高知工科大学
基礎数学ワークブック

(2003年度版)

入門編

$No.\ \mathbf{1}$

内容

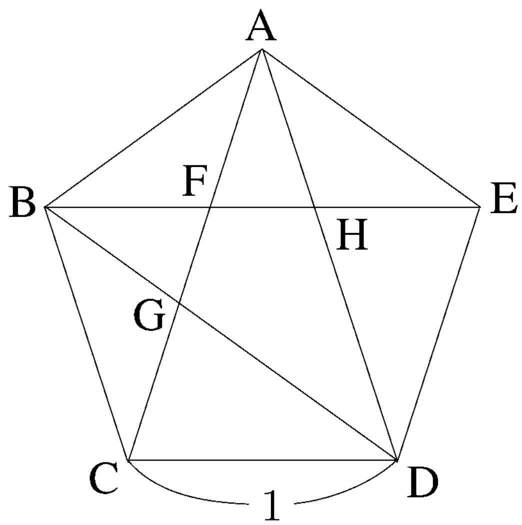
◎ 文字式

◎ 1次方程式

◎ 整式

◎ 2次方程式

◎ 1次関数



井上 昌昭 著

< 割合 >

例 1 「5m は 10m のいくらに当たるか?」という問題に対する答えは「5m は 10m の $\frac{1}{2}$ に当たる。」となる。$\frac{1}{2}$ は $\frac{5}{10}$ を約分したものである。

この例のように、割合とは

$$\boxed{\text{比べる量} \div \text{もとになる量} = \text{割合}}$$

である。割合は分数または小数で表される。日常では割合を百分率や歩合で表したりする。

割合(分数)	割合(小数)	歩合	百分率(%)
1	1	10 割 (わり)	100%
$\frac{1}{10}$	0.1	1 割 (わり)	10%
$\frac{1}{100}$	0.01	1 分 (ぶ)	1%
$\frac{1}{1000}$	0.001	1 厘 (りん)	0.1%

例 2 プロ野球選手の打率が 3 割 2 分 1 厘とは $\frac{321}{1000}$ のこと、つまり 1000 回に 321 回ヒットがでることを意味する。百分率で表すと $\frac{321}{1000} = \frac{32.1}{100} = 32.1\%$ である。

問 1 次の割合を歩合と百分率の両方で表せ。

(1) $\frac{73}{100}$　　(2) 0.425

例 3 割合と同様に 2 つの量の大きさを比べるのに比がある。2 つの量の割合が $\frac{3}{4}$ のとき比では 3 : 4 と書き 3 対 4 と読む。

すなわち

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

例 4 体重 40kg の人と体重 60kg の人の体重の比は

$$40 : 60 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}(= 2 : 3)$$

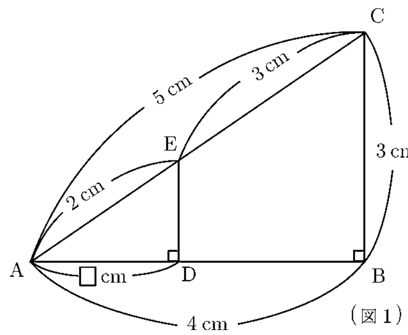
である。

問 2 次の比を (できるだけ簡単な) 分数になおせ。

(1) 5 : 6　(2) 12 : 18　(3) 18 : 45　(4) 1.5 : 2.5　(5) 0.72 : 1.44

＜比と比例配分＞

例１　(比)



（図１）

右図において三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。この場合、対応する辺の比はすべて等しい。つまり

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

となる。今は AE : AC = 2 : 5 なので「三角形 ADE と三角形 ABC の相似比は 2 : 5 である」という。AD の長さを求めたい。AD の長さを□ cm とすると、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AB}$$

より

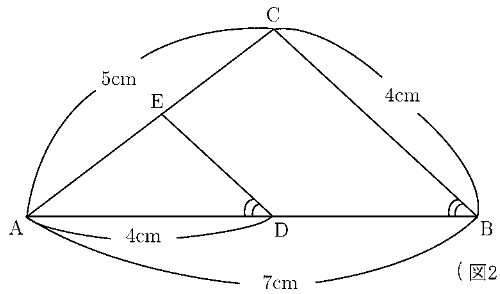
$$2 : 5 = \square : 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{\square}{4}$$

であるから両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = \square \quad \Rightarrow \quad \underline{(\text{答})\ \square = \frac{8}{5} = 1.6\ \ (\mathrm{cm})}$$

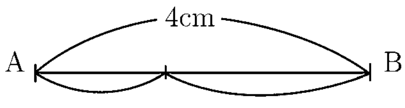
問１　図 1 で DE の長さを求めよ。

問２　図 2 で三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。DE の長さと AE の長さを求めよ。(答は仮分数でよい)



（図2）

例２　(比例配分)



(図3)

「長さ 4cm の棒を<u>2 : 3 に分ける</u>。短い方の棒の長さを求めよ。」という問題を考える。図 3 をよく見ると、図 1 の□を求める問題と同じであり、4cm を 2 : 5 の比にするので

$$\underline{(\text{答})\ \ 4 \times \frac{2}{5} = 1.6\ \ (\mathrm{cm})}$$

(注)　例 2 のような比例配分の問題は比の問題と似てはいるが、**解き方は全くちがう。**

$$「2 : 3 \text{に分ける}」= \begin{cases} \text{小さい方} \ \Rightarrow \ \text{全体の}\dfrac{2}{2+3} \\ \\ \text{大きい方} \ \Rightarrow \ \text{全体の}\dfrac{3}{2+3} \end{cases}$$

問３　6 万円を 3 : 5 に分ける。高い方の金額を求めよ。

＜ 累乗 ＞

同じ数をいくつか掛けるとき

7×7 は 7^2 と表し、7 の 2 乗

$5\times 5\times 5$ は 5^3 と表し、5 の 3 乗

という。このように同じ数をいくつか掛けたものを、その数の**累乗**という。5^3 の 3 のように右かたの小さい数を**指数**という。累乗の指数はかけた数の個数を示している。2 乗を**自乗**または**平方**、3 乗を**立方**ということもある。

例 1 (1) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^4$

(2) $2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^5$

(3) $(-5)\times(-5)\times 4\times 4\times 4=(-5)^2\times 4^3$

問 1 次の積を累乗の指数を使って表せ。

(1) $10\times 10\times 10$　(2) $7\times 7\times 7\times 7\times 7$　(3) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times 3\times 3\times 3\times 3$

例 2 (1) $(-3)^2=(-3)\times(-3)=9$

(2) $-3^2=-(3\times 3)=-9$

(3) $2\times 3^2=2\times 9=18$

(4) $(2\times 3)^2=6^2=36$

(5) $(-2)^4\times 3^2=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times 3\times 3=16\times 9=144$

(6) $\left(2^3\right)^2=8^2=64$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $(-1)^2$　(2) $(-1)^3$　(3) $(-1)^4$　(4) $(-1)^5$

(5) -2^4　(6) $(-2)^4$　(7) -5^2　(8) $(-3)\times 4^2$

(9) $\left(-3^4\right)\times(-10)^3$　(10) $(-2)^3\times\left(-5^2\right)$　(11) $\left(3^2\right)^3$　(12) $\left(2^2\right)^3\div(-4)^2$

< 素因数分解 >

6 は 3 で割り切れる。このとき 3 は 6 の**約数**または**因数**という。

6 は 2 でも割り切れ、もちろん 1 でも割り切れ、6 自身でも割り切れる。

従って

$$\boxed{6\text{ の約数は }1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 6}$$

