

高知工科大学
基礎数学ワークブック

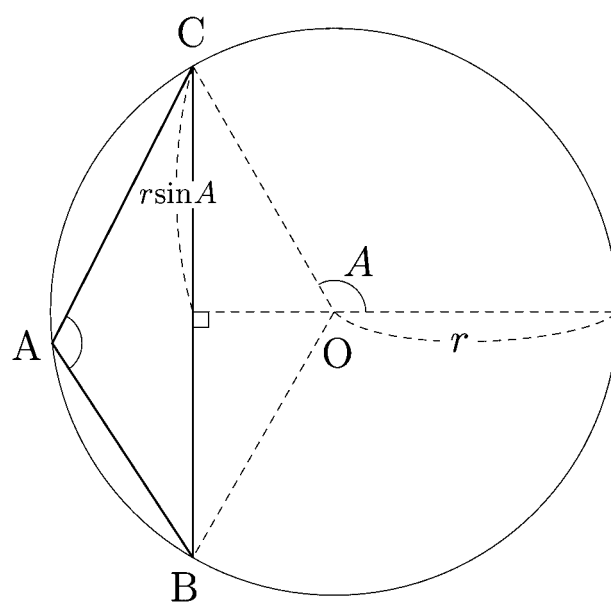
(2003年度版)

入門編

No. 2

内容

- ◎ 2次関数
- ◎ 三角比
- ◎ 正弦定理
- ◎ 余弦定理
- ◎ 平面のベクトル



井上 昌昭 著

< 比例・反比例 1 >

x の関数 y が $y = (\text{定数}) \times x$ の形になっているとき y は x に比例する という。

x の関数 y が $y = (\text{定数}) \times \frac{1}{x}$ の形になっているとき y は x に反比例する という。

例 1 y が x の 3 乗に比例する場合, $y = kx^3$ (k は比例定数) と表される。

例 2 y が x の 2 乗に反比例する場合, $y = \frac{k}{x^2}$ (k は定数) と表される。

例題 ダイヤモンドの値段はその重さの 2 乗に比例する。6 カラットの値段は 72 万円である。10 カラットの値段はいくらか。

(解) x カラットの値段を y 万円とすると, y が x の 2 乗に比例するから

$$y = kx^2$$

と表される。 $x = 6$ のとき $y = 72$ より

$$72 = k \times 6^2 = 36k \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x^2$$

であるから 10 カラットの値段は

$$x = 10 \text{ のとき } y = 2x^2 = 2 \times 10^2 = 200 \quad \underline{\text{(答) 200 万円}}$$

問 1 上の例題と同じ場合に 2 つのダイヤモンドがあり, 大きいダイヤは小さいダイヤの 1.5 倍の重さがある。値段は何倍か。

問 2 粘土で立方体を作ると, その重さ y g は一辺の長さ x cm の 3 乗に比例する。1 辺 2 cm の立方体の重さが 120 g であるとき, 一辺 3 cm の立方体は何 g か。

問 3 ある点の明るさは光源の光度が一定のとき, 光源からの距離の 2 乗に反比例する。ある光源から 2 m はなれたところの明るさが 12.5 ルクスである。

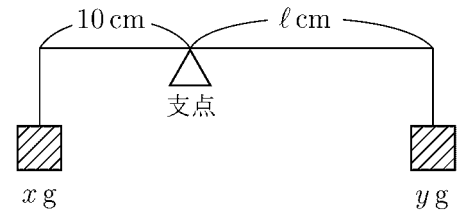
(1) 光源から x m 離れたところの明るさを y ルクスとする。 y を x で表せ。

(2) この光源から 5 m 離れたところの明るさを求めよ。

< 比例・反比例 2 >

例 1 右図のようにてこの支点から左側 10 cm のところに x g の重りがあり、右側 l cm のところに y g の重りがある。これが つりあっているとき

$$10 \times x = l \times y \Rightarrow \boxed{l = \frac{10x}{y}}$$



が成り立つ。この式より

(1) 「 y が一定のとき、 l は x に比例する」

(2) 「 x が一定のとき、 l は y に反比例する」

と言える。この (1) と (2) をまとめて、単に

「 l は x に比例し、 y に反比例する」

と言う。

例 2 底面の半径 r cm, 高さ h cm の円錐の体積 V は

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} r^2 h} \quad (\text{cm}^3)$$

となる。このようなとき

「 V は高さ (h) に比例し、底面の半径 (r) の 2 乗に比例する」

と言う。

例題 z は x に比例し、 y の 2 乗に反比例している。 $x = 2, y = 3$ のとき $z = 4$ であつた。 z を x と y で表せ。

(解) 比例定数 k を用いると

$$z = \frac{kx}{y^2}$$

と表される。 $x = 2, y = 3$ のとき $z = 4$ より

$$4 = \frac{k \times 2}{3^2} \Rightarrow k = 18 \Rightarrow \underline{\underline{(\text{答}) } z = \frac{18x}{y^2}}$$

問 次の各場合に z を x と y で表せ。

(1) z は x に比例し、 y に反比例している。

$x = 100, y = 4$ のとき $z = 50$ である。

(2) z は x に比例し、 y の 2 乗に反比例している。

$x = 24, y = 6$ のとき $z = 5$ である。

< 比例・反比例 3 >

問 1 ある点の明るさ z ルクスは光源の光度 x (燭光) に比例し, その光源からの距離 y m の 2 乗に反比例する。1 燭光の光源 ($x = 1$) から 1 m 離れたところの明るさが $z = 1$ ルクスである。

(1) z を x と y で表せ。

(2) 50 燭光 ($x = 50$) の電燈から 2 m 離れたところの明るさ (z ルクス) を求めよ。

問 2 一定量の気体の体積 V は, 絶対温度 T に比例し, 圧力 P に反比例する。
絶対温度 280K, 圧力 2 気圧のとき 35 l の気体を考える。

(1) V を T と P で表せ。

(2) 絶対温度 300K, 圧力 5 気圧のときの体積 V を求めよ。

問 3 銅線の電気抵抗は銅線の長さに比例し, その切り口の面積に反比例する。
長さ 1 m, 切り口が半径 2 mm の円である銅線の電気抵抗が 0.0014 オームであるとする。

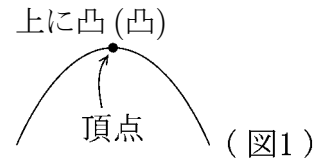
(1) 銅線の長さを x m, 切り口の半径を y mm, 電気抵抗を z オームとして,
 z を x と y で表せ。

(2) 長さ 6 m, 切り口が半径 1 mm の円である銅線の電気抵抗は何オームか。

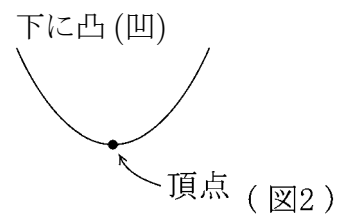
< 2次関数のグラフ 1 >

y が x の 2 次式で表される関数を 2 次関数という。物を投げたときの軌道が 2 次関数のグラフとして表されるので、2 次関数のグラフを**放物線**という。

$y = x^2, y = -4x^2, y = -\frac{1}{4}x^2$ などのグラフを上に凸または単に凸という (図 1)。このようなグラフで y 座標が最大になる点を、この放物線の頂点という。



$y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2$ などのグラフを下に凸または単に凹という (図 2)。このグラフで y 座標が最小になる点を (同様に) 頂点という。



a, x_0, y_0 を定数とする 2 次関数

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

のグラフは $y = ax^2$ のグラフを

$$\begin{cases} x \text{ 軸方向に } x_0 \\ y \text{ 軸方向に } y_0 \end{cases}$$

だけ平行移動したものである。

その頂点は (x_0, y_0) である。 $a > 0$ のときは図 3 のようなグラフになる。

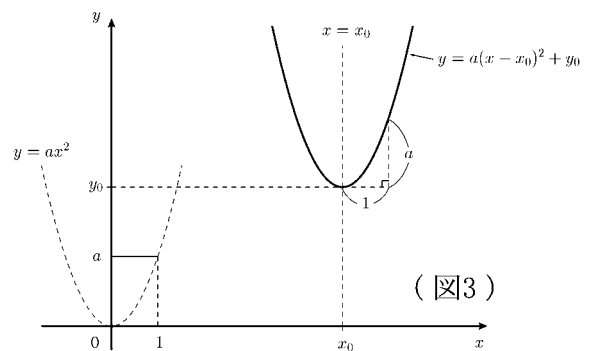


図 3 の放物線は直線 $x = x_0$ を対称軸として左右対称になっている。このようなとき直線 $x = x_0$ を**軸**または**対称軸**という。

問 次の 2 次関数の対応表とグラフを書き、頂点と軸を求めよ。

(1) $y = -(x - 3)^2 + 2$

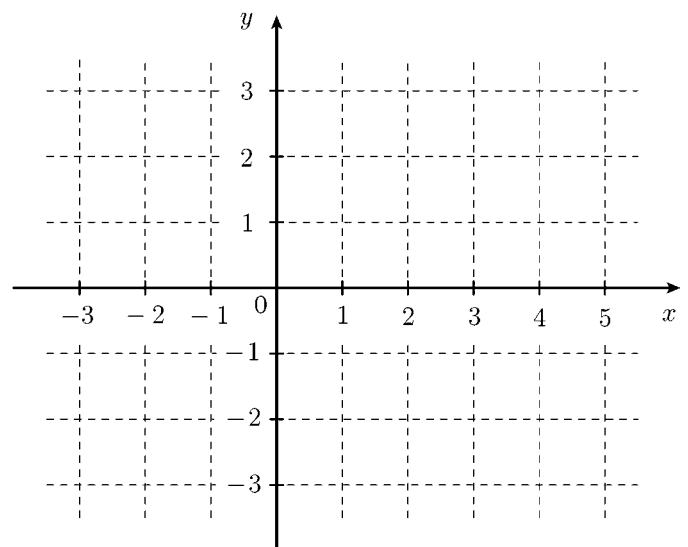
頂点 (,), 軸 $x =$

x	1	2	3	4	5
y					

(2) $y = (x + 1)^2 - 2$

頂点 (,), 軸 $x =$

x	-3	-2	-1	0	1
y					



< 2次関数のグラフ 2 >

2次式 $ax^2 + bx + c$ を変形して $a(x - x_0)^2 + y_0$ の形にすることができる。

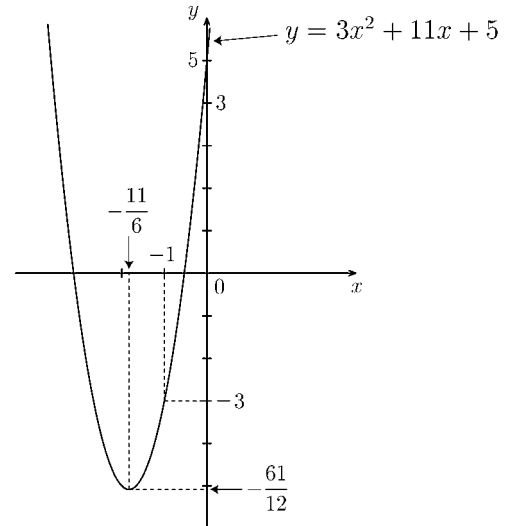
$a(x - x_0)^2 + y_0$ を2次式の標準形という。

例 2次関数 $y = 3x^2 + 11x + 5$ のグラフを描きたい。頂点の位置を正確に求めるために標準形に変形する。

$$\begin{aligned} 3x^2 + 11x + 5 &= 3 \left\{ x^2 + \frac{11}{3}x \right\} + 5 \\ &= 3 \left\{ \left(x + \frac{11}{2 \times 3} \right)^2 - \left(\frac{11}{2 \times 3} \right)^2 \right\} + 5 \\ &= 3 \left(x + \frac{11}{6} \right)^2 - \frac{61}{12} \end{aligned}$$

より頂点 $\left(-\frac{11}{6}, -\frac{61}{12} \right)$, 軸 $x = -\frac{11}{6}$ の

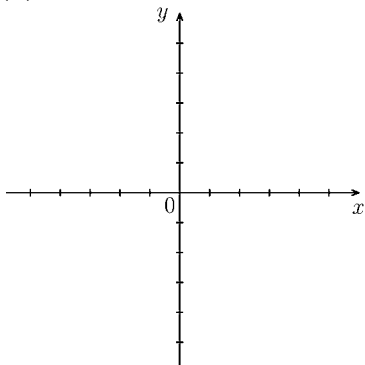
下に凸な放物線である。



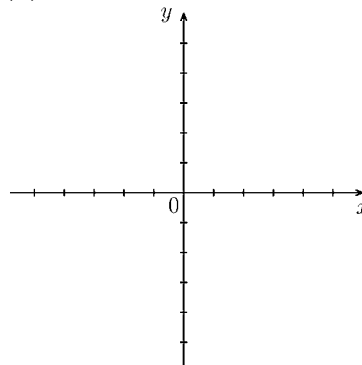
(注) 放物線のグラフを描くときは、まず頂点の位置をはっきりと分かるように描くこと。その次に頂点意外に通る点を少なくとも1点は描いておくこと。普通は y 切片 (y 軸との交点) をとる。

問 次の放物線の頂点を求め、グラフを描け。

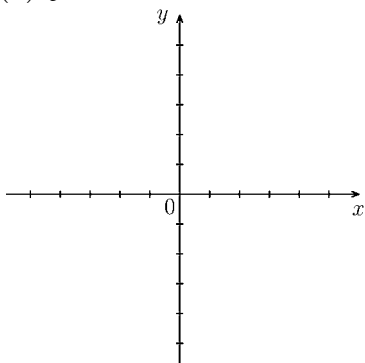
(1) $y = x^2 - 4x + 1$



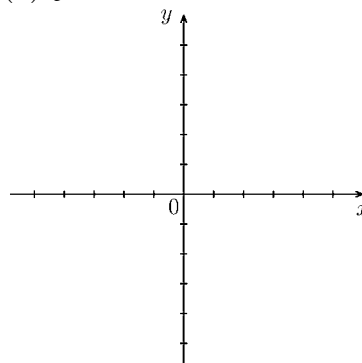
(2) $y = -x^2 + 6x - 5$



(3) $y = 2x^2 + 4x$



(4) $y = -2x^2 - 6x - 2$



< 2次関数のグラフ 3 >

例 2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは前ページの例より頂点 $(2, -3)$, 軸 $x = 2$ の放物線である。このグラフの x 切片 (x 軸との交点) を求めたい。

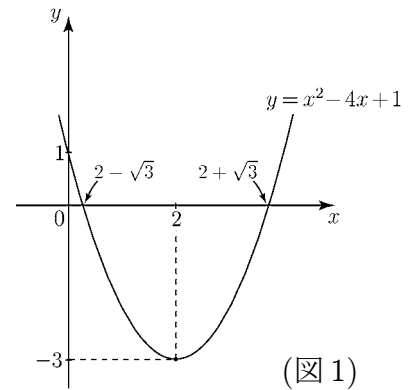
x 軸は直線 $y = 0$ であるから

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

とおくと解の公式より

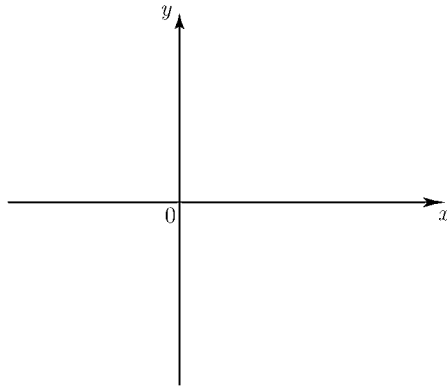
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

