $y \text{ cm}^3$ とする。 y を x で表せ。

(2) x が何 cm のとき y が最大になるか。



(図 2)

問 4 地上 78.4 m の高さから物体を真上に投げ上げた。 t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 78.4 \quad (\text{m})$$

となった。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) 何秒後に最も高くなるか。またそのときの高さを求めよ。

(3) 何秒後に地上に落下するか。

< 原始関数 >

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1
$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は1つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2
$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、 x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \text{ は定数})$$

である。

問 次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 =

(2) x^5 の原始関数の一般形 =

(3) x^6 の原始関数の一般形 =

< 不定積分 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり, その一般形は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の不定積分といい,

$$\int f(x) dx$$

と書く。すなわち,

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x) dx = F(x) + C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 \int はインテグラル (*integral*) と読む。

例 (1) $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注) 記号 $\int \square dx$ は「微分すると \square になる関数」という意味である。

問 1 前ページの間を参考にして, 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^4 dx =$

(2) $\int x^5 dx =$

(3) $\int x^6 dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

< 不定積分 2 >

前ページより n が正の整数のとき

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

が成り立つ。

また微分の性質より次の不定積分の性質がわかる。

$F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ のとき

$$1. \int kf(x)dx = kF(x) + C \quad (k \text{ は定数})$$

$$2. \int \{f(x) + g(x)\}dx = F(x) + G(x) + C$$

$$3. \int \{f(x) - g(x)\}dx = F(x) - G(x) + C$$

(不定積分の性質)

< 1 の証明 > 1式右辺の関数を微分すると

$$(kF(x))' = k \times F'(x) = kf(x)$$

より $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数である。 (証明終)

問 1 上の不定積分の性質 2 を証明せよ。

例 (1) $\int 4x^2 dx = 4 \times \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{4}{3} x^3 + C$

(2) $\int (3x^2 - 5x) dx = 3 \times \frac{1}{3} x^3 - 5 \times \frac{1}{2} x^2 + C = x^3 - \frac{5}{2} x^2 + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 6x^2 dx$

(2) $\int (x^2 + x + 1) dx$

(3) $\int (x^2 + 4x + 3) dx$

(4) $\int (2x^2 - x - 1) dx$

< 不定積分 3 >

例 $\int (x-3)(x+2)dx = \int (x^2 - x - 6)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし α, β は定数)

(1) $\int (x-2)^2 dx$ (2) $\int (3x+1)^2 dx$

(3) $\int (x-1)(x-2)dx$ (4) $\int (x+1)(x-3)dx$

(5) $\int (2-x)(x-3)dx$ (6) $\int (x-\alpha)(x-\beta)dx$

例題 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x) = x^2 + 2x, \quad F(2) = 5$$

(解) $F(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$

$$F(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + C = 5$$

より $C = -\frac{5}{3}$ よって (答) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{3}$

問 2 次式を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x) = 3$, $F(1) = 2$

(2) $F'(x) = 5x + 4$, $F(2) = 6$

(3) $F'(x) = 2x^2 - 7x$, $F(4) = -5$

(4) $F'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 5$, $F(0) = 0$

< 不定積分 4 >

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \square dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t) \text{ のとき } \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

$$\text{例 1 } \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \text{ より } \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \text{ より } \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \text{ より } \int 3u^2 du = u^3 + C$$