の合計 4 個である。

問 1　次の約数を全て書け。

(1) 18 の約数　　(2) 24 の約数

7 の約数は 1 と 7 だけである。1 より大きい数でその数自身と 1 以外に約数をもたない数を**素数**という。2 から 20 までの素数は

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19

である。

問 2　20 から 50 までの素数を全て書け。

素数でない数は素数の積で表される。たとえば 12 は

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

となる。このような素数の積の形にすることを**素因数分解**という。

例 1　66 を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2×3 で割ると 11 になるから

$$\begin{array}{r|r} 2 & 66 \\ \hline 3 & 33 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

例 2　720 を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2 で 4 回割り切れ、3 で 2 回割り切れ、5 で 1 回割り切れるから

$$\begin{array}{r|r} 2 & 720 \\ \hline 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

問 3 次の数を素因数分解せよ。

(1) 68　　(2) 108　　(3) 140　　(4) 144

(5) 156　　(6) 196　　(7) 225　　(8) 324

(9) 512　　(10) 1024　　(11) 1296　　(12) 1536

＜数としての文字＞

わからない数を□と表すかわりに x や y などの文字を使って表す。わからない数を**未知数**といい、数の代わりに文字を使うことを**代数**という。

例 1 2ページの例1で□のかわりに x を使うと

$$2:5 \;=\; x:4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}=\frac{x}{4}$$

両辺を4倍すると

$$4\times\frac{2}{5}=x \quad \Rightarrow \quad \underline{(答)\ x=\frac{8}{5}=1.6}$$

(注) この例1の場合は文字 x は(結果的に)分数 $\frac{8}{5}$ または少数1.6を意味する。

例 2 図1において各直線上の数字の和が同じになるよう x, y, z, w を決めたい。

上段の和は

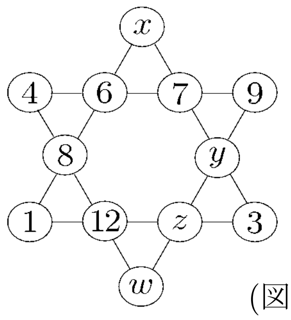
$$4+6+7+9=26$$

だから

$$x+6+8+1=26$$

より

$$x=26-(6+8+1)=11$$



(図1)

問 1 例2で y, z, w にあてはまる数を求めよ。

問 2 図2、図3で縦・横・ななめの数字の和が等しくなるよう、x, y, z, w を求めよ。

(1)

4	9	w
3	x	7
8	z	y

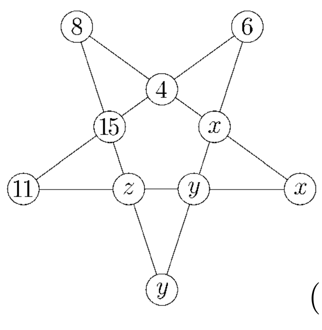
(図2)

(2)

16	2	3	13
5	11	10	z
9	x	y	12
4	14	15	w

(図3)

問 3 図4において各直線上の数字の和が等しくなるよう x, y, z を求めよ。



(図4)

< 省略記号の変更 >

1. 積の記号 × は省略する

文字式の場合、積の記号 × は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 × を省略する。例えば $x+x=2\times x$ を $2x$ と略記する。また $x\times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例 $x+x+x=3x$， $2\times x+5\times x=7x$， $a\times b\times c=abc$

$4\times x\times x-7\times x\times x=-3x^2$， $a\times(a+b)=a^2+ab$

$5\times x\times x\times x\times 7\times y\times y=35x^3y^2$， $a\times 2\times a\times 4\times a\times 5=40a^3$

(注) (1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で abc のように続けて書いてはならない。$a\times b\times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $a\ b\ c$ と書く。

問 1 次の式を積の記号 × を省略して簡単にせよ。

(1) $3\times x+x+x$　　(2) $2\times x\times x\times 3\times y\times y\times y\times y\times y$

(3) $a\times a\times(a-3\times b)$　　(4) $3\times x\times x\times(x\times 4-3\times y)$

2. プラス記号は省略しない (帯分数は使わない)

帯分数の $1\frac{1}{2}$ は本来は $1+\frac{1}{2}$ という意味であるから、間のプラスが省略されている。積の記号を省略するので、まぎらわしい から、今後は帯分数を使用してはならない。$1\frac{1}{2}$ を表したいときは、$1+\frac{1}{2}$ かまたは仮分数 $\frac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\frac{7}{2}$ を $3+\frac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問 2 次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\frac{1}{3}$　　(2) $3\frac{3}{4}$　　(3) $4\frac{1}{5}$　　(4) $6\frac{2}{3}$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 $\div$ 使わない。このようなきまりをまとめると

〈文字式のきまり〉	1. 文字式では積の記号×は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表す。 5. ＋, −より×, ÷を優先する。

となる。

(注) 1. 積の記号 $\times$ は通常は省略するが、$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では $a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4b^2c$ のように $\times$ を全て省略する。

2. アルファベットの積は a^4b^2c のようにアルファベットの順に a , b , c $\cdots$, x , y , z に従って左側から書いていく。

3. 積の記号 $\times$ のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように書く場合もあるが

$$2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6 \quad , \qquad 2.3 = 2 + 0.3$$

のように小数点と混同するので使用しない方が良い。

4. 数の計算と同様に文字の計算でも和 (+), 差 (−) より, 積 (×) や商 (÷) を優先する。たとえば

$$a \times b + c - d \div e \times f = (a \times b) + c - (d \div e \times f) = ab + c - \frac{df}{e}$$

例 1 $5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

(注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算とちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例 2 $(4a^2b) \div (6ab^2) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \dfrac{2a}{3b}$

(注) 最後の式 $\dfrac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times b \times 2 \times b$

(2) $5(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $6 \times x \times y \times y \div (x \times y \times 5 \times x \times 3)$

(4) $21ab^3 \div 28a^2b$

(5) $(5xy^2) \times (9x^3y^2) \div (15x^2y^3)$

(6) $(3ab^2c) \div (2a^2bc^3) \times (6abc^2)$

＜ 通分 ＞

例 1　$\dfrac{5}{6}$ と $\dfrac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の 6 と 4 の最小公倍数である 12 を共通分母にして

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数 12 を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分する方が簡単である。

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 4}{6\times 4}+\frac{7\times 6}{4\times 6}=\frac{20}{24}+\frac{42}{24}=\frac{62}{24}=\frac{31}{12}$$

例 2

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7\times 8}{6\times 8}+\frac{5\times 6}{8\times 6}=\frac{56+30}{48}=\frac{86}{48}=\frac{43}{24}$$

例 3

$$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{8\times 12}{9\times 12}-\frac{7\times 9}{12\times 9}=\frac{96-63}{9\times 12}=\frac{33}{9\times 12}=\frac{11}{3\times 12}=\frac{11}{36}$$

例 4

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=\frac{x\times 8}{6\times 8}-\frac{y\times 6}{8\times 6}=\frac{8x-6y}{48}=\frac{4x-3y}{24}$$

最後の式 $\dfrac{4x-3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例 5

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2\times y}{x\times y}+\frac{3\times x}{y\times x}=\frac{2y+3x}{xy}=\frac{3x+2y}{xy}$$

最後の式 $\dfrac{3x+2y}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例 6

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3\times(b\times c)}{a\times(b\times c)}+\frac{2\times(a\times c)}{b\times(a\times c)}+\frac{1\times(a\times b)}{c\times(a\times b)}=\frac{3bc+2ac+ab}{abc}=\frac{ab+2ac+3bc}{abc}$$