であるから x 切片は $2 - \sqrt{3}$ と $2 + \sqrt{3}$ である。

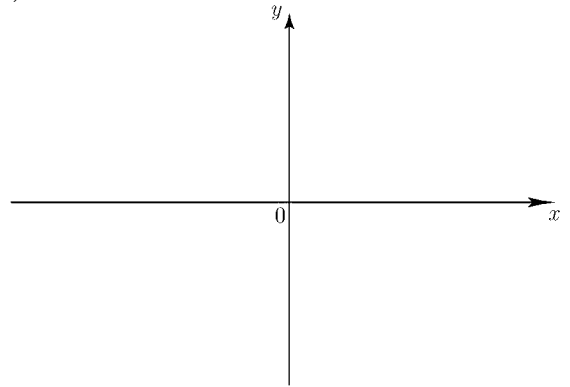


問 1 次の放物線の頂点と x 切片を求め、グラフを書け。

(1) $y = x^2 - 2x - 3$



(2) $y = x^2 + 4x + 2$



例題 不等式 $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(解) $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは上の図 1 の放物線である。このグラフから

- | | | |
|---------------------------------------|-----|--------------------------------------|
| (1) $x < 2 - \sqrt{3}$ | のとき | $y > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 > 0$ |
| (2) $x = 2 - \sqrt{3}$ | のとき | $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ |
| (3) $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ | のとき | $y < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$ |
| (4) $x = 2 + \sqrt{3}$ | のとき | $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ |
| (5) $x > 2 + \sqrt{3}$ | のとき | $y > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 > 0$ |

となることがわかる。よって求める範囲は (3) 以外である。

(答) $x \leq 2 - \sqrt{3}$ か又は $2 + \sqrt{3} \leq x$

(注) (解) で y の正 ($y > 0$), 負 ($y < 0$) は放物線が x 軸 ($y = 0$) より上 ($y > 0$) にあるか、 x 軸より下 ($y < 0$) にあるかによって決まる。

問 2 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

(1) $x^2 - 2x - 3 > 0$

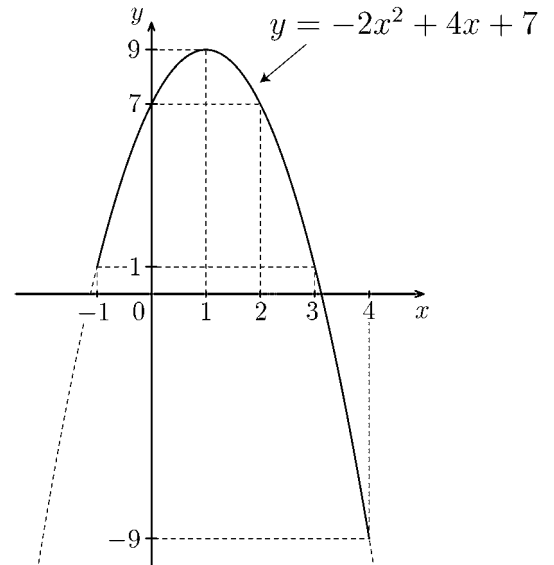
(2) $x^2 + 4x + 2 \leq 0$

< 2次関数の最大・最小 1 >

例題 2次関数 $y = -2x^2 + 4x + 7$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値を求めよ。

(解) $y = -2x^2 + 4x + 7$
 $= -2(x - 1)^2 + 9$

より この2次関数のグラフは右図のようになる。このグラフより $-1 \leq x \leq 4$ の範囲では頂点 $(1, 9)$ で最大になり, $x = 4$ のとき最小となる。



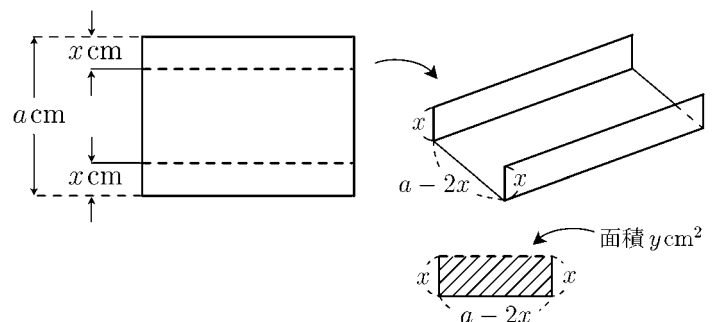
(答) $\begin{cases} x = 1 \text{ のとき最大値 } y = 9 \\ x = 4 \text{ のとき最小値 } y = -9 \end{cases}$

問1 次の2次関数に対し, () 内の範囲で最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = 2x(4 - x)$ ($0 \leq x \leq 4$)

(2) $y = 3x^2 + 9x + 2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

問2 幅 a cm のブリキの板を右図のように折りまげて樋(とい)を作りたい。樋の切り口の面積 $y(\text{cm}^2)$ を最大にするためには折り曲げる幅 x を何 cm にすればよいか。

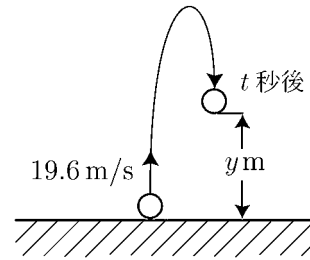


< 2次関数の最大・最小 2 >

問 1 地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。t 秒後の高さを y m とすると

$$y = -4.9t^2 + 19.6t$$

となる。



(1) y を t の 2 次関数として最大値を求めよ。

(2) 何秒後に最高点に達するか。

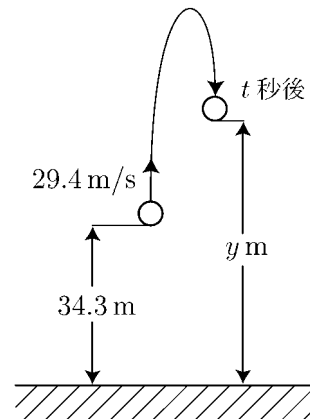
(3) 最高点は地上何 m か。

(4) 地上に落下するのは何秒後か。

問 2 地上 34.3 m の高さから初速 29.4 m/s で真上にボールを投げ上げた。t 秒後の高さを y m とすると

$$y = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3$$

となる。



(1) 何秒後に最高点に達するか。

(2) 最高点は地上何 m か。

(3) 地上に落下するのは何秒後か。

< 三角比 1 >

右図の直角三角形 ABC において

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad (\text{正弦 } sine)$$

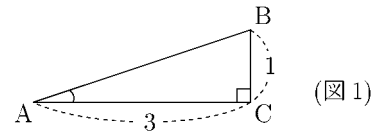
$$\cos A = \frac{b}{c} \quad (\text{余弦 } cosine)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad (\text{正接 } tangent)$$

例 (1) 図 1 の場合 $c = AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ より

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos A = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \tan A = \frac{1}{3}$$

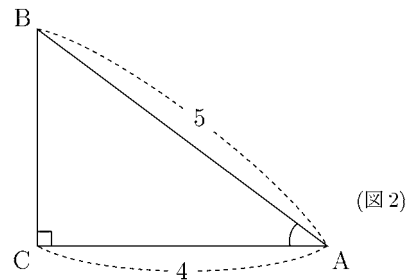
$$\sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \tan B = 3$$



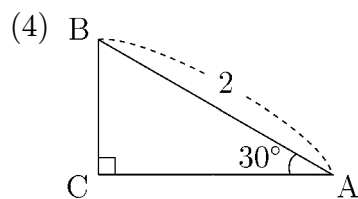
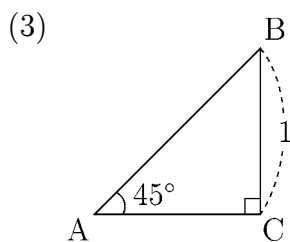
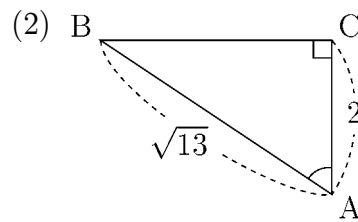
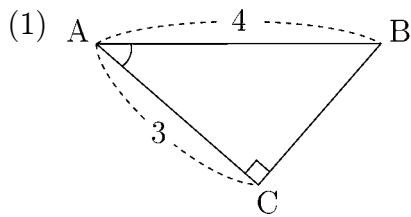
(2) 図 2 の場合 $a = BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ より

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5}, \quad \tan A = \frac{3}{4}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}, \quad \cos B = \frac{3}{5}, \quad \tan B = \frac{4}{3}$$



問 次の各場面に $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ を求めよ。



< 三角比 2 >

例 昔の人は三角形の相似を利用して、ピラミッドや山の高さを測った。

ここでは最も簡単な場合を考える。

右図のような木の高さを測りたい。

ある人が木から 10m 離れた場所から

木の頂点 B を見上げたら、水平から

23° であった。人の目の位置を A (目

の高さは地上 1.5m とする)、木の中

心線上で地上 1.5m の位置を C とす

る。三角形 ABC と相似な三角形を右

下図のように紙に正確に描く。

A'C' の長さを 10 cm にすると B'C' の

長さは 4.245 cm になった。

△ABC と △A'B'C' は相似より

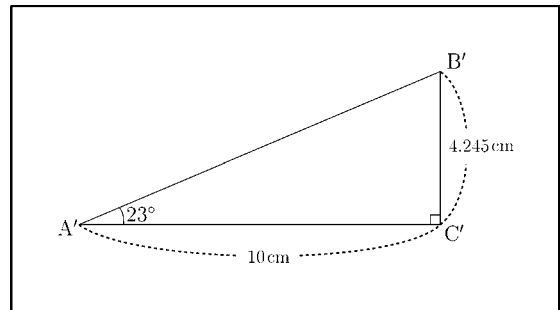
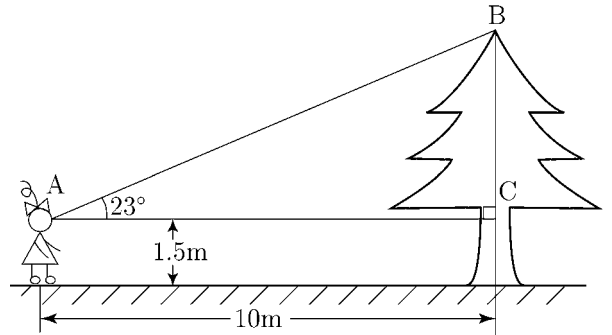
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{4.245}{10} = 0.4245$$

であるから

$$BC = 0.4245 \times 10 = 4.245 \text{ (m)}$$

よって木の高さに 1.5 (m) をたして

$$\underline{\underline{\text{(答) } 5.745 \text{ (m)}}}}$$



(別解) 図を描かずに求める方法を示す。

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \text{ より } BC = AC \times \tan A = 10 \times \tan 23^\circ$$

ここで三角関数表 (18 ページ) より $\tan 23^\circ = 0.4245$ だから

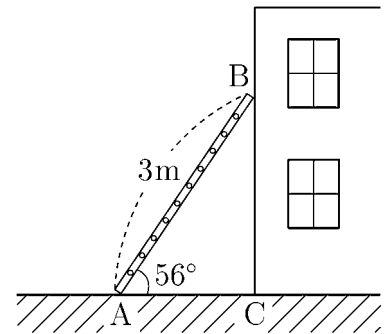
$$BC = 10 \times \tan 23^\circ = 10 \times 0.4245 = 4.245 \text{ (m)}$$

$$\text{よって } \underline{\underline{\text{(答) 木の高さ} = 4.245 + 1.5 = 5.745 \text{ (m)}}}}$$

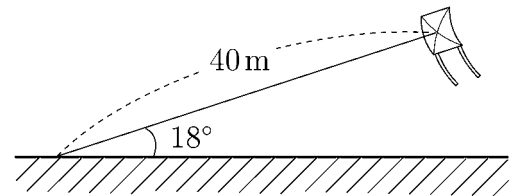
問 例と同じ問題で見上げる角度が 35° のとき、三角関数表を用いて木の高さを求めよ。

< 三角比 3 >

問 1 長さ 3m のはしご AB が壁に立てかけてある。
はしごと地面のつくる角が 56° であるとき、
はしごがとどいている高さ BC, およびはしご
の端 A から壁までの距離 AC を三角関数表を
見て少数第 1 位まで求めよ。



問 2 たこあげをしていて、糸の長さが 40 m
になったとき、地面と糸のなす角が 18°
であった。三角関数表を見て以下の
問題に答えよ。

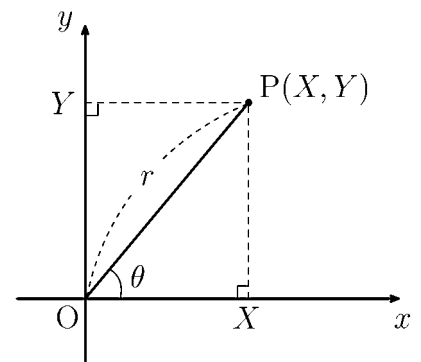


(1) たこの高さを少数第 1 位まで求めよ。

(2) 立っている地点からたこの真下までの距離を少数第 1 位まで求めよ。

問 3 正の数 X, Y に対して、座標平面の点 $P(X, Y)$ と
原点 $O(0, 0)$ との距離を r とする。また 線分 OP
と x 軸とのなす角を θ とする。
 X, Y を r と θ で表せ。

$X =$, $Y =$

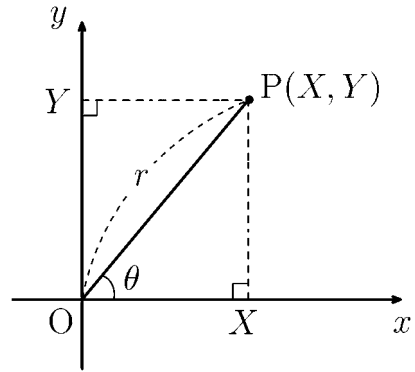


< 三角比 4 >

右図の場合に

$$\sin \theta = \frac{Y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{X}{r}, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

である。



問 次の各場面に点 P の座標を求め、正弦、余弦、正接を求めよ。

(1) P (,)

$\sin 30^\circ =$

$\cos 30^\circ =$

$\tan 30^\circ =$

(2) P (,)

$\sin 45^\circ =$

$\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$

(3) P (,)

$\sin 60^\circ =$

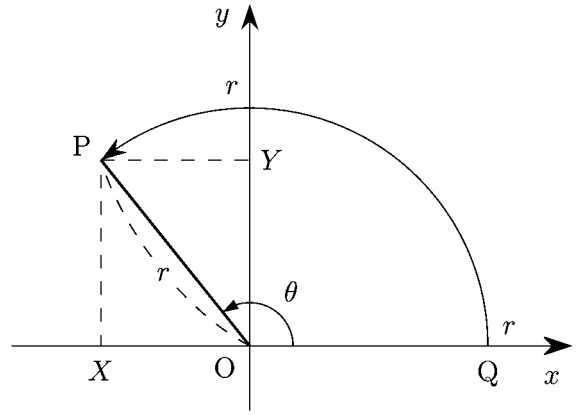
$\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$

< 三角関数 1 >

角度 θ が 90° 以上の場合の三角比を次で定める。

正の数 r に対し、点 $Q(r, 0)$ を原点 $O(0, 0)$ を中心として反時計まわりに角度 θ だけ回転した点を $P(X, Y)$ とする。このとき角度 θ における三角比を



$$\sin \theta = \frac{Y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{X}{r}, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