$$\text{例 2 (1) } \int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$$

$$(2) \int (4u^3 - 6u^2 + 5u) du = u^4 - 2u^3 + \frac{5}{2}u^2 + C$$

$$(3) \int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$$

$$\text{問 (1) } \int (10 - 9.8t) dt =$$

$$(2) \int 4\pi r^2 dr =$$

$$(3) \int (6t^2 - 4t + 5) dt =$$

$$(4) \int (u - 1)(u - 2) du =$$

$$(5) \int (t + 3)^2 dt =$$

< 不定積分の応用 1 >

例題 次の2条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

$$\textcircled{1} F'(t) = 3(t-1)^2 \quad \textcircled{2} F(1) = 0$$

解 ①より $F(t) = \int 3(t-1)^2 dt = \int (3t^2 - 6t + 3) dt = t^3 - 3t^2 + 3t + C$

よって $F(1) = 1 - 3 + 3 + C = C + 1$

②より $F(1) = C + 1 = 0$ となり $C = -1$

従って (答) $F(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$

問1 次の2条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

(1) ① $F'(t) = 5$ ② $F(0) = 8$

(2) ① $F'(t) = -4t + 6$ ② $F(1) = 7$

問2 次の2条件をともに満たす関数 $v(t)$ を求めよ。

$$\textcircled{1} v'(t) = -10 \quad \textcircled{2} v(0) = 20$$

問3 問2で求めた $v(t)$ に対し、次の2条件をともに満たす関数 $y(t)$ を求めよ。

$$\textcircled{1} y'(t) = v(t) \quad \textcircled{2} y(0) = 25$$

問4 問3で求めた $y(t)$ に対し、増減表を作り、
最大値を求めよ。

$t =$ のとき最大値 $y(t) =$

t			
y'			
y			

< 不定積分の応用 2 >

問 1 地上 58.8m の高さからボールを初速 19.6 m/s で真上に投げ上げた。 t 秒後の高さを $y(t)$ m, t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると, 物理的考察より

$$[1] \ y'(t) = v(t) \quad , \quad [2] \ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

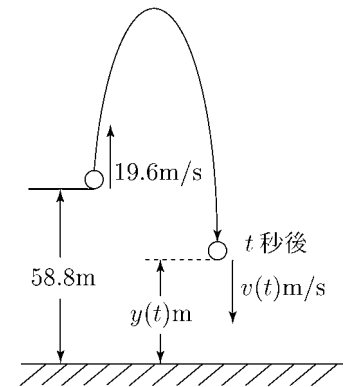
(1) [2] 式と $v(0) = 19.6$ より t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) [1] 式と $y(0) = 58.8$ より t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) 関数 $y(t)$ の増減表を作れ。

(4) ボールが最高点に達するのは何秒後か。

またそのときの高さ $y(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ。



t			
y'			
y			

(5) 2次方程式 $y(t) = 0$ の解を求めよ。 $t =$

(6) 地面に落下するのは何秒後か。

問 2 地上 44.1m の高さからボールを初速 39.2 m/s で真上に投げ上げた。

t 秒後の高さを $y(t)$ m, t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると, 物理的考察より

$$[1] \ y'(t) = v(t) \quad , \quad [2] \ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さを求めよ。

(4) 地面に落下するのは何秒後か。

< 定積分 1 >

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき

$$F'(x) = f(x) \quad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

となる。今、与えられた定数 a, b に対し $F(b) - F(a)$ の値は原始関数 $F(x)$ の選び方によらない。

例 $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$F(b) - F(a) = b^3 - a^3 \quad \dots\dots (1)$$

となる。

$G(x) = x^3 + C$ (C は定数) も $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$G(b) - G(a) = (b^3 + C) - (a^3 + C) = b^3 - a^3 \quad \dots\dots (2)$$

となる。(1) と (2) の値は一致する。

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき、与えられた定数 a, b に対し、 $F(b) - F(a)$ の値を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい、記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。すなわち

$\int f(x)dx = F(x) + C$	のとき	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
(不定積分)		(定積分)

である。なお $F(b) - F(a)$ のことを $\left[F(x) \right]_a^b$ と書くことがある。すなわち

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

と表す。

例 2 $\int_a^b 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_a^b = b^3 - a^3$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_a^b 2x dx$

(2) $\int_a^b 4x^3 dx$

< 定積分 2 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{のとき} \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

(不定積分) (定積分)

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ において, a を下端, b を上端 とよぶ。また, この定積分を求めることを $f(x)$ を a から b まで積分する という。

例 (1) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\int (x^3 - 6x + 5)dx = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x + C$ より