最後の式 $\dfrac{ab+2ac+3bc}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問　次式を通分せよ。

(1) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{7}{8}$　(2) $\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{12}$　(3) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}$

(4) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}$　(5) $\dfrac{a}{12}-\dfrac{b}{8}$　(6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}$

(7) $\dfrac{y}{x}-\dfrac{a}{3}$　(8) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$　(9) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

< 分数の簡略化 >

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい (約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

例

(1) $$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1\times 3}{\frac{2}{3}\times 3} = \frac{3}{2}$$

(2) $$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right)\times(6\times 4)} = \frac{7\times 4}{5\times 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

(3) $$\frac{1-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\times(6\times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 5)} = \frac{3\times 6}{7\times 5} = \frac{18}{35}$$

(4) $$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1\times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right)\times ab} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b}$$

最後の式 $\frac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

(5) $$\frac{\frac{z}{2}+\frac{w}{5}}{\frac{x}{4}-\frac{y}{6}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \frac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right)\times(12\times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right)\times(12\times 10)}$$

$$= \frac{(5z+2w)\times 12}{(3x-2y)\times 10} = \frac{(5z+2w)\times 6}{(3x-2y)\times 5} = \frac{30z+12w}{15x-10y}$$

最後の式 $\frac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{\frac{7}{5}}$ (2) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$ (3) $\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$

(4) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$ (5) $\frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$ (6) $\frac{1}{\frac{zw}{xy}}$

(7) $\frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{w}{z}}$ (8) $\frac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}$ (9) $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

< 分数と小数 1 >

よく間違えやすい問題の検算方法を示す。

例 1 (小数の積)　小数の積は位どり (小数点の位置) が難しい。

$0.3 \times 0.12 = 0.0036$

この検算は分数になおして確かめる。

(検算)　$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{12}{100} = \dfrac{36}{1000} = 0.036$

問 1 次の積を分数になおして計算し、答を小数で出せ。

(1) $0.2 \times 1.3 =$

(2) $0.4 \times 0.15 =$

(3) $0.03 \times 1.04 =$

例 2 (分数の商)　商の検算は出した答に割る数をかけて確かめる。

商　$\bigcirc \div \triangle = \square$　$\Rightarrow$　検算　$\square \times \triangle = \bigcirc$

(1) $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{5}{6} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{6}{5} = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10}$　$\Rightarrow$　検算　$\dfrac{9}{10} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{9 \times 5}{10 \times 6} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{5}{6} \times 4 \times 6}{\frac{3}{4} \times 4 \times 6} = \dfrac{5 \times 4}{3 \times 6} = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9}$

$\Rightarrow$　検算　$\dfrac{10}{9} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{10 \times 3}{9 \times 4} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

問 2 次の商を計算し、さらに検算せよ。

(1) $\dfrac{6}{5} \div \dfrac{3}{4}$　　　　検算

(2) $\dfrac{5}{12} \div \dfrac{8}{3}$　　　　検算

(3) $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}}$　　　　検算

(4) $\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}}$　　　　検算

< 分数と小数 2 >

例 (通分)　分数の通分は小数になおして検算する。

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times 5}{3\times 5}+\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

この計算を $\frac{3}{8}$ と間違える場合があるが、小数になおすと

$$\frac{1}{3}\fallingdotseq 0.33 \quad , \quad \frac{2}{5}=0.4 \quad , \quad \frac{11}{15}\fallingdotseq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8}=0.375$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}\fallingdotseq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8}=0.375$$

より $\frac{3}{8}$ が間違いであることがわかる。

問 1 次の分数を小数 (第 2 位まで) で表せ。

(1) $\frac{1}{2}=$ 　, $\frac{1}{3}=$ 　　(2) $\frac{3}{4}=$ 　, $\frac{5}{6}=$

$\frac{5}{6}=$ 　, $\frac{2}{5}=$ 　　$\frac{8}{10}=$ 　, $\frac{19}{12}=$

(3) $\frac{1}{6}=$ 　, $\frac{1}{2}=$ 　　(4) $\frac{11}{12}=$ 　, $\frac{1}{4}=$

$\frac{2}{8}=$ 　, $\frac{2}{3}=$ 　　$\frac{12}{16}=$ 　, $\frac{7}{6}=$

問 2 次の分数を通分せよ。(答が仮分数になっても帯分数になおさなくてよい。)

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$　(2) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$　(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$　(4) $\frac{11}{12}-\frac{5}{8}$

(5) $\frac{5}{4}+\frac{7}{6}$　(6) $\frac{7}{8}+\frac{11}{6}$　(7) $\frac{7}{5}-\frac{3}{10}$　(8) $\frac{13}{8}-\frac{7}{6}$

(9) $\frac{1.2}{2}+\frac{3.2}{3}$　(10) $\frac{5}{4}+\frac{4.5}{6}$　(11) $\frac{9.3}{8}-\frac{3.4}{4}$　(12) $\frac{7.6}{8}-\frac{3.7}{6}$

＜ 分数と小数 3 ＞

例 0.84 , $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ の大小関係を調べる。

分数を小数になおすと

$$\frac{6}{7} \fallingdotseq 0.857 \quad , \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \fallingdotseq 0.833$$

で　$0.833 < 0.84 < 0.857$　より

$$\underline{(\text{答})\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}}$$

(注) 上の答を逆向きに並べて

$$\underline{\frac{6}{7} > 0.84 > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$$

と答えても間違いではないが、通常は大きい数を右側に書く。

(別解) 共通因子 $100 \times 7 \times 2 \times 3$ で通分すると

$$0.84 = \frac{84}{100} = \frac{84 \times 42}{100 \times 42} = \frac{3528}{4200} \quad , \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \times 600}{7 \times 600} = \frac{3600}{4200}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5 \times 700}{6 \times 700} = \frac{3500}{4200}$$

$$\frac{3500}{4200} < \frac{3528}{4200} < \frac{3600}{4200} \quad \text{より} \quad (\text{答})\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}$$

問 次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{7}$, 0.2

(2) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{17}{9}$, 1.9

(3) $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$, $-\dfrac{9}{8}$, -1.13

(4) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{1}{3}$, 0.34

(5) $-\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{8}{9}$, $-\dfrac{7}{8}$

(6) $\dfrac{25}{8}-\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{12}{5}$

< 等式の変形 >

等号 $=$ で結ばれる文字式を**等式**という。等式は次の法則がある。

1. 両辺に同じ数を足しても等式は成立する。
2. 両辺から同じ数を引いても等式は成立する。
3. 両辺に同じ数を掛けても等式は成立する。
4. 両辺を (0 以外の) 同じ数で割っても等式は成立する。
5. 両辺を入れ替えても等式は成立する。

例 等式

$$2x = 4a + 3b - 5 \quad \cdots\cdots \ (1)$$

を考える。両辺を 2 で割ると

$$x = \frac{4a + 3b - 5}{2} \quad \cdots\cdots \ (2)$$

となる。(1) の両辺に $5 - 3b$ を足して 4 で割り、左辺と右辺を入れかえると

$$a = \frac{2x + 5 - 3b}{4} \quad \cdots\cdots \ (3)$$

となる。(1) の両辺に $5 - 4a$ を足して 3 で割り、左辺と右辺を入れかえると

$$b = \frac{2x + 5 - 4a}{3} \quad \cdots\cdots \ (4)$$

となる。(1) 式から (2) 式の形にすることを「x について解く」といい、(3) 式の形にすることを「a について解く」といい、(4) 式の形にすることを「b について解く」という。