で定める。

(注) この値は r によらない。

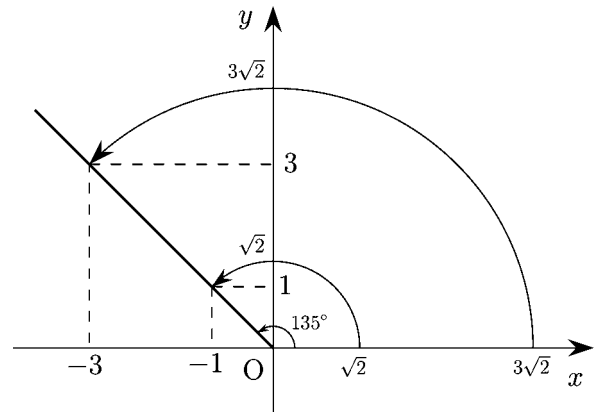
例 $\theta = 135^\circ$ の場合を考える。

(1) $r = \sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $P(-1, 1)$ より

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

となる。



(2) $r = 3\sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $P(-3, 3)$ より

$$\sin 135^\circ = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135^\circ = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 135^\circ = \frac{3}{-3} = -1$$

よって (1) と (2) は同じ結果になる。

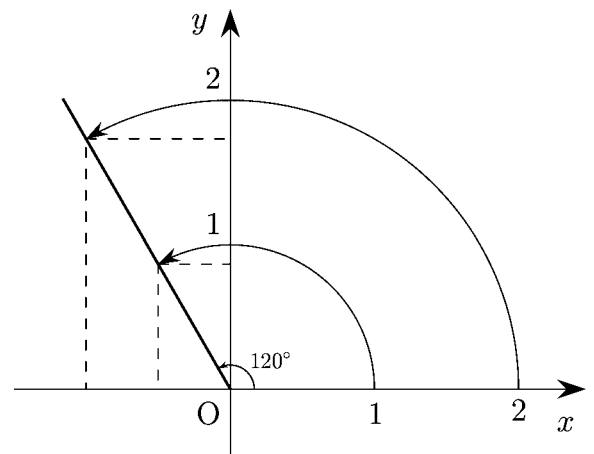
問 $\theta = 120^\circ$ の場合に $r = 1$ と $r = 2$ のときの点 P の座標を求め、三角比を計算せよ。

(1) $r = 1$ のとき $P(\quad, \quad)$

$$\sin 120^\circ = \quad \quad \cos 120^\circ = \quad \quad \tan 120^\circ = \quad$$

(2) $r = 2$ のとき $P(\quad, \quad)$

$$\sin 120^\circ = \quad \quad \cos 120^\circ = \quad \quad \tan 120^\circ = \quad$$



< 三角関数 2 >

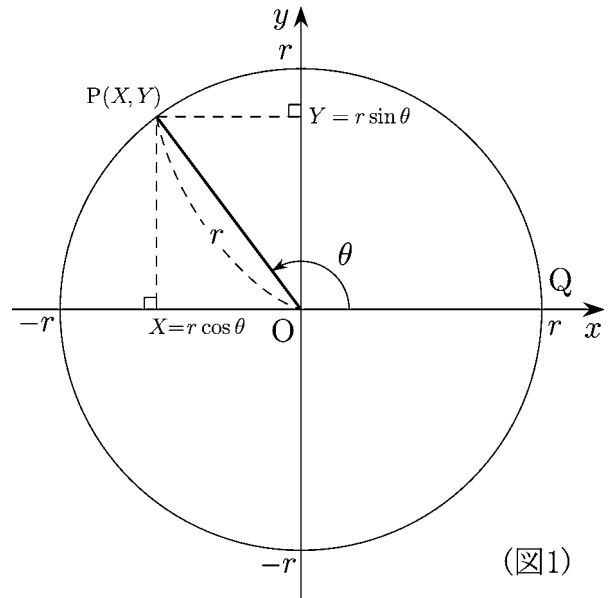
角度 θ が図1のようなとき, θ の三角比は前ページより

$$\sin \theta = \frac{Y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{X}{r}, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

で定義される。これより

$$Y = r \sin \theta, \quad X = r \cos \theta$$

と表される。



(図1)

< $r = 1$ のとき >

$r = 1$ のとき図2の点 P の座標 (X, Y) は

$$(X, Y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

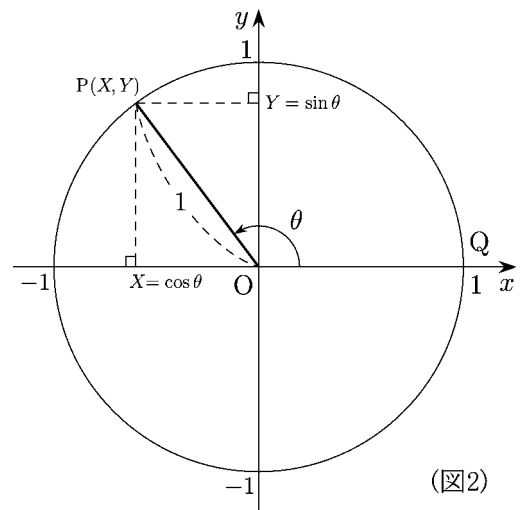
となる。

このとき角度 θ の三角比は図2の座標 (X, Y) を用いると

$$\sin \theta = Y, \quad \cos \theta = X, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

のように簡単になる。この式を θ の三角比の定義としてもよい。

(注) $X = 0$ のとき $\tan \theta$ の値は定義されない。



(図2)

例1 $\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから

$X = 1, Y = 0$ である。よって

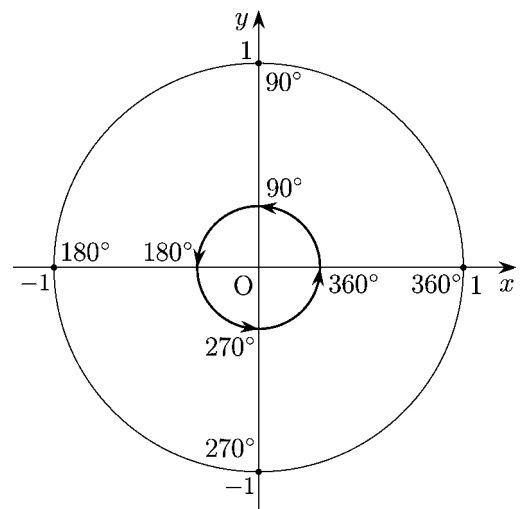
$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

例2 $\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから

$X = 0, Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

である。 $\tan 90^\circ$ の値は定義されない。



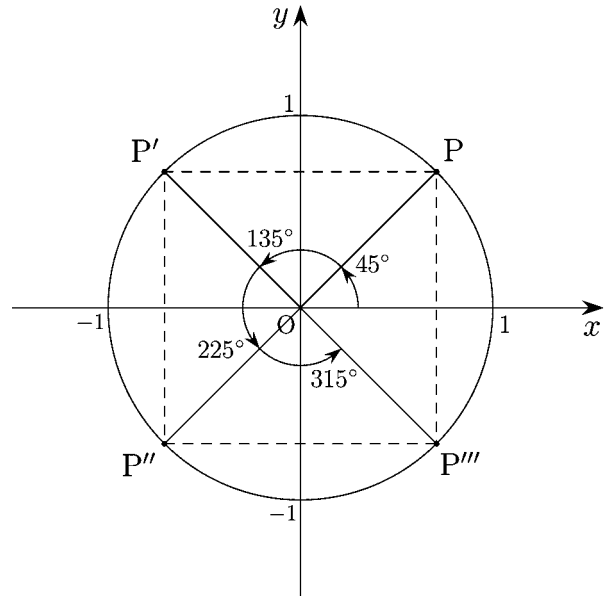
問 次の値を求めよ。

$$\sin 180^\circ = \quad \cos 180^\circ = \quad \tan 180^\circ =$$

$$\sin 270^\circ = \quad \cos 270^\circ =$$

< 三角関数 3 >

問 1 右図で点 P, P', P'', P''' の座標を求め, 図の下に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 45^\circ =$ $\sin 45^\circ =$ $\tan 45^\circ =$

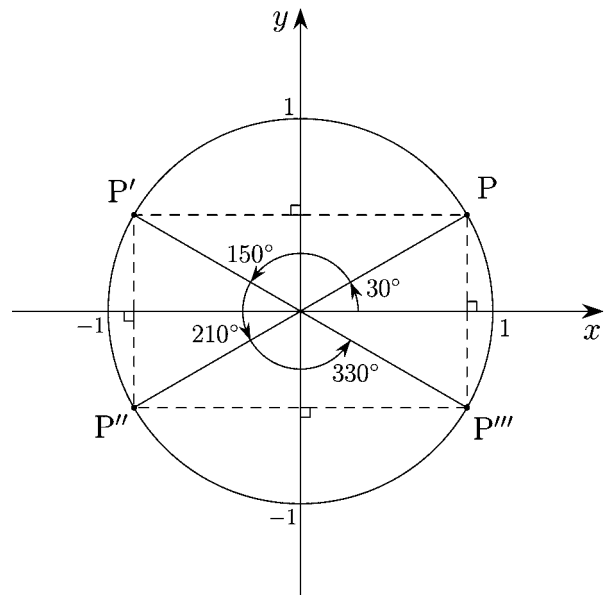
$\cos 135^\circ =$ $\sin 135^\circ =$ $\tan 135^\circ =$

$\cos 225^\circ =$ $\sin 225^\circ =$ $\tan 225^\circ =$

$\cos 315^\circ =$ $\sin 315^\circ =$ $\tan 315^\circ =$

- P (,)
- P' (,)
- P'' (,)
- P''' (,)

問 2 右図で点 P, P', P'', P''' の座標を求め, 図の下に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 30^\circ =$ $\sin 30^\circ =$ $\tan 30^\circ =$

$\cos 150^\circ =$ $\sin 150^\circ =$ $\tan 150^\circ =$

$\cos 210^\circ =$ $\sin 210^\circ =$ $\tan 210^\circ =$

$\cos 330^\circ =$ $\sin 330^\circ =$ $\tan 330^\circ =$

- P (,)
- P' (,)
- P'' (,)
- P''' (,)

< 三角関数 4 >

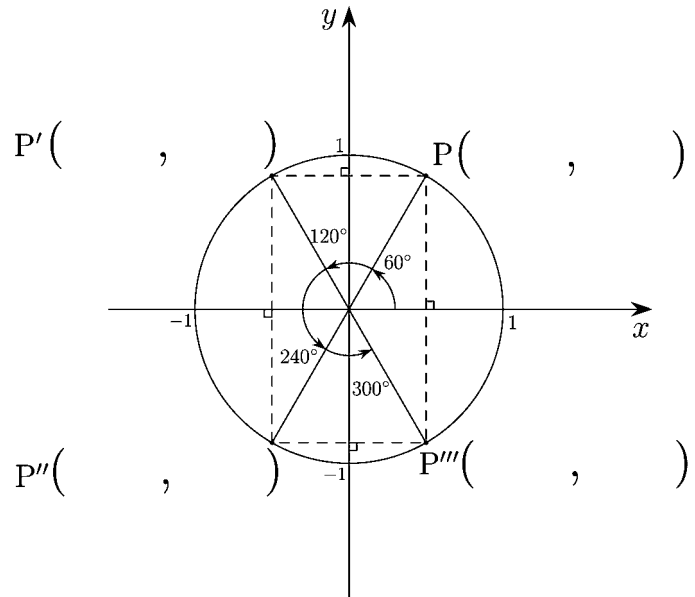
問1 右図で点 P, P', P'', P''' の座標を求め, 図に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。

$\cos 60^\circ =$ $\sin 60^\circ =$ $\tan 60^\circ =$

$\cos 120^\circ =$ $\sin 120^\circ =$ $\tan 120^\circ =$

$\cos 240^\circ =$ $\sin 240^\circ =$ $\tan 240^\circ =$

$\cos 300^\circ =$ $\sin 300^\circ =$ $\tan 300^\circ =$



問2 三角関数表より

$\cos 50^\circ = 0.6428$, $\sin 50^\circ = 0.7660$

であるので右図の点 P の座標は

$P(0.6428, 0.766)$

である。

(1) 右図の点 P', P'', P''' の座標を記入せよ。

P'(,)

P''(,)

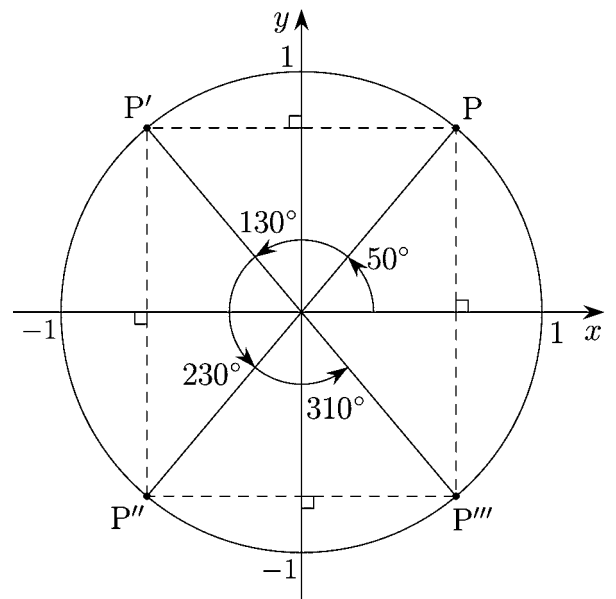
P'''(,)

(2) 次の値を求めよ。

$\cos 130^\circ =$ $\sin 130^\circ =$

$\cos 230^\circ =$ $\sin 230^\circ =$

$\cos 310^\circ =$ $\sin 310^\circ =$



(3) $\tan 50^\circ = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{0.7660}{0.6428} = 1.1918$ であることを用いて次の値を求めよ。

$\tan 130^\circ =$

$\tan 230^\circ =$

$\tan 310^\circ =$

< 三角関数 5 >

問 1 前ページの性質を一般化する。

- (1) 右図を参考にして次式を $\cos \theta$ または $\sin \theta$ で表せ。

$$\sin(180^\circ - \theta) =$$

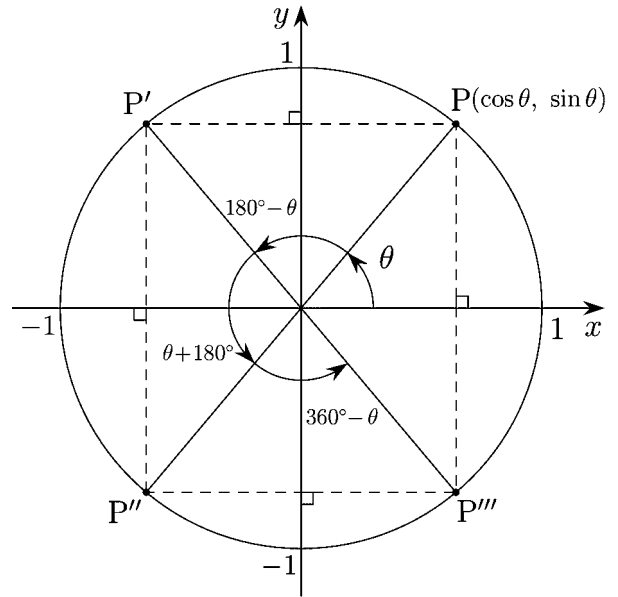
$$\cos(180^\circ - \theta) =$$

$$\sin(\theta + 180^\circ) =$$

$$\cos(\theta + 180^\circ) =$$

$$\sin(360^\circ - \theta) =$$

$$\cos(360^\circ - \theta) =$$



- (2) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ であることを用いて次式を $\tan \theta$ で表せ。

$$\tan(180^\circ - \theta) =$$

$$\tan(\theta + 180^\circ) =$$

$$\tan(360^\circ - \theta) =$$

問 2 三角関数表 (次ページ) と問 1 の結果より次の値を求めよ。

$$\cos 20^\circ =$$

$$\sin 20^\circ =$$

$$\tan 20^\circ =$$

$$\cos 160^\circ =$$

$$\sin 160^\circ =$$

$$\tan 160^\circ =$$

$$\cos 200^\circ =$$

$$\sin 200^\circ =$$

$$\tan 200^\circ =$$

$$\cos 340^\circ =$$

$$\sin 340^\circ =$$

$$\tan 340^\circ =$$

< 三角関数表 >

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—

三角関数表は 0° から 90° までしかないが、前ページの結果を用いるとその他の角度の場合も求められる。

例 $\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ = -0.9063$

$\sin 190^\circ = \sin(10^\circ + 180^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.1736$