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^3 - 6x + 5)dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x \right]_1^2 \\ &= \frac{16}{4} - 12 + 10 - \left(\frac{1}{4} - 3 + 5 \right) = 2 - \left(2 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_4^9 1dx$

(2) $\int_{-1}^2 xdx$

(3) $\int_{-2}^1 x^2 dx$

(4) $\int_{-2}^2 x^3 dx$

(5) $\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x)dx$

(6) $\int_0^4 (x^3 + 3x^2 - 5x)dx$

(7) $\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx$

(8) $\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

< 定積分 3 >

定積分の定義より次の性質が導かれる。

$$[1] \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$[2] \int_a^b \{ f(x) + g(x) \} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$[3] \int_a^b \{ f(x) - g(x) \} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$[4] \int_a^a f(x) dx = 0 \quad , \quad [5] \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$[6] \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

(定積分の性質)

< [1] の証明 > $\int f(x) dx = F(x) + C$ とすれば $\int k f(x) dx = k F(x) + C$ より

$$\int_a^b k f(x) dx = [k F(x)]_a^b = k F(b) - k F(a) = k \{ F(b) - F(a) \} = k \times \int_a^b f(x) dx$$

< [6] の証明 > $\int f(x) dx = F(x) + C$ とすれば

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = \{ F(b) - F(a) \} + \{ F(c) - F(b) \} \\ &= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

問 1 $\int f(x) dx = F(x) + C$, $\int g(x) dx = G(x) + C$ とおいて上の性質 [2] を証明せよ。

問 2 $\int f(x) dx = F(x) + C$ とおいて上の性質 [5] を証明せよ。

問 3 次の定積分を求めよ。ただし k は定数とする。

$$(1) \int_1^3 k x^2 dx$$

$$(2) \int_0^1 (x^2 + 3x) dx + \int_0^1 (x^2 - 3x) dx$$

$$(3) \int_{-1}^{-1} (x^2 + x + 4) dx$$

$$(4) \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (x^2 + 2x) dx + \int_1^3 (x^2 + 2x) dx$$

$$(5) \int_1^3 (x^2 - x) dx + \int_3^1 (x^2 - x) dx$$

< 定積分 4 >

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$F'(t) = f(t) \text{ より } \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

のように積分の値は変わらない。従って次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \quad \boxed{\int_a^b f(\square)d\square = \int_a^b f(\circ)d\circ}$$

$$\text{例 (1) } \int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$$

$$(2) \int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5 \right]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$$

$$(3) \int_0^R 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4\pi}{3}r^3 \right]_0^R = \frac{4\pi}{3} \times R^3 - \frac{4\pi}{3} \times 0^3 = \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$(4) \int_a^x (t^2 + t)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_a^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

問 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 (4 - 9.8t)dt$$

$$(2) \int_0^R 2\pi r dr$$

$$(3) \int_0^2 t(t-2)dt$$

$$(4) \int_1^4 (t-1)(4-t)dt$$

$$(5) \int_1^x (t^2 + t)dt$$

$$(6) \int_a^x (6t^2 - 4t)dt$$

< 定積分 5 >

関数 $f(t)$ と定数 a に対して, $\int_a^x f(t)dt$ は x の値を決めると, その値が定まるから, x の関数である。 $F'(t) = f(t)$ とすると,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

両辺の関数を x について微分すれば次の等式が得られる。

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)} \quad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

例 1 定数 a に対し

$$\int_a^x (t^2 + t)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は x の関数である。両辺を x で微分すると, a は定数だから

$$\frac{d}{dx} \int_a^x (t^2 + t)dt = x^2 + x$$

となる。

問 1 次式を計算せよ。ただし a は定数とする。

$$(1) \int_1^x (2t + 3)dt = \quad , \quad \frac{d}{dx} \int_1^x (2t + 3)dt =$$

$$(2) \int_0^x (6t^2 + 4t + 5)dt = \quad , \quad \frac{d}{dx} \int_0^x (6t^2 + 4t + 5)dt =$$

$$(3) \int_a^x (5t^2 - 6t)dt = \quad , \quad \frac{d}{dx} \int_a^x (5t^2 - 6t)dt =$$