問 次の等式を指定された形になおせ。

(1) $E = IR \quad , \ R =$

(2) $S = \pi r^2 \quad , \ r^2 =$

(3) $E = \dfrac{1}{2}(a + b)\,h \quad , \ h =$

(4) $P = \dfrac{TN}{9.74 \times 10^5} \quad , \ N =$

(5) $\sigma = \alpha E\,(t - \tau) \quad , \ \alpha =$

(6) $G = \dfrac{E}{2\,(1 + \mu)} \quad , \ E =$

(7) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \quad ,$

$a =$

(8) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \quad ,$

$R =$

＜ 単位の計算 1 ＞

＜ **長さ** ＞ 長さの単位を示す。

1km (キロメートル)	1m (メートル)	1dm (デシメートル)	1cm (センチメートル)	1mm (ミリメートル)	1μm (マイクロメートル)	1nm (ナノメートル)	1 Å (オングストローム)
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例 1 3.5km = 3500m , 2.4m = 240cm , 1m = 10^{10} Å

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 123m = $\boxed{}$ km (2) 7500mm = $\boxed{}$ m (3) 1mm = $\boxed{}$ Å

例 2 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか？」という問題では

740m = 0.74km だから

12.5km + 0.74km = <u>13.24km</u>

(注) 12.5km + 740m と書いてはならない。計算するときは必ず単位をそろえてする。

問 2 (1) 1050cm と 2.4m を足すと何 m になるか？

(2) 2km から 140m を引くと何 m になるか？

＜ **時間** ＞ 1h(時間) = 60min(分) , 1min(分) = 60s(秒) で計算する。

例 3 $1\text{h} = 60\text{min}$, $1\text{min} = \frac{1}{60}\text{h}$

$1\text{min} = 60\text{s}$, $1\text{s} = \frac{1}{60}\text{min}$

$4\text{h} = 4\times 60\text{min} = 240\text{min}$

$150\text{min} = 150\times\frac{1}{60}\text{h} = \frac{5}{2}\text{h} = 2.5\text{h}$

例 4 1.3 時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10}\times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より <u>(答) 78 分</u>

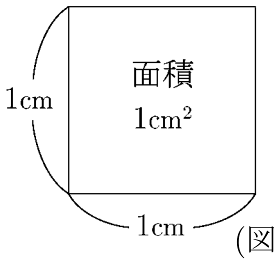
問 3 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 0.6min = $\boxed{}$ s (2) 36s = $\boxed{}$ h (3) 1h = $\boxed{}$ s

(4) 156s = $\boxed{}$ min (5) 2.3h = $\boxed{}$ min (6) 15min = $\boxed{}$ h

＜単位の計算 2＞

＜面積＞



(図 1)

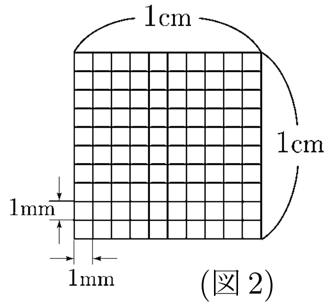
$1\mathrm{km}^2$ (1 平方キロメートル) = 1 辺が 1km の正方形の面積

$1\mathrm{m}^2$ (1 平方メートル) = 1 辺が 1m の正方形の面積

$1\mathrm{cm}^2$ (1 平方センチメートル) = 1 辺が 1cm の正方形の面積

$1\mathrm{mm}^2$ (1 平方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の正方形の面積

(注) $1\mathrm{km}^2=1\mathrm{km}\times 1\mathrm{km}$, $1\mathrm{m}^2=1\mathrm{m}\times 1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^2=1\mathrm{cm}\times 1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^2=1\mathrm{mm}\times 1\mathrm{mm}$ と考える。



(図 2)

例 1 図 1 は $1\mathrm{cm}^2$ を表す正方形であり、縦と横を 10 等分したものが図 2 である。図 2 の小正方形の 1 個の面積は $1\mathrm{mm}^2$ であり、それが 100 個あるから $1\mathrm{cm}^2 = 100\mathrm{mm}^2$ となる。これを式で表すと

$$1\mathrm{cm}^2 = 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} = 10\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} = 100\mathrm{mm}^2$$

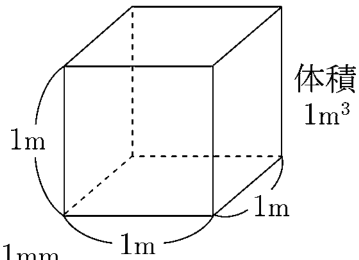
例 2 $7.5\mathrm{m}^2 = 7.5\mathrm{m} \times 1\mathrm{m} = 750\mathrm{cm} \times 100\mathrm{cm} = 75000\mathrm{cm}^2$

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\mathrm{m}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{cm}^2$　　(2) $1\mathrm{km}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^2$

(3) $0.5\mathrm{cm}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{mm}^2$　　(4) $600\mathrm{mm}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^2$

＜体積＞



(図 3)

$1\mathrm{m}^3$ (1 立方メートル) = 1 辺が 1m の立方体の体積 (図 3)

$1\mathrm{cm}^3$ (1 立方センチメートル) = 1 辺が 1cm の立方体の体積

$1\mathrm{mm}^3$ (1 立方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の立方体の体積

(注) $1\mathrm{m}^3=1\mathrm{m}\times 1\mathrm{m}\times 1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^3=1\mathrm{cm}\times 1\mathrm{cm}\times 1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^3=1\mathrm{mm}\times 1\mathrm{mm}\times 1\mathrm{mm}$ と考える。

例 3 $6.4\mathrm{cm}^3 = 6.4\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} = 64\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} = 6400\mathrm{mm}^3$

問 2 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\mathrm{cm}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{mm}^3$　　(2) $1\mathrm{m}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{cm}^3$

(3) $1\mathrm{m}^3 = \boxed{\qquad\qquad}\ \mathrm{mm}^3$　　(4) $0.001\mathrm{km}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^3$

＜単位の計算 3＞

＜速度＞ 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

1km/h（時速 1km）$= \dfrac{1\text{km}}{1\text{h}}$ =1 時間に 1km 移動する速度

1m/min（分速 1m）$= \dfrac{1\text{m}}{1\text{min}}$ =1 分間に 1m 移動する速度

1m/s（秒速 1m）$= \dfrac{1\text{m}}{1\text{s}}$ =1 秒間に 1m 移動する速度

1cm/s（秒速 1cm）$= \dfrac{1\text{cm}}{1\text{s}}$ =1 秒間に 1cm 移動する速度

などがよく使われる。

例 1 27km/h（時速 27km）を分速になおすと

$$27\text{km/h} = \frac{27\text{km}}{1\text{h}} = \frac{27000\text{m}}{60\text{min}} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = 450\text{m/min}\ （分速 450\text{m}）$$

であり、秒速になおすと

$$450\text{m/min} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = \frac{450\text{m}}{60\text{s}} = \frac{7.5\text{m}}{1\text{s}} = 7.5\text{m/s}\ （秒速 7.5\text{m}）$$

となる。ここで 7.5m=750cm より、7.5m/s=750cm/s（秒速 750cm）としてもよい。

問 1 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れよ。

$$18\text{km/h} = \boxed{}\ \text{m/min} = \boxed{}\ \text{m/s}$$

問 2 5m を 6 秒で走る速度を時速になおせ。

例 2 「2km/min（分速 2km）のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では、

$$2\text{km/min} = \frac{2\text{km}}{1\text{min}} = \frac{2000\text{m}}{60\text{s}} = \frac{100\text{m}}{3\text{s}}$$