$\tan 320^\circ = \tan(360^\circ - 40^\circ) = -\tan 40^\circ = -0.8391$

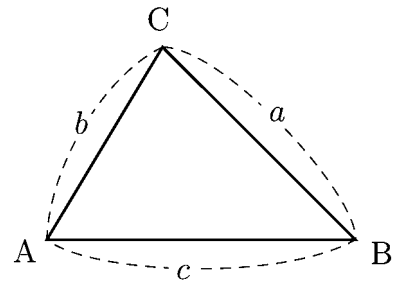
問 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 155^\circ =$ (2) $\tan 190^\circ =$ (3) $\cos 320^\circ =$

(4) $\tan 140^\circ =$ (5) $\cos 250^\circ =$ (6) $\sin 350^\circ =$

< 正弦定理 1 >

三角形 ABC で、頂点 A, B, C に対する辺の長さを、それぞれ、 a, b, c とする。また $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを、それぞれ A, B, C と書くことにする。
このとき次の定理が成立する。

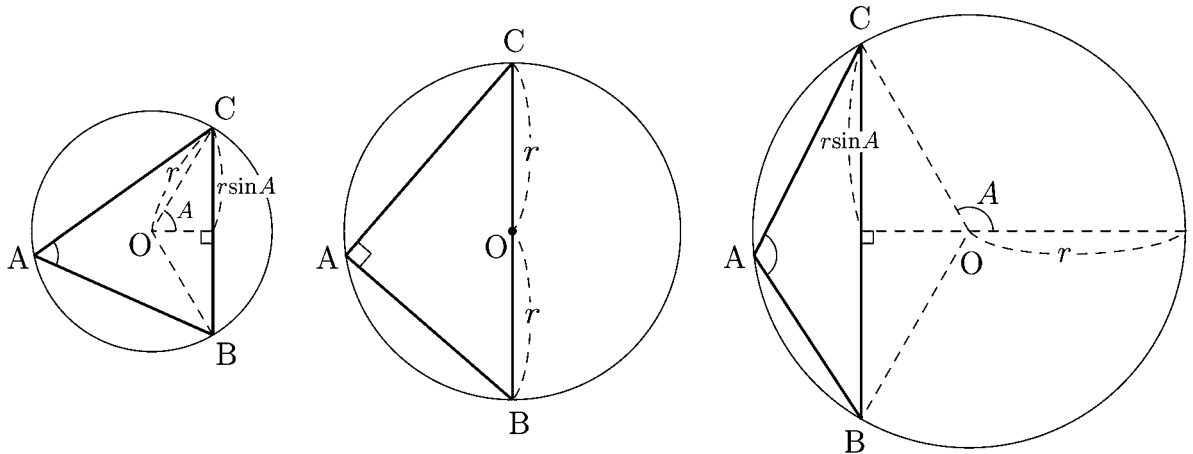


< 正弦定理 >

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

ここで r は三角形 ABC の外接円の半径である。

[証明] 外接円の中心を O とする。円周角と中心角との関係から
図のように $\angle BOC$ の大きさの半分が A になる。



A が鋭角, 90° , 鈍角のどの場合についても

$$BC \text{ の長さ} = a = 2r \sin A$$

が成り立つ。従って

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

である。同様にして

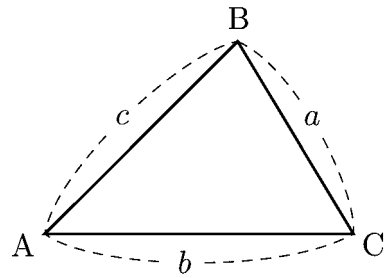
$$\frac{b}{\sin B} = 2r, \quad \frac{c}{\sin C} = 2r$$

が得られる。(証明終)

< 正弦定理 2 >

 $\triangle ABC$ において

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r} \quad (\text{正弦定理})$$

 r は $\triangle ABC$ の外接円の半径である。**例題** $\triangle ABC$ で, $a = 4$, $A = 30^\circ$, $B = 105^\circ$ のとき

- (1) c を求めよ。
- (2) 外接円の半径 r を求めよ。

(解)

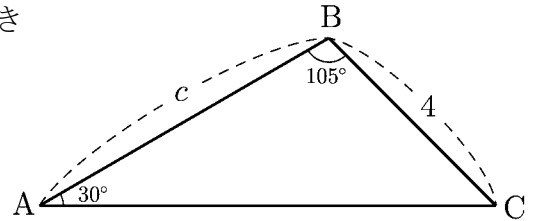
- (1) $A + B + C = 180^\circ$ より $C = 45^\circ$ 。
正弦定理から

$$\frac{c}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ}$$

よって

$$c = \frac{4}{\sin 30^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{4}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

- (2) $2r = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8$ より $\underline{r = 4}$

**問 1** $\triangle ABC$ で $a = 8$, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ のとき b を求めよ。**問 2** $\triangle ABC$ で $b = 2$, $B = 45^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき c を求めよ。**問 3** $\triangle ABC$ で $c = 10$, $A = 60^\circ$, $B = 75^\circ$ のとき

- (1) a を求めよ。
- (2) 外接円の半径 r を求めよ。

< 正弦定理の応用 >

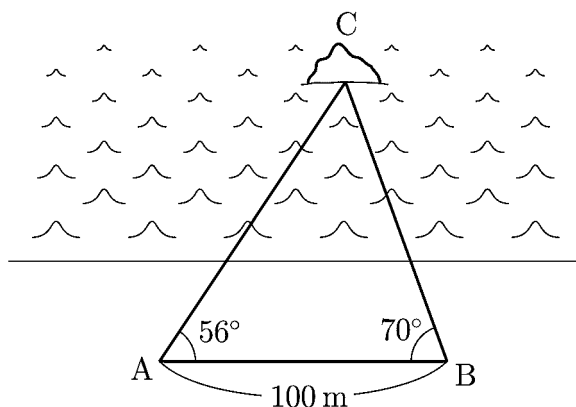
問 1 100m 離れた 2 地点 A, B から島 C を見たところ

$$\angle CAB = 56^\circ, \angle CBA = 70^\circ$$

であった。A, C 間の距離を求めよ。
ただし

$$\sin 54^\circ = 0.8, \quad \sin 70^\circ = 0.94$$

とする。

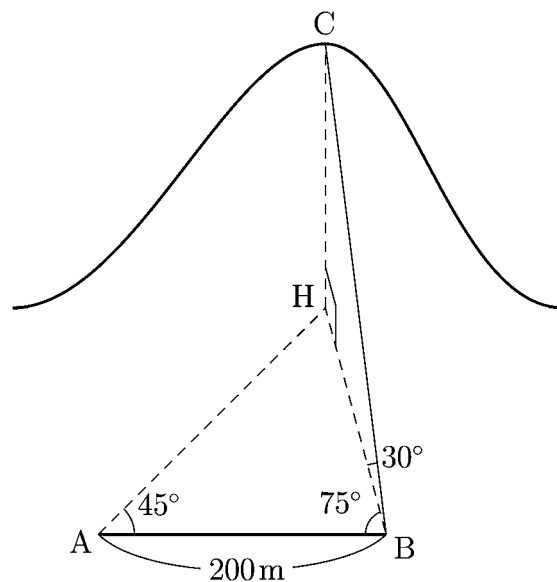


問 2 山の高さ CH を求めたい。ふもとの 2 地点 A, B で測量した結果右図のようになった。

$$\angle BAH = 45^\circ, \angle ABH = 75^\circ$$

$$\angle HBC = 30^\circ, \angle BHC = 90^\circ$$

$$AB = 200\text{m}$$



(1) $\angle AHB$ を求めよ。

(2) BH を求めよ。

(3) CH を求めよ。

< 三角関数の相互関係 >

角度 θ を表す点を $P(X, Y)$ とすると、三角関数の定義から

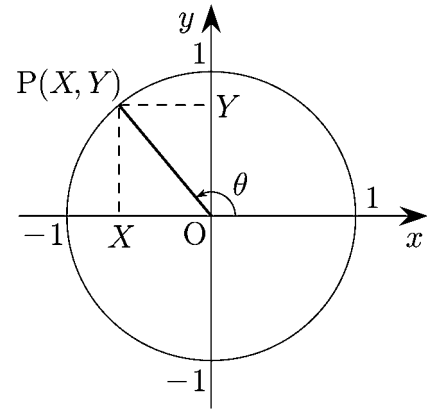
$$\sin \theta = Y, \cos \theta = X, \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

である。原点 O と点 P の距離は 1 だから $X^2 + Y^2 = 1$ より

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

が成り立つ。

(注) 記号 $\cos^2 \theta$ は $(\cos \theta)^2 = (\cos \theta) \times (\cos \theta)$ の意味であり、 $\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2 \neq \cos(\theta^2)$, $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$

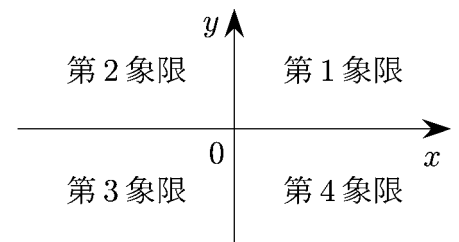


問 1 $\tan \theta$ を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ で表せ。

問 2 $1 + \tan^2 \theta$ を $\cos \theta$ で表せ。

問 3 三角関数の定義から、 \sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$				
$\tan \theta$				



となる。表を完成させよ。

例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ である。このとき

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{だから} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

問 4 角度 θ は 0° から 180° までの角で、 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ である。このとき $\sin \theta$ の値を求めよ。

< 平面座標の三角表示 >

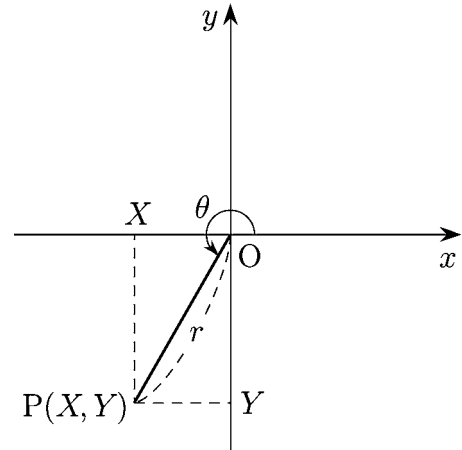
座標平面内で原点以外の任意の点を $P(X, Y)$ とする。点 P と原点 $O(0, 0)$ との距離を r とする。線分 OP と x 軸との角度 θ を右図のように測る。三角関数の定義 (p14) より

$$\cos \theta = \frac{X}{r}, \quad \sin \theta = \frac{Y}{r}$$

となるので、点 P の座標は

$$\boxed{P \text{ の座標 : } (X, Y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)} \quad (\text{平面座標の三角表示})$$

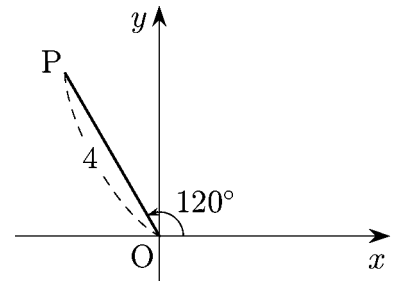
と表される。これを平面座標の三角表示ということにする。



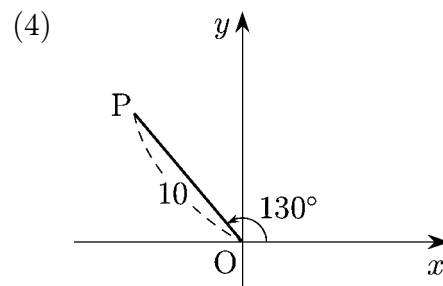
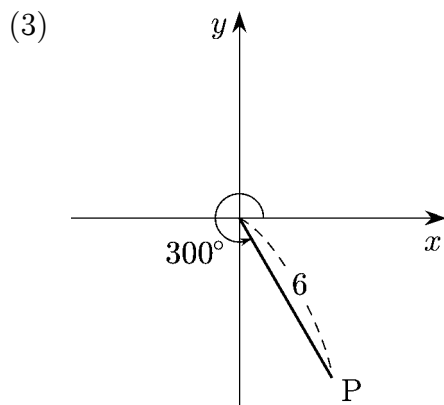
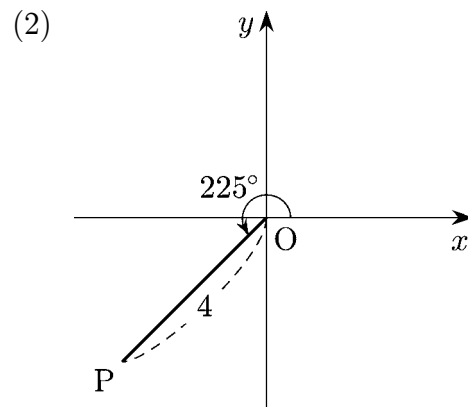
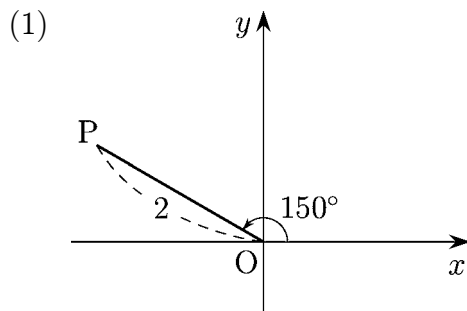
例 右図の点 P の座標は

$$\begin{aligned} P : (r \cos \theta, r \sin \theta) &= (4 \cos 120^\circ, 4 \sin 120^\circ) \\ &= \left(4 \times \left(-\frac{1}{2} \right), 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-2, 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。



問 次の各場合に点 P の座標を求めよ。((4) は三角関数表を用いる)



< 平面の距離 >

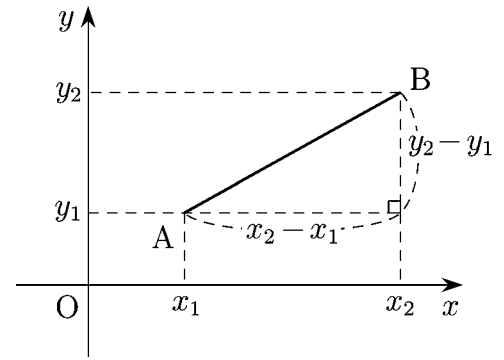
座標平面の 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離を AB で表す。三平方の定理より

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

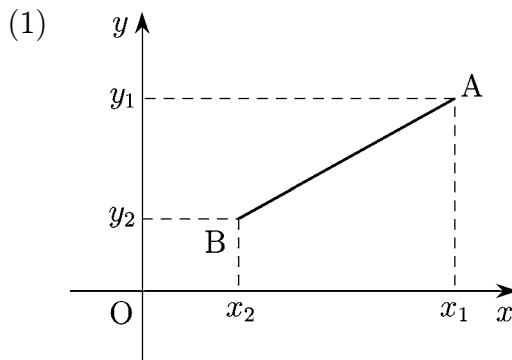
であるから 2 点間の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

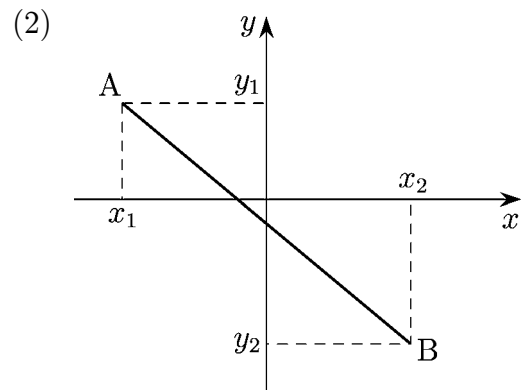
となる。



問 1 2 点 A , B が次のような位置関係にあるとき, AB を求めよ。



$AB =$



$AB =$

問 2 2 点 A , B が次の各場合に AB を求めよ。

- (1) $A(1, 3)$, $B(4, 1)$ (2) $A(2, 1)$, $B(-4, 3)$ (3) $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$