上の $(*)$ 式で変数 x と t を入れ変えても同様な式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx = f(t)} \quad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

例 2 定数 a に対し

$$\int_a^t (x^2 + x)dx = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は t の関数である。両辺を t で微分すると, a は定数だから

$$\frac{d}{dt} \int_a^t (x^2 + x)dx = t^2 + t$$

となる。

問 2 定数 a に対し, 次式を計算せよ。

$$\int_a^t (6x^2 + 8x)dx = \quad \frac{d}{dt} \int_a^t (6x^2 + 8x)dx =$$

< 変位と道のり >

x 軸上を動く点の時刻 t における位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$x'(t) = v(t)$ より

$$\boxed{\int_a^b v(t) dt = x(b) - x(a)} \quad (\text{変位})$$

となる。この値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**変位**という。これに対し,

$$\boxed{\int_a^b |v(t)| dt} \quad (\text{道のり})$$

の値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**道のり**という。ここで記号 $|v|$ は v の絶対値であり $v \geq 0$ のときは $|v| = v$, また $v \leq 0$ のときは $|v| = -v$ を表す。

例題 $v(t) = 2 - t$ のとき次式の値を求めよ。

$$(1) \int_0^4 v(t) dt \qquad (2) \int_0^4 |v(t)| dt$$

$$(\text{解}) (1) \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (2 - t) dt = \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_0^4 = \left(2 \times 4 - \frac{4^2}{2} \right) - 0 = 0$$

(2) $v(t) = 2 - t$ は $t = 2$ のときを境に+, -が入れかわる。

そこで積分範囲を2つにわけて

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^4 |2 - t| dt = \int_0^2 |2 - t| dt + \int_2^4 |2 - t| dt$$

とする。

① $0 \leq t \leq 2$ のとき $2 - t \geq 0$ より $|2 - t| = 2 - t$ だから

$$\int_0^2 |2 - t| dt = \int_0^2 (2 - t) dt = \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 4 - \frac{4}{2} = 2$$

② $2 \leq t \leq 4$ のとき $2 - t \leq 0$ より $|2 - t| = -(2 - t) = t - 2$ だから

$$\int_2^4 |2 - t| dt = \int_2^4 (t - 2) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_2^4 = \left(\frac{16}{2} - 8 \right) - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) = 2$$

よって①, ②より

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^2 |2 - t| dt + \int_2^4 |2 - t| dt = 2 + 2 = 4$$

(注) 「道のり」は動いた距離を表す。

問 次式の値を求めよ。

$$(1) \int_1^3 (2 - t) dt \qquad (2) \int_1^3 |2 - t| dt$$

< 積分の練習 >

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3x - 5) dx$

(2) $\int \left(\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7 \right) dx$

(3) $\int \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4x \right) dx$

(4) $\int (x - 1)(2x + 1) dx$

(5) $\int (t^2 - 4t + 3) dt$

(6) $\int (2t + 1)^2 dt$

問 2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 3) dx$

(2) $\int_{-1}^3 (x + 1)(x - 3) dx$

(3) $\int_0^2 (t - 1)^2 dt$

(4) $\int_1^3 |10 - 5t| dt$

問 3 次の条件をみたす関数 $F(t)$ を求めよ。

(1) $F'(t) = 10 - 5t$, $F(1) = 3$

(2) $F'(t) = t^2 - 4t + 7$, $F(0) = 0$

問 4 地上 0m の地点から初速 19.6m/s でボールを真上に投げ上げた。 t 秒後の高さを $y(t)$ m, 速度を $v(t)$ m/s とすると物理的考察より

$$y'(t) = v(t) \quad , \quad v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。(2) t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さを求めよ。

(4) 1 秒後から 3 秒後の間にボールが動いた距離を求めよ。