より <u>（答）100m を 3 秒で走る</u>

問 3 54km を 1 時間 39 分で走る速度では、100m を何秒で走るか？

＜ 一次方程式 ＞

例題　次の方程式を解け。

(1)　$0.3x - 5 = 0.1(x - 20)$　　(2)　$\dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{3x-4}{5} = 2$

(3)　$x : (x-1) = 5 : 3$

(解)　(1)　$0.3x - 5 = 0.1x - 2 \quad \Rightarrow \quad 0.2x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{0.2} = 15$

(2)　両辺を 3×5 倍すると

$$(2x-3) \times 5 + (3x-4) \times 3 = 30 \quad \Rightarrow \quad 19x = 57 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{57}{19} = 3$$

(3)　$\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x = 5(x-1) \quad \Rightarrow \quad -2x = -5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$

問　次の方程式を解け。

(1) $1.2x - 0.2 = 0.6x$　　(2) $\dfrac{1}{4}x - 10 = 2x + \dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{1}{2}x - 5 = -\dfrac{2}{3}x + 2$　　(4) $-3(x-6) + 8 = 19$

(5) $4(x-1) = 12 - 3(x+3)$　　(6) $8x - \{3x - 2(x-6)\} = 0$

(7) $9x - \{1 - 3(x+5)\} = 2x - 6$　　(8) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{3-5x}{2} = x$

(9) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-1}{2} = 3$　　(10) $x - \dfrac{x-1}{4} = 6$

(11) $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{2x-3}{2} = x - \dfrac{5}{6}$　　(12) $\dfrac{4}{3}\left(x + \dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1-x}{4}$

(13) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{4}$　　(14) $2x : (x+1) = 6 : 5$

< 一次方程式の応用 >

例題 1 冊 120 円の A4 版ノートと 1 冊 90 円の B5 版ノートを合わせて 16 冊買った合計金額は 1740 円であった。A4 版のノートを何冊買ったか。

(解) A4 版ノートを x 冊買ったとすると , B5 版ノートは $16-x$ 冊買ったことになる。それぞれの金額は

A4 版ノートの金額 $=$ (単価)×(冊数) $= 120x$ (円)
B5 版ノートの金額 $=$ (単価)×(冊数) $= 90(16-x)$ (円)

だから , 合計金額は

合計金額 $= 120x + 90(16-x) = 1740$ (円)

この一次方程式より

$$(120-90)x = 1740 - 90 \times 16$$
$$30x = 300$$
$$x = 10$$

よって (答) A4 版ノートを 10 冊買った。

問 1 リンゴ 10 個とみかん 15 個を買って 1700 円払った。りんご 1 個の値段はみかん 1 個の値段より 20 円高い。りんごとみかんの値段を求めよ。

問 2 A は 4800 円 , B は 3600 円もっている。今この 2 人が同じ本を買ったら , A の残金は B の残金の 2 倍になったという。買った本の値段を求めよ。

問 3 修学旅行で旅館の部屋割りをするのに生徒を 1 室に 7 人ずつ入れると 6 人余り , 8 人ずつ入れると 1 室だけ 5 人になる。部屋数および生徒数を求めよ。

< 連立一次方程式 >

例 次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} 5x+6y=9 & \cdots ① \\ 4x+7y=5 & \cdots ② \end{cases}$$

(1) y を消去するためには①式を 7 倍した式から②式を 6 倍した式をひく。

$$\begin{array}{rrll} & 35x+42y=63 & \cdots ①\times 7 & \\ -) & 24x+42y=30 & \cdots ②\times 6 & \\ \hline & 11x \qquad\quad =33 & \Rightarrow & \underline{x=3} \end{array}$$

(2) x を消去するためには①式を 4 倍した式から②式を 5 倍した式をひく。

$$\begin{array}{rrll} & 20x+24y=36 & \cdots ①\times 4 & \\ -) & 20x+35y=25 & \cdots ②\times 5 & \\ \hline & -11y=11 & \Rightarrow & \underline{y=-1} \end{array}$$

よって $\underline{\text{(答)}\ x=3 \quad , \quad y=-1}$

問 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 7x-y=11 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 7x+5y=18 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ x+5y=13 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x-3y=13 \\ 2x+4y=26 \end{cases}$

＜連立一次方程式の応用 1＞

例題　ある店で 80 円のノートと 200 円の手帳をあわせて 10 冊購入したら合計 1280 円であった。ノートと手帳は何冊購入したか。

(解)　ノートを x 冊 , 手帳を y 冊購入したとすると , 全部で 10 冊なので

冊数 ： $x+y=10 \qquad \cdots ①$

である。また金額は

金額 ： $80x+200y=1280 \qquad \cdots ②$

である。① ×20− ② ÷10 より

$$\begin{array}{rrcll} & 20x+20y & = & 200 & \cdots ① \times 20 \\ -) & 8x+20y & = & 128 & \cdots ② \div 10 \\ \hline & 12x & = & 72 & \Rightarrow \quad x=\dfrac{72}{12}=6 \quad , \quad y=10-x=4 \end{array}$$

よって (答) ノートを 6 冊 , 手帳を 4 冊購入した。

問 1　1 冊 120 円の A4 版ノートと 1 冊 90 円の B5 版ノートをあわせて 20 冊購入した。合計金額は 2010 円であった。A4 版ノートと B5 版ノートを何冊購入したか。

問 2　ある演奏会の入場料は大人が 500 円 , 子供が 200 円である。ある日の入場者数は 100 人であり , 入場料の合計は 38000 円であった。この日の入場者数は大人 , 子供それぞれ何人か。

問 3　ある高等学校の昨年度の生徒数は 600 人であった。本年度の男生徒数は昨年度の男生徒数に比べて 3 ％増加し , 女生徒数は 3 ％減少した。
また全体としては 1 ％増加した。昨年度の男女生徒数および
本年度の男女生徒数を求めよ。

＜連立一次方程式の応用 2＞

例題 ある店で原価 80 円のノートと原価 170 円の手帳を何冊か仕入れ,
ノートは 100 円 , 手帳は 200 円で売りつくした。ノートと手帳の
仕入れ金額は 8400 円であり , 売上金は 10000 円であった。
ノートと手帳はそれぞれ何冊仕入れたか。

(解) ノートを x 冊 , 手帳を y 冊仕入れたとする。

仕入れ金額 ： $80x + 170y = 8400$ ⋯ ①
売り上げ金額 ： $100x + 200y = 10000$ ⋯ ②

連立方程式① , ②を解くと $x = 20$, $y = 40$ より

(答) ノートを 20 冊 , 手帳を 40 冊仕入れた。

問 1 ある果物店でりんごを原価 50 円 , みかんを原価 20 円で何個か仕入れ ,
リンゴは 100 円 , みかんは 50 円で売りつくした。リンゴとみかんの仕入れ
金額は 2500 円であり , 売り上げ金額は 5500 円であった。リンゴと
みかんはそれぞれ何個仕入れたか。

問 2 ある文房具店の売り出しで , 鉛筆 10 本とノート 5 冊を組み合わせて 1250 円 ,
鉛筆 12 本とノート 8 冊を組み合わせて 1760 円の値段がついていた。鉛筆 1 本
およびノート 1 冊の値段はそれぞれいくらか。

問 3 ケーキ屋でイチゴとチーズのショートケーキをあわせて 10 個買う。
イチゴショートケーキ 3 個とチーズケーキ 7 個では合計 1060 円であり ,
イチゴショートケーキ 7 個とチーズケーキ 3 個では合計 1140 円である。
イチゴショートケーキ 5 個とチーズケーキ 5 個では合計いくらになるか。