$AB =$

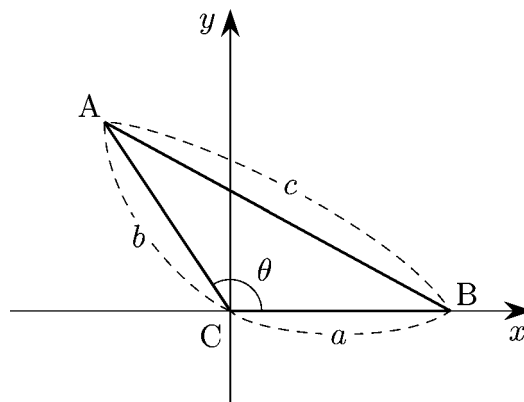
$AB =$

$AB =$

問 3 $a > 0$, $b > 0$, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき, 2 点 $Q(a, 0)$, $P(b \cos \theta, b \sin \theta)$ 間の距離 PQ の 2 乗 $(PQ)^2$ を計算し, 展開してできるだけ簡単な形にせよ。

< 余弦定理 1 >

問 任意の三角形 ABC を座標平面上に右図のように置く。点 C を原点 $(0,0)$ におき、点 B を x 軸 (正の部分) 上におく。 $\angle BCA = \theta$ とする。



(1) 点 B の座標を書け。 $B(\quad, \quad)$

(2) 23 ページを参考にして点 A の座標を b と θ で表せ。

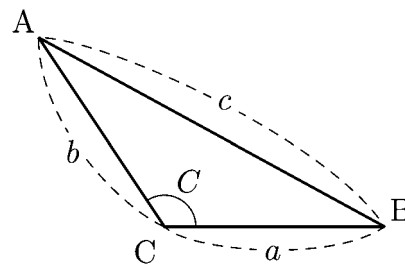
$A(\quad, \quad)$

(3) 平面の距離の公式 (前ページ) より A, B 間の距離の 2 乗を a, b, θ を用いて表し、できるだけ簡単にせよ。

$AB^2 =$

(4) 上記の結果を用いて、右図の三角形 ABC に対し辺 AB の長さの 2 乗 (c^2) を a, b と角度 C で表せ。

$c^2 =$

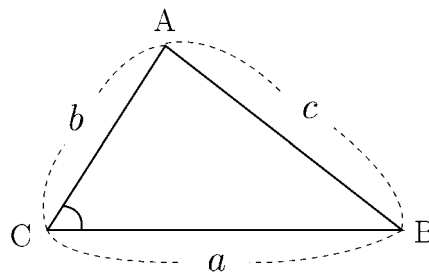


< 余弦定理 2 >

三角形 ABC に対し (前ページより)

$$(*) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

が成り立つ。これを余弦定理という。



問 1 (*) 式を参考にして a^2 を b, c と角度 A で表せ。 $a^2 =$

問 2 (*) 式を参考にして b^2 を a, c と角度 B で表せ。 $b^2 =$

例 $\triangle ABC$ で $a = 7, b = 4, C = 60^\circ$ のとき

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 7^2 + 4^2 - 2 \times 7 \times 4 \times \cos 60^\circ = 37$$

$$\text{より } \underline{c = \sqrt{37}}$$

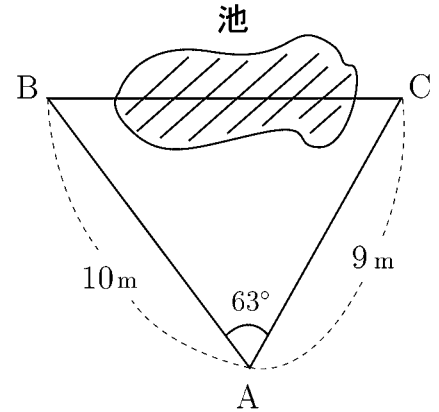
問 3 次の $\triangle ABC$ について, () 内の値を求めよ。

(1) $b = \sqrt{6}, c = \sqrt{2}, A = 30^\circ$ (a) (2) $a = \sqrt{2}, c = 3, B = 45^\circ$ (b)

(3) $a = \sqrt{3}, b = 1, C = 150^\circ$ (c) (4) $a = \sqrt{6}, c = \sqrt{3}, B = 135^\circ$ (b)

< 余弦定理 3 >

- 問 1** 右図のような3つの地点 A, B, C
がある。AB=10 m, AC=9 m, $\angle BAC=63^\circ$
のとき B, C 間の距離 BC を求めよ。
ただし $\cos 63^\circ = 0.45$ とする。



- 例 1** $\triangle ABC$ において余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
である。よって

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

と表される。

- 問 2** $\triangle ABC$ において, 次の値を辺の長さ a, b, c で表せ。

$$\cos A = \quad , \quad \cos B =$$

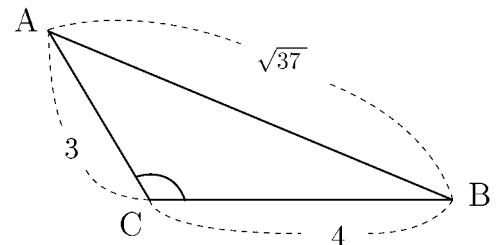
- 例 2** $\triangle ABC$ において

$$a = 4, b = 3, c = \sqrt{37}$$

のとき

$$\cos C = \frac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{37})^2}{2 \times 4 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

より角度 C は $\underline{120^\circ}$ である。



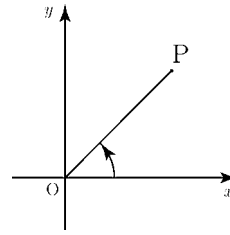
- 問 3** $\triangle ABC$ が次の各場合に () 内の角度を求めよ。

(1) $a = \sqrt{5}, b = 3, c = \sqrt{2}$ (A)

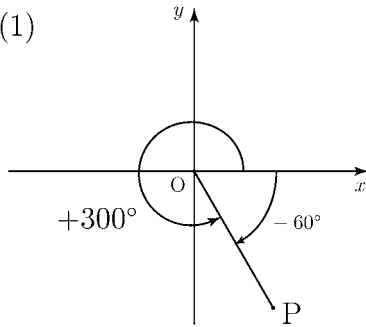
(2) $a = 3, b = \sqrt{39}, c = 2\sqrt{3}$ (B)

< 一般角 >

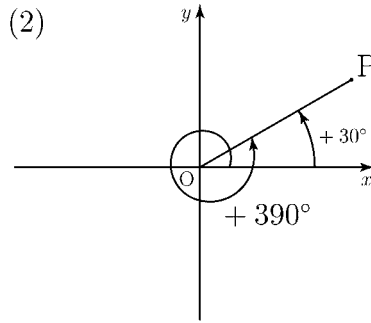
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を始線といい、 OP を動径という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を一般角という。



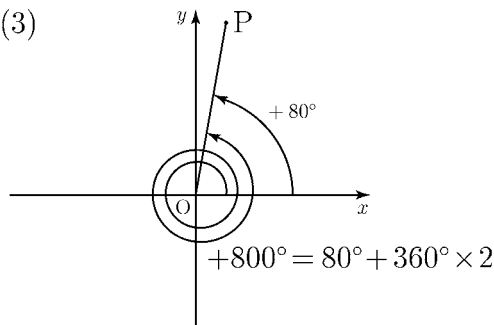
例 1 (1)



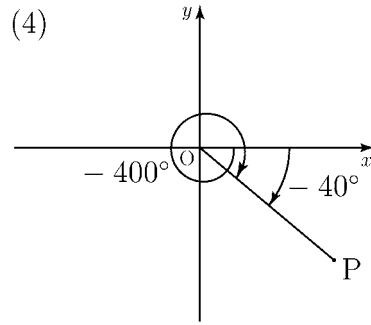
(2)



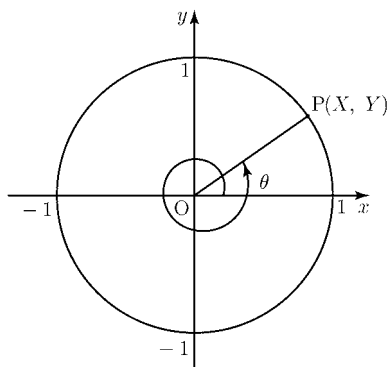
(3)



(4)



< 一般角の三角関数 >



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき、一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に、点 P の座標 (X, Y) で

$$\cos \theta = X, \quad \sin \theta = Y, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$$

$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan \theta$$

が成り立つ。

(注) $X = 0$ のとき $\tan \theta$ の値は定義されない。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 460^\circ$

(2) $\cos(-70^\circ)$

(3) $\tan 500^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ)$

(5) $\cos 650^\circ$

(6) $\tan 860^\circ$

< 一般角の三角関数 >

問 1 17 ページおよび前ページを参考にして、次の値を $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\tan \theta$ で表せ。

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \qquad \sin(\theta + 360^\circ) = \qquad \tan(\theta + 360^\circ) =$$

$$\cos(\theta - 360^\circ) = \qquad \sin(\theta - 360^\circ) = \qquad \tan(\theta - 360^\circ) =$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \qquad \sin(180^\circ - \theta) = \qquad \tan(180^\circ - \theta) =$$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = \qquad \sin(\theta + 180^\circ) = \qquad \tan(\theta + 180^\circ) =$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \qquad \sin(360^\circ - \theta) = \qquad \tan(360^\circ - \theta) =$$

$$\cos(-\theta) = \qquad \sin(-\theta) = \qquad \tan(-\theta) =$$

例 1 $\cos 405^\circ = \cos(45^\circ + 360^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 540^\circ = \sin(180^\circ + 360^\circ) = \sin 180^\circ = 0$
 $\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

問 2 次の値を求めよ。

$$\sin 420^\circ = \qquad \cos 450^\circ = \qquad \tan 495^\circ =$$

$$\sin(-45^\circ) = \qquad \cos(-90^\circ) = \qquad \tan(-120^\circ) =$$

例 2 $\cos 400^\circ = \cos 40^\circ = 0.766$, $\sin 500^\circ = \sin 140^\circ = \sin 40^\circ = 0.6428$
 $\tan(-100^\circ) = -\tan 100^\circ = \tan 80^\circ = 5.6713$

問 3 三角関数表を見て、次の値を求めよ。

$$\sin 380^\circ = \qquad \cos 400^\circ = \qquad \tan 510^\circ =$$

$$\sin(-40^\circ) = \qquad \cos(-100^\circ) = \qquad \tan(-50^\circ) =$$

< 三角関数の値 >

問1 角度 θ が次の各場合の三角関数の値を求めて表に記入せよ。

角度 θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$													
$\cos \theta$													
$\tan \theta$	X								X				

角度 θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°
$\sin \theta$													
$\cos \theta$													
$\tan \theta$					X								X

問2 三角関数表をみて、次の値を求めよ。

$\sin(-50^\circ)$

$\cos(-40^\circ)$

$\tan(-20^\circ)$

$\sin 130^\circ$

$\cos 140^\circ$

$\tan 160^\circ$

$\sin 200^\circ$

$\cos 190^\circ$

$\tan 220^\circ$

$\sin 280^\circ$

$\cos 290^\circ$

$\tan 310^\circ$

$\sin 370^\circ$

$\cos 380^\circ$

$\tan 410^\circ$

< 三角方程式 1 >

14 ページで学んだように、単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると、

$$\sin \theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}$$

である (図1)。

例題1 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き、 y 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 ($y = \frac{1}{2}$) を引く。その直線と単位円との交点を P, Q とする。 x 軸からの角度は図2のようになる。

(答) $\theta = 30^\circ$ または $\theta = 150^\circ$

例題2 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 例題1と同様に単位円に直線 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き、単位円との交点を R, S とすると図3のようになる。

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = -135^\circ$

例題3 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

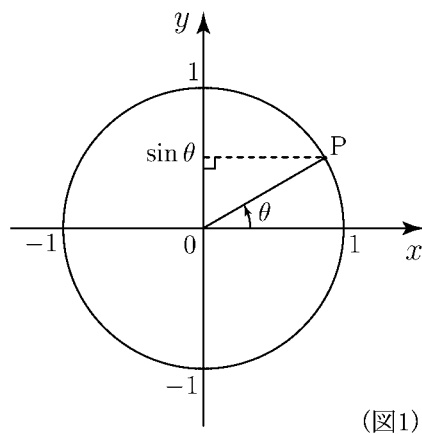
(解) 図4より (答) $\theta = 225^\circ$ または $\theta = 315^\circ$

問 次式を満たす角度 θ を () 内の範囲で求めよ。

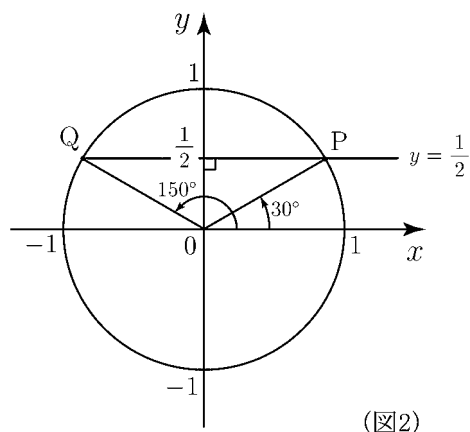
(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

(2) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

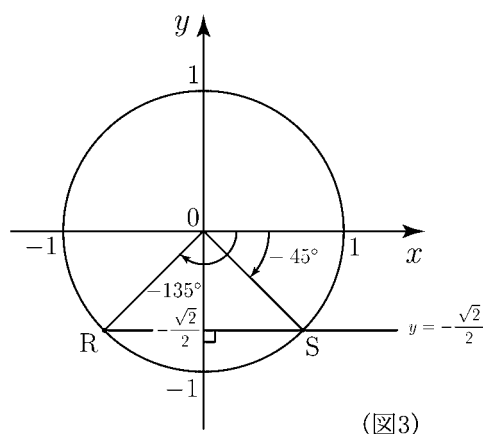
(3) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)



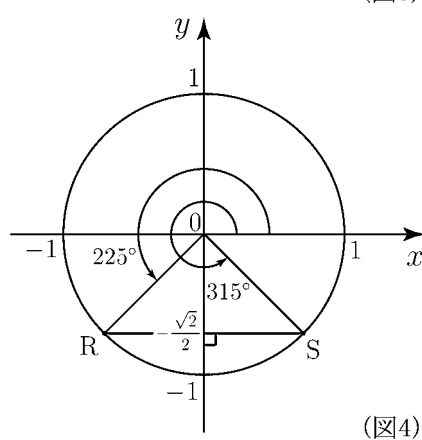
(図1)



(図2)



(図3)



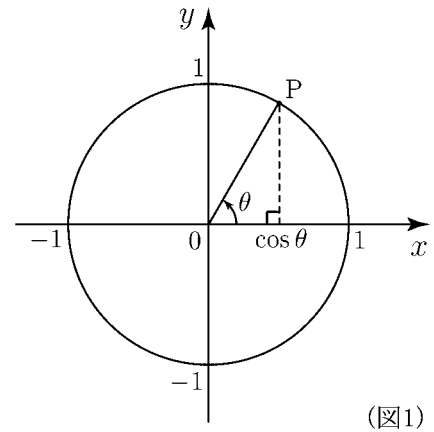
(図4)

< 三角方程式 2 >

14 ページで学んだように、単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると、

$$\cos \theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}$$

である (図1)。



(図1)

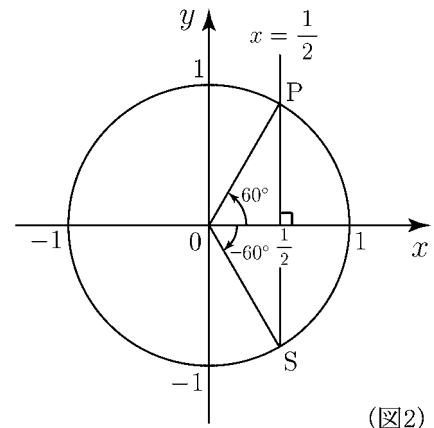
例題 1 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き、 x 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 ($x = \frac{1}{2}$) を引く。その直線と単位円との交点を P, S とする。 x 軸からの角度は図2のようになる。

(答) $\theta = 60^\circ$ または $\theta = -60^\circ$



(図2)

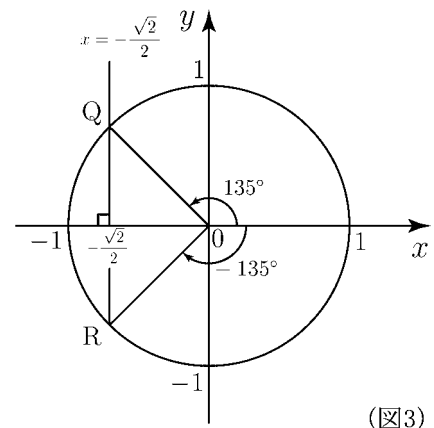
例題 2 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 単位円に直線 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き、単位円との交点を Q, R とすると図3のようになる。

(答) $\theta = 135^\circ$ または $\theta = -135^\circ$



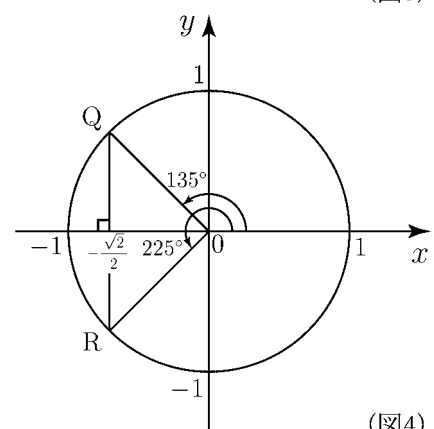
(図3)

例題 3 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 図4より (答) $\theta = 135^\circ$ または $\theta = 225^\circ$



(図4)

問 次式を満たす角度 θ を () 内の範囲で求めよ。

(1) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ($-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

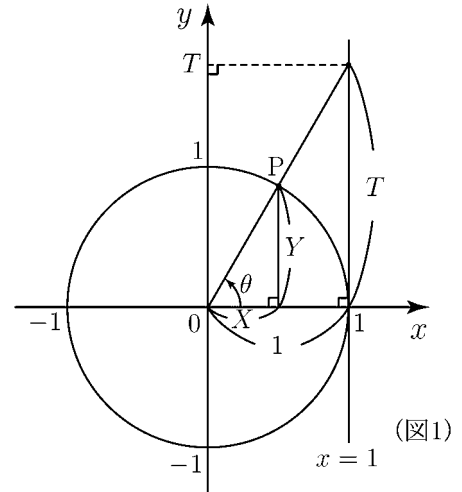
(3) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

< 三角方程式 3 >

単位円と角 θ を表す動径との交点を $P(X, Y)$ とすると

$$\tan \theta = \frac{Y}{X}$$

である。



問 1 図 1 の場合に

$$\tan \theta = T$$

であることを示せ。

(証明)

例題 1 $-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ の範囲で

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

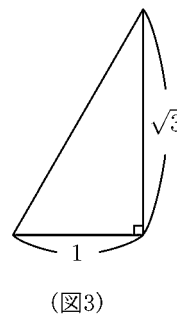
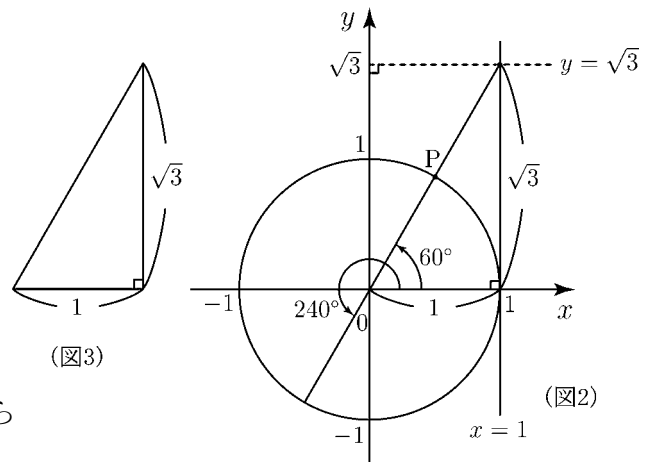
を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き、 y 軸上に $\sqrt{3}$ をとる。 $y = \sqrt{3}$ と $x = 1$ との交点から原点に直線を引くと図 3 の

直角三角形ができる。この直角三角形は斜辺の長さが 2 になるので内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形になる。図 2 より

(答) $\theta = 60^\circ$ または $\theta = 240^\circ$

(注) 17 ページより $\tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta$ であるから $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ である。



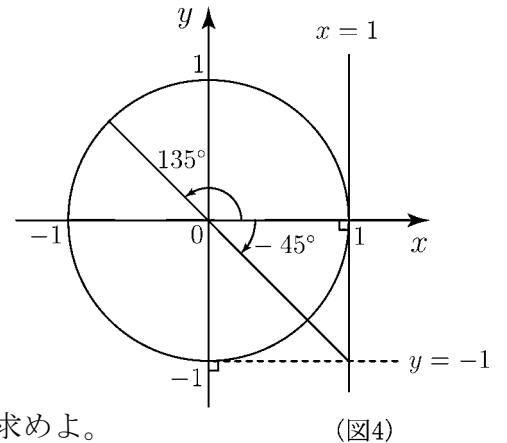
例題 2 $-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ の範囲で

$$\tan \theta = -1$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 図 4 のように直線 $x = 1$ と $y = -1$ の交点から原点に直線を引く。図 4 より

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = 135^\circ$



問 2 $-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ の範囲で次式を満たす角度 θ を求めよ。

- (1) $\tan \theta = 1$, (2) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, (3) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

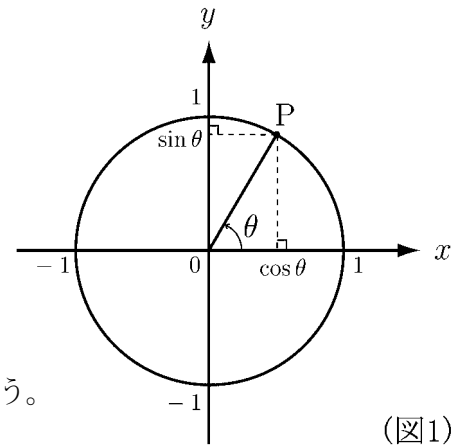
< 三角関数のグラフ 1 >

単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると

$$\sin \theta = \text{点 } P \text{ の } y \text{ 座標}$$

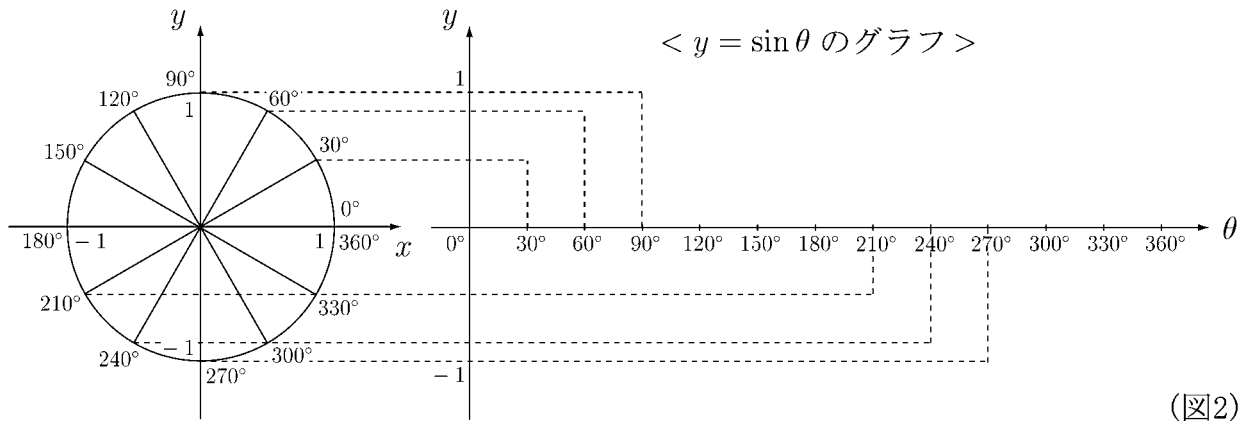
$$\cos \theta = \text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標}$$

である。この性質を用いて $\sin \theta$ と $\cos \theta$ のグラフを描こう。



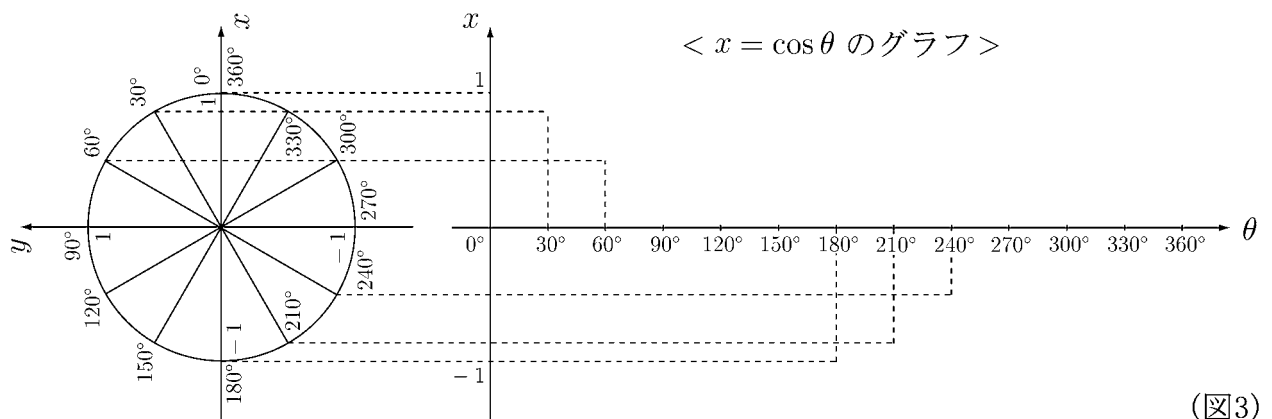
(図1)

問1 図2に 30° , 60° , 90° , 210° , 240° , 270° のときの $y = \sin \theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $y = \sin \theta$ の通る点を点線で作図し, 0° から 360° までの範囲で $y = \sin \theta$ のグラフを(図2に)実線で描け。



(図2)

問2 図3に 0° , 30° , 60° , 180° , 210° , 240° のときの $x = \cos \theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $x = \cos \theta$ の通る点を点線で作図し, 0° から 360° までの範囲で $x = \cos \theta$ のグラフを(図3に)実線で描け。



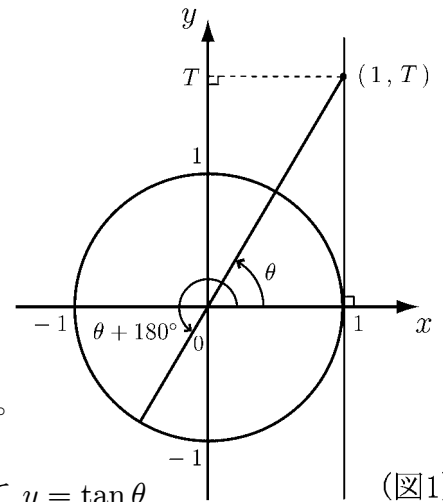
(図3)

< 三角関数のグラフ 2 >

図1のように角 θ を表す動径と直線 $x = 1$ との交点の座標を $(1, T)$ とすると, 32 ページより

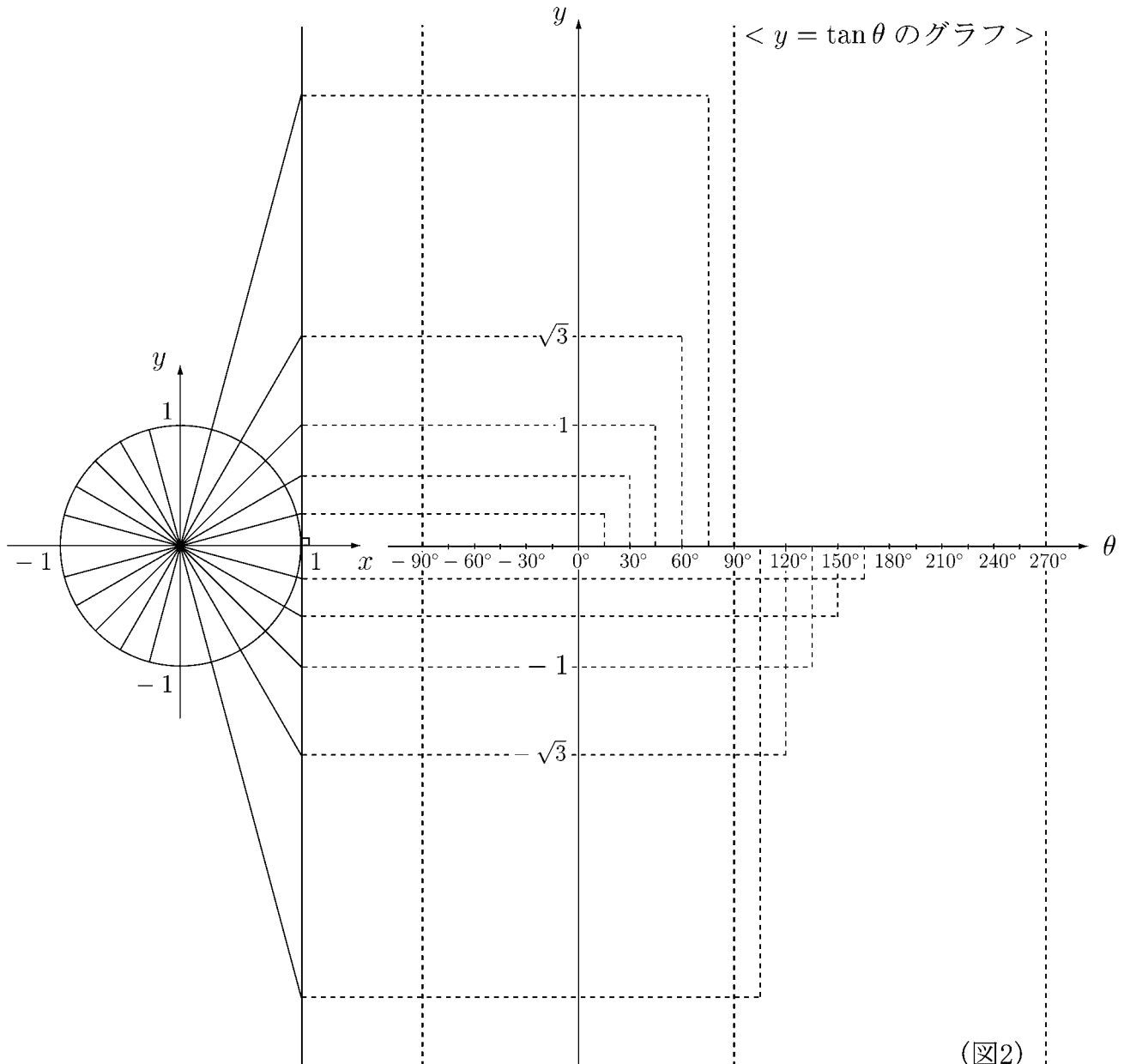
$$T = \tan \theta = \tan(\theta + 180^\circ)$$