< 文字式の展開 1 >

例 1　$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

を計算で示すには

$$
\begin{aligned}
(a+b)\times(c+d) &= a\times(c+d) + b\times(c+d) \\
&= a\times c + a\times d + b\times c + b\times d \\
&= ac + ad + bc + bd
\end{aligned}
$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを**展開する**という。

例 2　$(a+b)^2$　を展開する。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) &= a\times(a+b) + b\times(a+b) \\
&= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

例 3

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a\times(a-b) + b\times(a-b) \\
&= a\times a - a\times b + b\times a - b\times b \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

問　次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)^2$

(2) $(a+b)(a+c)$

(3) $(a+b)(a-c)$

(4) $(a-b)(a-c)$

(5) $(a+b)(-a+b)$

(6) $(a+b+c)^2$

(7) $(a+b-c)^2$

(8) $(a-b-c)^2$

< 文字式の展開 2 >

例 1　$(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

$$= a \times (a^2+ab+b^2) - b \times (a^2+ab+b^2)$$

$$= a \times a^2 + a \times ab + a \times b^2 - b \times a^2 - b \times ab - b \times b^2$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

例 2　$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = (a+b) \times (a+b)^2$

$$= (a+b) \times (a^2+2ab+b^2)$$

$$= a \times (a^2+2ab+b^2) + b \times (a^2+2ab+b^2)$$

$$\begin{aligned} &= a \times a^2 + a \times 2ab + a \times b^2 \\ &\qquad + b \times a^2 + b \times 2ab + b \times b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

問　次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $(a-b)^3$

(3) $(a-b)(a+b)^2$

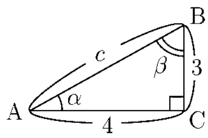
(4) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

(5) $(a-b)^2(a+b)^2$

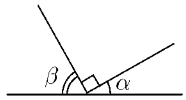
＜ピタゴラスの定理１＞

例 図 1 のような底辺 4(cm)、高さ 3(cm) の直角三角形 ABC の斜辺の長さ c を求めたい。$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$、$\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とおくと三角形の内角の和は 180° より $\alpha+\beta=90°$ となる。従って図 2 のように直線上に角 α と角 β をおけば残った角度は 90° となる。そこで図 1 の三角形 ABC を 4 個用意して、図 3 のようにおく。図 3 の大きい正方形 (一辺 $3+4$ の正方形) から斜線部分を除いた部分は (図 2 の性質より) 一辺 c の正方形になる。よって図 3 の面積を斜線部分とそれ以外に分けると

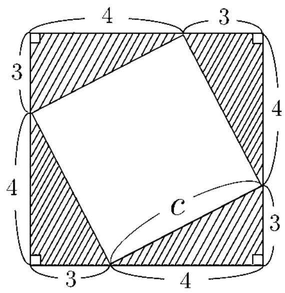
$$\underbrace{(3\times 4)^2}_{\text{全体の面積}}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4}_{\text{斜線部分の面積}}+c^2$$



(図1)



(図2)



(図3)

これから

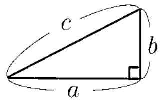
$$c^2=(3+4)^2-\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4=3^2+2\times 3\times 4+4^2-2\times 3\times 4=3^2+4^2=25$$

よって $c=5$ (cm) である。

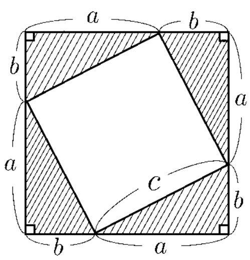
問 底辺 a、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とする (図 4)。例を参考にして

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

であることを証明せよ。この関係式を**ピタゴラスの定理**または**三平方の定理**という。
(ヒント・・・22 ページ 例 2)

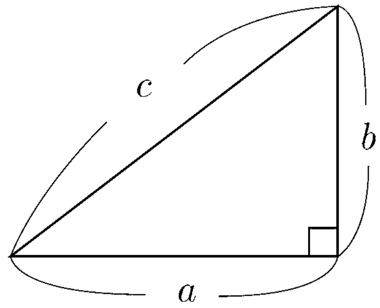


(図4)



(図5)

＜ ピタゴラスの定理 2 ＞



右図のような直角三角形に対し　前ページより

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$　(三平方の定理 = ピタゴラスの定理)

が成り立つ。

例　直角三角形の三辺の長さ a , b , c (c は斜辺の長さ) が

$$a = 8 \quad , \quad c = 10$$

であるとき b の長さは

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

より $\underline{\ b = 6\ }$ である。

問　直角三角形の三辺の長さ a , b , c (c は斜辺の長さ) が次の各場合に ,
残りの辺の長さを求めよ。

(1)　$a = 12$, $b = 5$, $c =$

(2)　$a = 16$, $c = 20$, $b =$

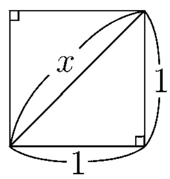
(3)　$b = 15$, $c = 17$, $a =$

(4)　$a = 16$, $c = 34$, $b =$

(5)　$b = 60$, $c = 61$, $a =$

＜平方根 1＞

例 1 一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356\cdots$$

となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は 2 つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は**無理数** (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は 2 乗すれば 2 になる数であり、2 の**平方根**と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2 乗して a になる正の数を a の平方根と呼び $\sqrt{a}$ で表す。この記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**という。

例 2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

などは無理数ではない。

問 1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

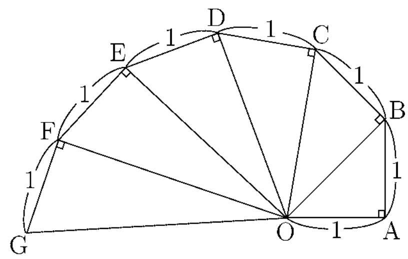
(1) $\sqrt{16}$　　(2) $\sqrt{256}$

(3) $\sqrt{\dfrac{36}{49}}$　　(4) $\sqrt{0.25}$

例 3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より

$$(\mathrm{OC})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{BC})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから OC= $\sqrt{3}$ である。



問 2 右図で OD,OE,OF,OG の長さを求めよ。(単位不要)

＜ 平方根 2 ＞

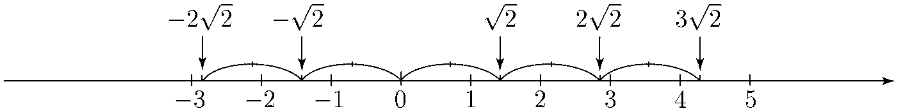
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7320508 \quad , \quad \sqrt{5} \fallingdotseq 2.2360679 \quad , \quad \sqrt{6} \fallingdotseq 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , \ (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。$3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例 1　文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問 1　次式を計算せよ。

(1) $(6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$　　(2) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(3) $3(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$　　(4) $5(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 3(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$

例 2　(1) $(-\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

問 2　次を計算せよ。

(1) $(-\sqrt{11})^2$　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$　　(3) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$　　(4) $\sqrt{(-0.12)^2}$

例 3　$\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その 2 乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問 3　次を計算せよ。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$　　(3) $\sqrt{4} \times \sqrt{11}$　　(4) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

< 平方根 3 >

前ページ例 3 から一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b} \;=\; \sqrt{ab}}$$

が成り立つ。

例 1 (1) $\sqrt{12} \;=\; \sqrt{4\times 3} \;=\; \sqrt{4}\times\sqrt{3} \;=\; 2\times\sqrt{3} \;=\; 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} \;=\; \sqrt{9\times 5} \;=\; \sqrt{9}\times\sqrt{5} \;=\; 3\times\sqrt{5} \;=\; 3\sqrt{5}$

問 1 次の平方根を例 1 のようになおせ。

(1) $\sqrt{18}$ (2) $\sqrt{40}$ (3) $\sqrt{75}$ (4) $\sqrt{80}$ (5) $\sqrt{147}$

例 2 $\sqrt{8}\times\sqrt{18} \;=\; \sqrt{8\times 18} \;=\; \sqrt{144} \;=\; 12$

(別解)

$\sqrt{8}\times\sqrt{18} \;=\; (2\sqrt{2})\times(3\sqrt{2}) \;=\; 6\times(\sqrt{2})^2 \;=\; 6\times 2 \;=\; 12$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{7}\times\sqrt{63}$ (3) $\sqrt{21}\times\sqrt{84}$

例 3 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{3}{5}$

より $x = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ よって $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ がなりたつ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;=\; \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。

例 4 $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} \;=\; \sqrt{\dfrac{54}{3}} \;=\; \sqrt{18} \;=\; 3\sqrt{2}$

問 3 次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{15}}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

< 平方根 4 >

例 1 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10} + \left(\sqrt{10}\right)^2$

$= 5 + 2\sqrt{50} + 10$

$= 15 + 2\times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}$

(注) ここで文字式の展開式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いた。

問 1 15 ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$　　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$　　(3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$　　(5) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$　　(6) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

例 2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$　,　(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$　　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$　　(5) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

例 3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \qquad \times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

＜ 数の表示 1 ＞

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は 60 進法であり、
コンピューターは 2 進法で計算する。ここでは 8 進法を紹介する。
10 進法で 3 桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10 進法の数 (=**10 進数**という）であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し 8 進法で三桁目が 4, 二桁目が 5, 一桁目が 7 である
数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8 進法で表される数を **8 進数**という。$4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = 303$ より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 ① $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

② $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$

③ $(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$

④ $(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$

問 1 次の 8 進数を 10 進数になおせ。

① $(12)_8$　② $(33)_8$　③ $(234)_8$　④ $(707)_8$　⑤ $(2001)_8$

例 2 ① $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

② $215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$ より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の 10 進数を 8 進数になおせ。

① $(21)_{10}$　② $(45)_{10}$　③ $(79)_{10}$　④ $(156)_{10}$

例 3 ① $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10^2}$

② $(4.57)_8 = 4 + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{8^2}$

問 3 次の小数を例 3 のように分数で表せ。

① $(3.14)_{10}$　② $(1.5)_8$　③ $(5.73)_8$

(注) 8 進法では 0 から 7 までの数字しか使えない。

< 数の表示 2 >

例題 3 桁の 10 進数で各桁の数の和が 9 の倍数になっているもの、たとえば

$(162)_{10}$, $(414)_{10}$, $(738)_{10}$

等はいずれも 9 の倍数である。一般に 3 桁の 10 進数

$$(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

に対して

$$a + b + c = 9 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は 9 の倍数であることを証明せよ。

(証明) $a + b + c$ は 9 の倍数だから $a + b + c = 9n$(n は自然数) とおく。

$$(abc)_{10} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$$
$$= 9\,(11a + b) + 9n = 9\,(11a + b + n)$$

より $(abc)_{10} = 9 \times (11a + b + n)$ は 9 の倍数になる。(証明終)

問 1 3 桁の 10 進数 $(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ に対して

$$a + b + c = 3 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

(証明)

問 2 3 桁の 8 進数 $(abc)_8 = a \times 8^2 + b \times 8 + c$ に対して

$$a + b + c = 7 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_8$ は 7 の倍数であることを証明せよ。

(証明)

＜ 整式 1 ＞

10 進法で 2 桁、3 桁の整数は

$$2\text{ 桁}\cdots(ab)_{10} = a\times 10 + b \quad ,\ 3\text{ 桁}\cdots(abc)_{10} = a\times 10^2 + b\times 10 + c$$

となる。一般に x 進法で 2 桁、3 桁の整数は

$$2\text{ 桁}\cdots(ab)_x = ax + b \quad ,\ 3\text{ 桁}\cdots(abc)_x = ax^2 + bx + c$$

となる。このように x 進法で整数を表す式を「x に関する**整式**」という。
これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を「x に関する**分数式**」という。

問 1 x 進法で 4 桁の整数 $(abcd)_x$ を x の式で表せ。

$$(abcd)_x =$$

整数は式の形で区別する。

x に関する 1 次式 $\cdots ax + b$ の形
x に関する 2 次式 $\cdots ax^2 + bx + c$ の形
x に関する 3 次式 $\cdots ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

x に関する整式では、x 以外の文字 (a, b, c, d 等) を**定数**という。
ax^3 の a, bx^2 の b, cx の c のように x との積になっている定数を**係数**という。

(注 1) x の整式は “x 進法” よりもっと広い意味で使われる。a, b, c 等の定数は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

(注 2) $2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ のように x の整式は x の次式 (指数) の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順**に並べる」という。

(注 3) 整式の計算 (和, 差, 積 等) は文字式の計算と同様であり、最後に降べきの順に並べる。

例 $(3 + 2x)(4 - x) = 3(4 - x) + 2x(4 - x) = 12 - 3x + 8x - 2x^2 = -2x^2 + 5x + 12$

問 2 次式を計算せよ。

(1) $2(3x - 4x^2 + 1) + 3(x - 5 + 2x^2)$ (2) $(3x - 1)(4 - 5x)$

< 整式 2 >

例 1 (1) $(3-x+2x^2)+(4x+5+3x^2)$

$$
\begin{aligned}
&= (2x^2-x+3)+(3x^2+4x+5)\\
&= (2x^2+3x^2)+(-x+4x)+(3+5)\\
&= 5x^2+3x+8
\end{aligned}
$$

筆算では

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2-\ \ x+3\\
+) & 3x^2+4x+5\\
\hline
 & 5x^2+3x+8
\end{array}
$$

(2) $(-4x+3+5x^2)-(7-2x)$

$$
\begin{aligned}
&= (5x^2-4x+3)-(-2x+7)\\
&= 5x^2+(-4x-(-2x))+(3-7)\\
&= 5x^2-2x-4
\end{aligned}
$$

筆算では

$$
\begin{array}{rr}
 & 5x^2-4x+3\\
-) & -2x+7\\
\hline
 & 5x^2-2x-4
\end{array}
$$

(3) $(2x-3)(4x+5)$

$$
\begin{aligned}
&= (2x-3)\times 4x+(2x-3)\times 5\\
&= 8x^2-12x+10x-15\\
&= 8x^2-2x-15
\end{aligned}
$$

筆算では

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2x-\ \ 3 & \\
\times) & 4x+\ \ 5 & \\
\hline
 & 10x-15 & \cdots\cdots(2x-3)\times 5\\
+) & 8x^2-12x\qquad & \cdots\cdots(2x-3)\times 4x\\
\hline
 & 8x^2-\ \ 2x-15 &
\end{array}
$$

(注) 整数の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 1 次の計算をせよ。

(1) $(3x-x^2+4)+(2x^2-1+2x)$ (2) $(1-x^2)-(4+x^2-3x)$

(3) $(x-3)(2+x)$ (4) $(4x-3)(6-5x)$

例 2 $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$

(注) x の係数 $(a+b)$ は 1 つにまとめる。

例 3 $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$

問 2 次式を展開せよ。

(1) $(x+a)^2$ (2) $(x-a)^2$

(3) $(x-a)(x+a)$ (4) $(x-a)(x-b)$

(5) $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(6) $(x+a)^3$

< 整式の除法 >

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。
これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{rr} & 12 \\ \cline{2-2} 11 &)\,136 \\ & 11 \\ \cline{2-2} & 26 \\ & 22 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