となる。この性質を用いて $y = \tan \theta$ のグラフを描こう。



(図1)

問 図2は 15° おきに角度を目もり, その一部について $y = \tan \theta$ の通る点を点線で作図してある。他の角度についても $y = \tan \theta$ の通る点を点線で作図し, グラフを実線で描け。



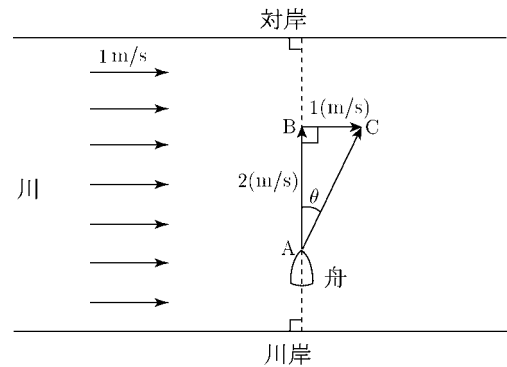
(図2)

(注) $\theta = \pm 90^\circ$, $\theta = 270^\circ$ のときは $\tan \theta$ の値は定義されない。

< 速度の合成 >

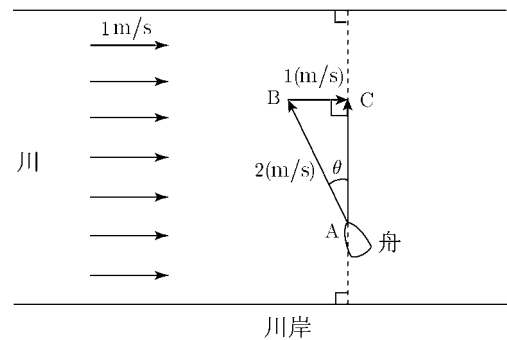
例 1 静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まですすむはずであるが、川の流れのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを $2(=$ 舟の速さ $)$ 、BC の長さを $1(=$ 川の流速 $)$ とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より $AC = \sqrt{5}$ となるから、

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \approx 26.6^\circ$$

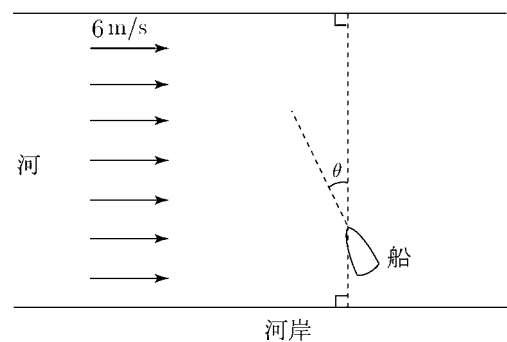


例 2 例 1 と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。例 1 と同様に、舟の速度を矢線 AB (長さ 2)、川のを速度を矢線 BC (長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$

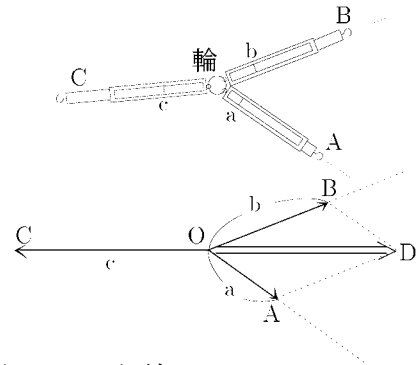


問 静水中を 10m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 6m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき三角関数表から角度 θ の近似値を求めよ。



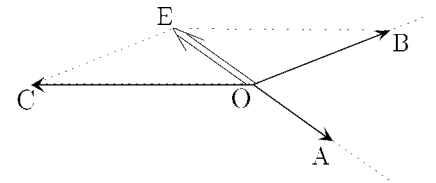
< 力の合成 >

例 机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ矢線をひき, その矢線の先を A, B, C とする。

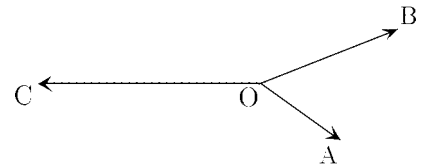


次に OA, OB を 2 辺とする平行四辺形 OADB を作り, 対角線 OD をひく。すると, 矢線 OD と矢線 OC は方向が同じ (矢印の向きは逆) で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を矢線 (\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC}) で表すと, \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} との合力が \overrightarrow{OD} であり, \overrightarrow{OC} とつりあっていることがわかる。

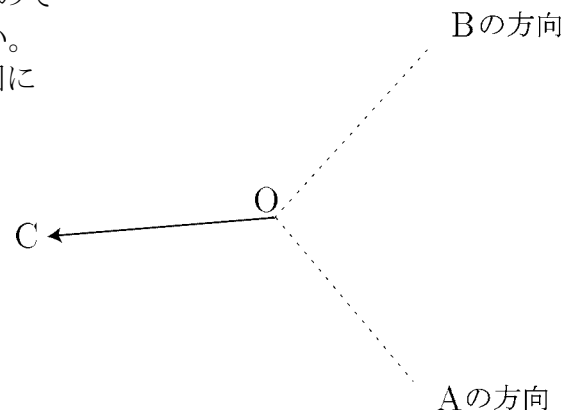
同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 矢線 OE と OA は方向が同じ (向きが逆) で, 長さも等しい。つまり \overrightarrow{OB} と \overrightarrow{OC} の合力が \overrightarrow{OE} であり, \overrightarrow{OA} とつりあっている。



問1 右図に \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OC} との合力 \overrightarrow{OF} を作図せよ。



問2 ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の矢線の長さがわからない。 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} がつりあうように, 右図に矢線 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を作図せよ。



< 平面のベクトル 1 >

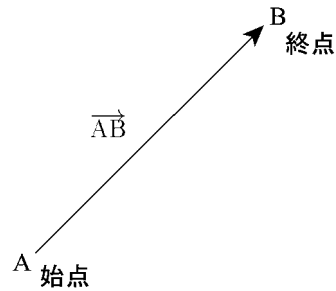
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を矢印（矢線）で示し、その大きさは矢線の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変わらないときは、一本の矢線で流れの速度を表すことができる。このように、矢線で向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これを**ベクトル (vector)** という。

点 A から点 B までの矢線 AB で表されるベクトルを

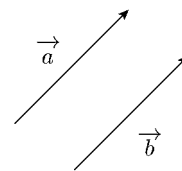
$$\overrightarrow{AB}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル \overrightarrow{AB} の**始点**といい、B を**終点**という。ベクトルは \vec{a} のような記号で表したり、太字で \mathbf{a} と表したりする。



ベクトル \vec{a} , \vec{b} について、向きが同じで、大きさが等しいとき、 \vec{a} と \vec{b} は**等しい**といい、

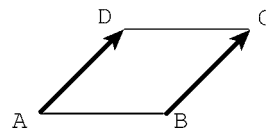
$$\vec{a} = \vec{b}$$



と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

である。

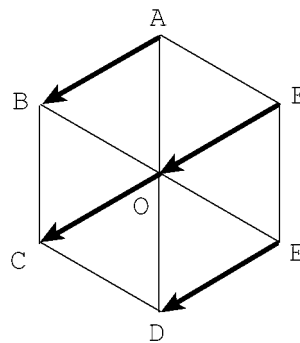


例 右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$$

である。

問 右の正六角形で、 \overrightarrow{AO} に等しいベクトルを 3 つ書け。



< 平面のベクトル 2 >

36 ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、37 ページでやった 2 つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が与えられているとする。

\vec{a} と \vec{b} の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A , B とし、 OA , OB を 2 辺とする平行四辺形 $OACB$ を作るとベクトル \vec{OC} が決まる。これを \vec{a} と \vec{b} との和といい、

$$\vec{a} + \vec{b}$$

と書く。 \vec{a} と \vec{b} が 2 つの力であれば $\vec{a} + \vec{b}$ はその合力を表す。又、 \vec{a} , \vec{b} が 2 つの速度であれば、 $\vec{a} + \vec{b}$ はその合成速度を表す。

ここで、 $\vec{b} = \vec{OB} = \vec{AC}$ であるから、

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

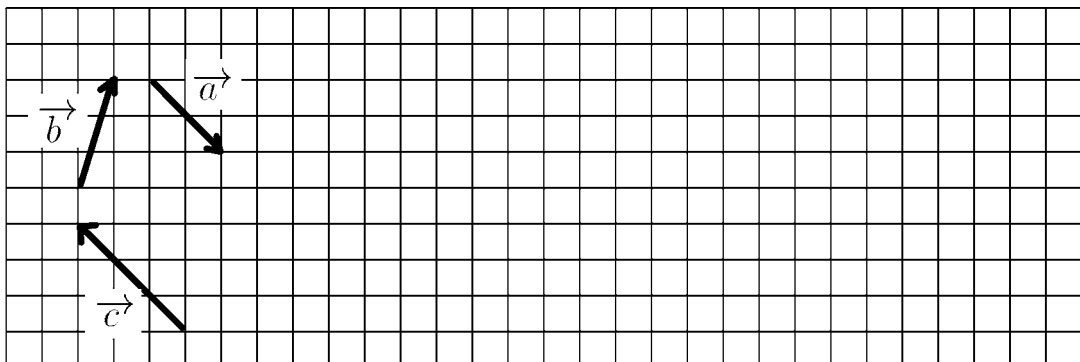
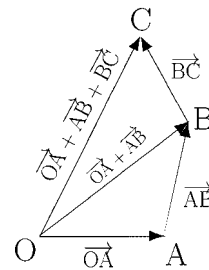
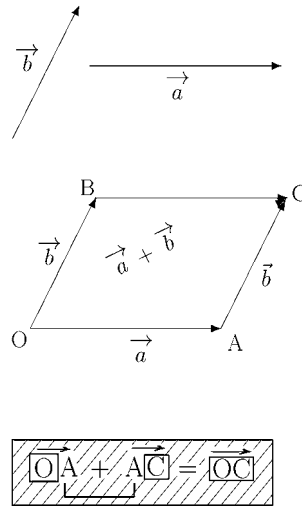
が成り立つ。 O から出発して A に行くベクトルと、 A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最初の到着点 C に行くベクトルになる。

同様にして、4 点 O , A , B , C に対し

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

が成り立つ。

問 ベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} が下図の場合に、 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ を作図せよ。

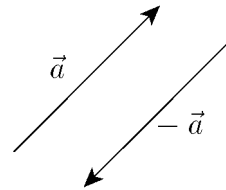


< 平面のベクトル 3 >

\vec{AB} は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。
これを**零ベクトル**といい、 $\vec{0}$ で表す。つまり

$$\vec{AA} = \vec{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル \vec{a} に対して、大きさが同じで、
向きが反対であるベクトルを、 \vec{a} の
逆ベクトルといい、 $-\vec{a}$ で表す。
 $\vec{a} = \vec{OA}$ のとき、 $-\vec{a} = \vec{AO}$ である。



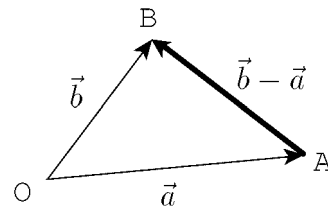
$$\vec{OA} = -\vec{AO}$$

2つのベクトル $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ に対して、

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

だから \vec{AB} を \vec{b} と \vec{a} の**差**といい、

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$



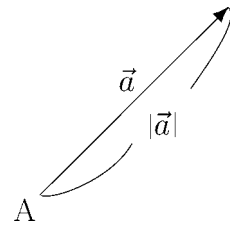
と表す。 \vec{AB} をベクトルの差として $\vec{OB} - \vec{OA}$ と表す場合には
「終点 (B) - 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問 \vec{a} , \vec{b} が次のように与えられている場合に $\vec{b} - \vec{a}$ を図示せよ。

(1)	(2)	(3)

< 平面のベクトル 4 >

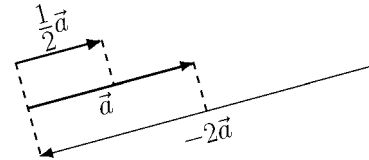
ベクトル \vec{a} の大きさを $|\vec{a}|$ で表す。
 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のときは、 $|\vec{a}|$ は線分 AB の長さである。



大きさが1であるベクトルを **単位ベクトル** という。

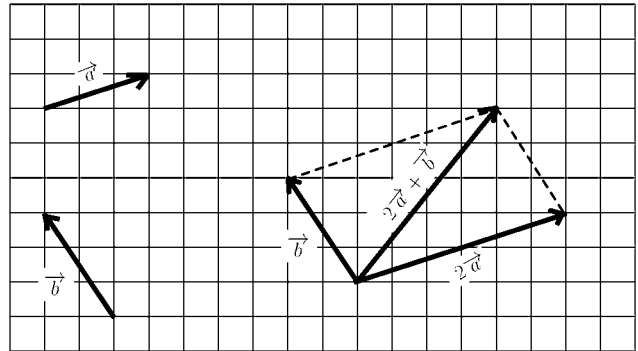
$\vec{0}$ でないベクトル \vec{a} と正数 k に対して

- (1) $k\vec{a}$ は、 \vec{a} と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル
- (2) $-k\vec{a}$ は、 \vec{a} と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル



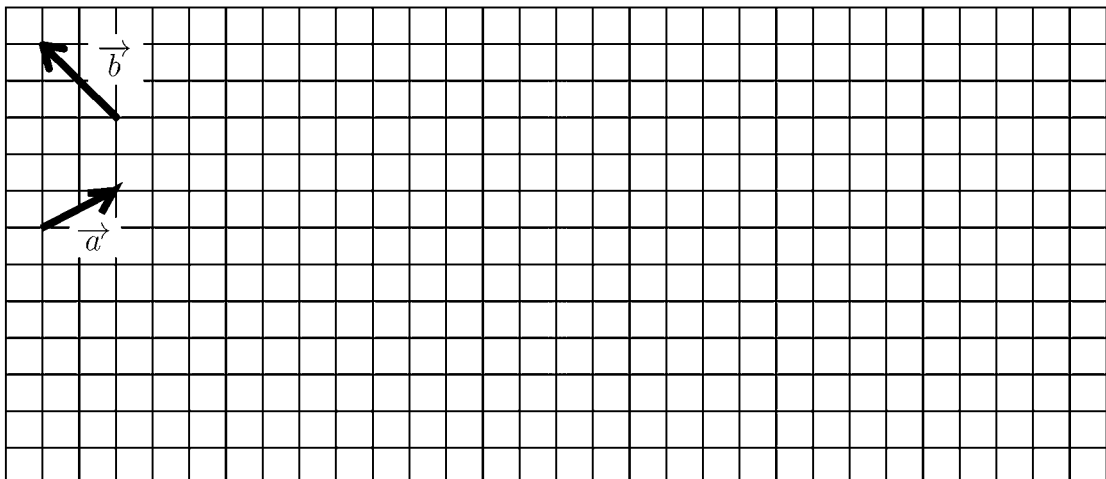
と定める。このようなベクトルを \vec{a} の**実数倍** という。

例 ベクトル \vec{a} , \vec{b} が右図の様に与えられているとき $2\vec{a} + \vec{b}$ を図示すると、右のようになる。



問 ベクトル \vec{a} , \vec{b} が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

- (1) $-3\vec{a}$, (2) $\frac{5}{2}\vec{b}$, (3) $3\vec{a} - 2\vec{b}$, (4) $2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$



< 平面ベクトルの成分 1 >

O を原点とする座標平面上の 2 点 $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ に対して,

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{OJ}$$

を **基本ベクトル** という。

平面上の任意の点 $A(a_1, a_2)$ に対し, 2 点 $B(a_1, 0)$, $C(0, a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

となる。ここで $\overrightarrow{OB} = a_1 \vec{i}$, $\overrightarrow{OC} = a_2 \vec{j}$ だから, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ は

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$$

と表す事が出来る。この a_1, a_2 を \vec{a} の **成分** といい, a_1 を x 成分, a_2 を y 成分という。このとき \vec{a} を成分を使って

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

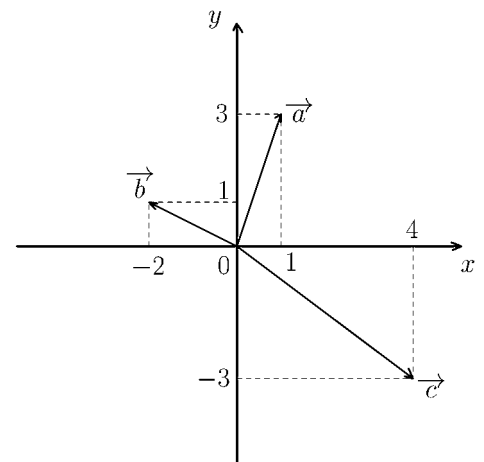
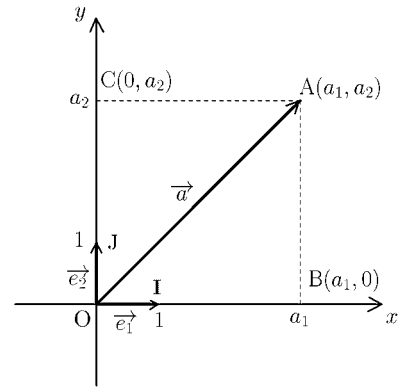
と表す。

例 1 $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{0} = (0, 0)$ …… 零ベクトル

例 2 2 点 $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ に対し, \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を成分で表すと

$$\overrightarrow{OA} = (2, 3), \quad \overrightarrow{OB} = (4, -1)$$

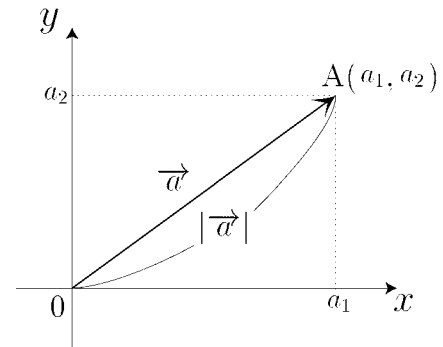
問 右図のベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を成分で表せ。



< 平面ベクトルの成分 2 >

右図のように $\vec{a} = (a_1, a_2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ は、線分 OA の長さと同じから

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



例題 2点 $A(3, 1), B(4, 5)$ が与えられたとき、 \vec{AB} の成分と大きさを求めよ。

(解) ベクトル \vec{AB} を右図のように

x 軸方向に -3

y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル \vec{OP} になるから

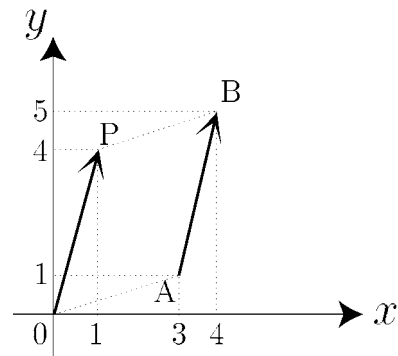
$$\vec{AB} = \vec{OP} = (4 - 3, 5 - 1) = (1, 4)$$

より

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

(別解)

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \quad \dots (\text{終点} - \text{始点}) \\ &= (4, 5) - (3, 1) = (1, 4) \end{aligned}$$



問 次の2点 A, B に対し、 \vec{AB} を成分で表し、その大きさを求めよ。

(1) $A(5, 2), B(7, 3)$

(2) $A(4, -1), B(3, 1)$

$$\vec{AB} =$$

$$\vec{AB} =$$

$$|\vec{AB}| =$$

$$|\vec{AB}| =$$

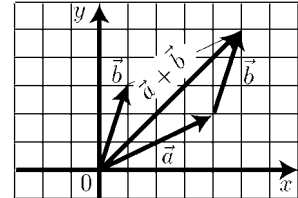
< 平面ベクトルの成分 3 >

例題 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (1, 3)$ のとき, 次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$, (2) $\vec{a} - \vec{b}$, (3) $\frac{1}{2}\vec{a}$, (4) $2\vec{b}$

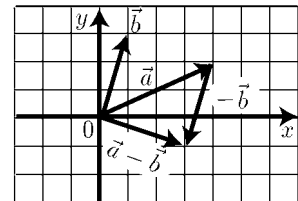
(解) (1) 右図より

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 2) + (1, 3) = (5, 5)$$



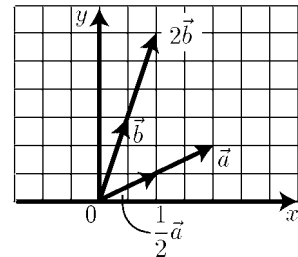
(2) 右図より

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= (4, 2) + (-1, -3) = (3, -1) \end{aligned}$$



(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(4, 2) = (2, 1)$$



(4) 右図より

$$2\vec{b} = 2(1, 3) = (2, 6)$$

問1 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき, 次のベクトルの成分を求めよ。
(k は定数)

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) =$

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) =$

(3) $k\vec{a} = k(a_1, a_2) =$

問2 $\vec{a} = (2, 6)$, $\vec{b} = (-1, -3)$ のとき, 次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\frac{1}{2}\vec{a} =$ (2) $-\vec{b} =$

(3) $\vec{a} - \vec{b} =$ (4) $\vec{a} + 2\vec{b} =$

< ベクトルの内積 1 >

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} に対し,
 \vec{a} と \vec{b} の始点を同じ点 O にもっていき,
 終点をそれぞれ A, B とするとき,
 $\angle AOB$ の大きさ θ は, \vec{a}, \vec{b} によってきま
 る。この角 θ をベクトル \vec{a}, \vec{b} の
 つくる角という。

ベクトル \vec{a}, \vec{b} のつくる角が θ のとき

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

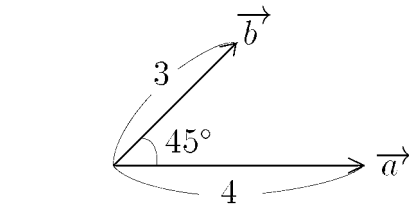
を, ベクトル \vec{a}, \vec{b} の**内積**といい, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta} \quad (\text{内積の定義})$$

例 (1) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ で

\vec{a}, \vec{b} のつくる角が 45° のとき

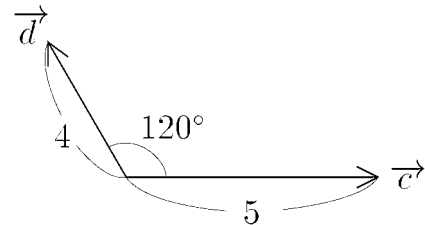
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \times 3 \times \cos 45^\circ \\ &= 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$



(2) $|\vec{c}| = 5, |\vec{d}| = 4$ で

\vec{c}, \vec{d} のつくる角が 120° のとき

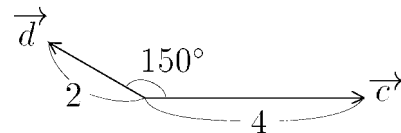
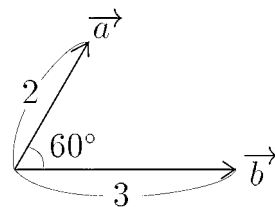
$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= 5 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -10 \end{aligned}$$



問 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が右図の場合に
 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{c} \cdot \vec{d}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} =$$



< ベクトルの内積 2 >

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で、 $\vec{a} = \vec{b}$ のときは、 $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$ だから

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ つまり, } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

又、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ のなす角が 90° のとき、 \vec{a} と \vec{b} は **垂直** であるといい、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く。 $\cos 90^\circ = 0$ であるから、次が成り立つ。

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ のとき}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

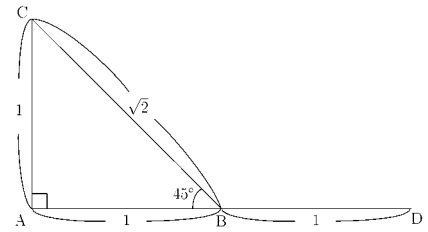
(ベクトルの垂直と内積)

例 右図の直角二等辺三角形において

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 1$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BD} \cdot \vec{BC} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos 135^\circ = -1$$



問 右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。

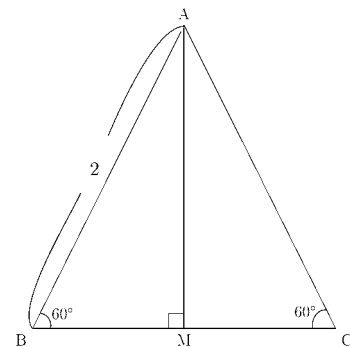
(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

(2) $\vec{AB} \cdot \vec{AM} =$

(3) $\vec{BC} \cdot \vec{AM} =$

(4) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$

(5) $\vec{MB} \cdot \vec{MC} =$



< 内積の成分表示 1 >

座標平面上の2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ と
 原点 O に対し, 2点間の距離の公式
 より

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

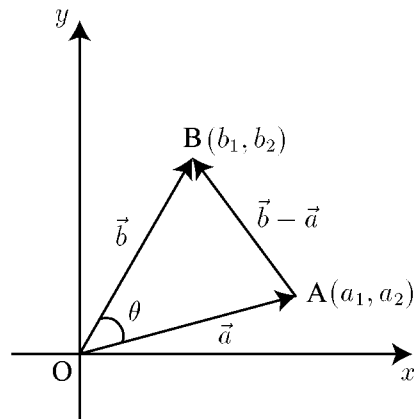
である。一方 $\angle AOB = \theta$ とすると,
 余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times \cos \theta$$

であるから

$$OA \times OB \times \cos \theta = \frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} \dots\dots\dots (*)$$

となる。



問1 線分 OA と OB の長さの2乗を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

$$OA^2 = \quad \quad \quad , \quad OB^2 = \quad \quad \quad$$

問2 (*) 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} =$$

問3 $\vec{a} = \vec{OA} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = \vec{OB} = (b_1, b_2)$ とすると, 内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta = OA \times OB \times \cos \theta$$

となる。問1の結果を使って, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

< 内積の成分表示 2 >

前ページの結果より

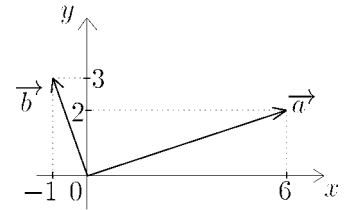
$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

である。

例 1 $\vec{a} = (6, 2), \vec{b} = (-1, 3)$ のとき 内積 \vec{a}, \vec{b} は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \times (-1) + 2 \times 3 = 0$$

であるから、 \vec{a} は \vec{b} は垂直 ($\vec{a} \perp \vec{b}$) である。



問 1 \vec{a}, \vec{b} が以下の場合に内積を求め、 \vec{a} と \vec{b} が垂直である場合は $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書け。

(1) $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (4, 5), \vec{a} \cdot \vec{b} =$

(2) $\vec{a} = (4, 6), \vec{b} = (-3, 2), \vec{a} \cdot \vec{b} =$

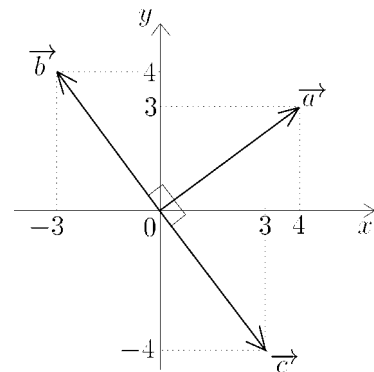
(3) $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (0, 1), \vec{a} \cdot \vec{b} =$

例 2 $\vec{a} = (4, 3), \vec{b} = (-3, 4), \vec{c} = (3, -4)$
のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

より $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}$ である。



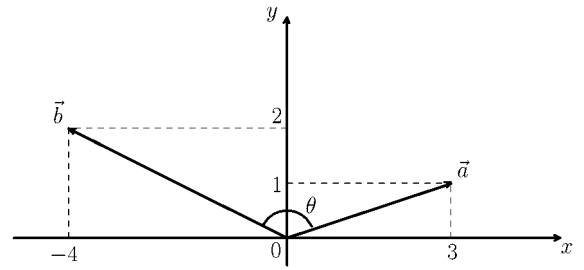
問 2 $\vec{a} = (-1, 1)$ と垂直なベクトルの例を 2 つあげよ。

< 平面ベクトルのなす角 >

例 $\vec{a} = (3, 1)$ と $\vec{b} = (-4, 2)$ のなす角 θ を求めたい。

内積の定義から

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$$



より

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ($= 135^\circ$) である。

問1 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のなす角 θ を求めたい。

上の例にならって, $\cos \theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$\cos \theta =$

問2 以下の場合に, \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を求めよ。

(1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$

(2) $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (3, 1)$

(3) $\vec{a} = (\sqrt{3}, 3)$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$

< まとめの問題 >

問 1 z は x に比例し, y の 2 乗に反比例している。比例定数を k として,
 z を x, y, k で表せ。

問 2 2 次関数 $y = -5x^2 + 20x + 25$ に対し
(1) y の最大値を求めよ。
(2) $y \geq 0$ となる x の範囲を求めよ。

問 3 $\triangle ABC$ が次の各場合に, () 内の値を求めよ。
(1) $a = \sqrt{6}$, $B = 45^\circ$, $C = 75^\circ$, (b)
(2) $a = 5$, $b = 4$, $C = 120^\circ$, (c)
(3) $a = \sqrt{7}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, (A)

問 4 次の三角方程式をみたす角度 θ を () 内の範囲で求めよ。
(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ($-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$)
(2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)
(3) $\tan \theta = \sqrt{3}$ ($-90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$)

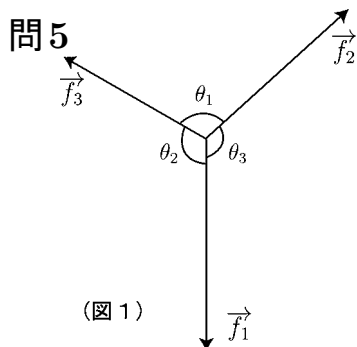


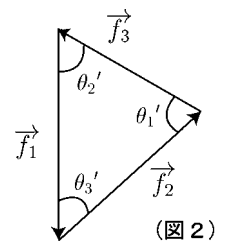
図 1 のように 1 点に力 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ が働いてつり合っているとき

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0}$$

である。図 1 の $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に対し

$$\frac{|\vec{f}_1|}{\sin \theta_1} = \frac{|\vec{f}_2|}{\sin \theta_2} = \frac{|\vec{f}_3|}{\sin \theta_3}$$

が成り立つことを示せ。(ヒント... 図 2)



問 6 座標平面の 2 点 $A(3, 1)$, $B(-2, 1)$ に対し, 次の各問に答えよ。
(1) \vec{AB} の成分と大きさを求めよ。

$$\vec{AB} = \quad, \quad |\vec{AB}| =$$

(2) 原点 $O(0, 0)$ と 2 点 A, B に対し $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ となる点 C の座標を求めよ。

$$C(\quad, \quad)$$

(3) \vec{OA} と \vec{OB} の大きさを求めよ。

$$|\vec{OA}| = \quad, \quad |\vec{OB}| =$$

(4) \vec{OA} と \vec{OB} の内積を求めよ。

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$$

(5) \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 θ を求めよ。