となる。整式の除法も同様で
x^2+3x+6 を $x+1$ で割ると商が
$x+2$ で余りが 4 である。これを式で
書くと

$$x^2+3x+6 = (x+2)(x+1)+4$$

かまたは

$$\frac{x^2+3x+6}{x+1} = x+2+\frac{4}{x+1}$$

となる。

$$\begin{array}{rrl} & x+2 & \\ \cline{2-2} x+1 &)\ x^2+3x+6 & \\ & x^2+\ x & \cdots\ (x+1)\times x \\ \cline{2-2} & 2x+6 & \\ & 2x+2 & \cdots\ (x+1)\times 2 \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

例 2　右の筆算より

$$\frac{4x^3-2x^2+6x-1}{2x+3} = 2x^2-4x+9-\frac{28}{2x+3}$$

$$\begin{array}{rrl} & 2x^2-4x+9 & \\ \cline{2-2} 2x+3 &)\ 4x^3-2x^2+6x-1 & \\ & 4x^3+6x^2 & \cdots\ (2x+3)\times 2x^2 \\ \cline{2-2} & -8x^2+6x & \\ & -8x^2-12x & \cdots\ (2x+3)\times(-4x) \\ \cline{2-2} & 18x-1 & \\ & 18x+27 & \cdots\ (2x+3)\times 9 \\ \cline{2-2} & -28 & \end{array}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の
右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$

(2) $\dfrac{x^2+3x+5}{x-2}$

(3) $\dfrac{2x^2-3x-1}{x-1}$

(4) $\dfrac{x^3-5x^2+7x-2}{x-3}$

< 方程式と恒等式 >

文字 x に関する等式には 2 種類ある。

例 1 (1) 等式 $3x - 10 = 2$ を満たす数 x は $x = 4$ だけである。

(2) 等式 $x^2 - 9 = 0$ を満たす数 x は $x = 3$ または $x = -3$ の 2 個しかない。

例 2 (1) 等式 $2(x-1) + 3(x+4) = 5x + 10$ は x がどんな数でも成り立つ。

(2) 等式 $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例 1 のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。例 1 の (1) を未知数 x に関する 1 次方程式、例 1 の (2) を未知数 x に関する 2 次方程式という。

これに対し、例 2 は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を（常に成り立つ等式という意味で）**恒等式**（こうとう）という。例 2 の (2) のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問 1 例 2 の (2) を確かめたい。以下の x の値を代入して、$(x+2) \times (x+3)$ と $x^2 + 5x + 6$ の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x = 0$ のとき $(x+2)(x+3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

(2) $x = 1$ のとき $(x+2)(x+3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

(3) $x = 2$ のとき $(x+2)(x+3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

(4) $x = 3$ のとき $(x+2)(x+3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

(5) $x = 4$ のとき $(x+2)(x+3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

問 2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+\alpha)^2$ (2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x+\alpha)(x-\alpha)$ (4) $(x+\alpha)(x+\beta)$

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)$ (6) $(x+\alpha)(x-\beta)$

問 3 次の等式は恒等式か方程式か判定せよ。

(1) $3x - 1 = 2(2x-1) + x$ (2) $3(x+1) - 1 = 2(x+1) + x$

(3) $(x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$ (4) $(x-2)(x-1) = x^2 - 4x - 3$

＜ 2 次式の因数分解 1 ＞

例 169 を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10+3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1+3)^2$$
$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2+3)^2$$
$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3+3)^2$$
$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4+3)^2$$
$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5+3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ。すなわち (1) は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の (1) 式のように x を使って表せ。

(1)
$$1^2 + 4 \times 1 + 4 = (1+2)^2$$
$$2^2 + 4 \times 2 + 4 = (2+2)^2$$
$$3^2 + 4 \times 3 + 4 = (3+2)^2$$
$$4^2 + 4 \times 4 + 4 = (4+2)^2$$

(2)
$$2^2 - 10 \times 2 + 25 = (2-5)^2$$
$$4^2 - 10 \times 4 + 25 = (4-5)^2$$
$$6^2 - 10 \times 6 + 25 = (6-5)^2$$
$$8^2 - 10 \times 8 + 25 = (8-5)^2$$

(3)
$$5^2 - 9 = (5+3) \times (5-3)$$
$$6^2 - 9 = (6+3) \times (6-3)$$
$$7^2 - 9 = (7+3) \times (7-3)$$
$$8^2 - 9 = (8+3) \times (8-3)$$

(4)
$$1^2+5\times1+6 = (1+2)\times(1+3)$$
$$2^2+5\times2+6 = (2+2)\times(2+3)$$
$$3^2+5\times3+6 = (3+2)\times(3+3)$$
$$4^2+5\times4+6 = (4+2)\times(4+3)$$

＜ 2次式の因数分解 2 ＞

前ページより
$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$
$$x^2-10x+25=(x-5)^2$$
$$x^2-9=(x+3)(x-3)$$
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。
たとえば、最後の式は

$$\begin{aligned}右辺 = (x+2)(x+3) &= (x+2)\times x+(x+2)\times 3\\ &= x^2+2x+3x+6\\ &= x^2+5x+6\\ &= 左辺\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & x+2 & \\ \times) & x+3 & \\ \hline & 3x+6 & \cdots\ (x+2)\times 3 \\ +) & x^2+2x & \cdots\ (x+2)\times x \\ \hline & x^2+5x+6 & \end{array}$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x=10$ のときは

$$\begin{aligned}右辺 &= (10+2)(10+3)\\ &= (10+2)\times 10+(10+2)\times 3\\ &= 10^2+2\times 10+3\times 10+2\times 3\\ &= 10^2+5\times 10+6 = 左辺\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & 12 & \\ \times) & 13 & \\ \hline & 36 & \cdots\ 12\times 3 \\ +) & 120 & \cdots\ 12\times 10 \\ \hline & 156 & \end{array}$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。
この式を

$$左辺 = x^2+(2+3)x+2\times 3=(x+2)(x+3)=右辺$$

と考え、2 と 3 のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。
すなわち

$$\boxed{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 21 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$

(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$

(4) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

＜ 2次式の因数分解 3 ＞

前ページの結果から任意の数 $\alpha,\ \beta$ に対して次の因数分解の公式が得られた。

(Ⅰ) $x^2+2\alpha x+\alpha^2=(x+\alpha)^2$
(Ⅱ) $x^2-2\alpha x+\alpha^2=(x-\alpha)^2$
(Ⅲ) $x^2-\alpha^2=(x+\alpha)(x-\alpha)$
(Ⅳ) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

例 1 上の公式 (Ⅰ), (Ⅱ) の例をあげる。

(1) $x^2+10x+25=x^2+2\times 5\times x+5^2=(x+5)^2$

(2) $x^2-12x+36=x^2-2\times 6\times x+6^2=(x-6)^2$

例 2 上の公式 (Ⅲ) の例をあげる。

(1) $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

(2) $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

例 3 上の公式 (Ⅳ) の例をあげる。

(1) $x^2+4x+3=x^2+(3+1)x+3\times 1=(x+3)(x+1)$

(2) $x^2+7x+10=x^2+(5+2)x+5\times 2=(x+5)(x+2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+6x+9

(2) $x^2-10x+25$

(3) $x^2+12x+36$

(4) x^2-9

(5) x^2-8

(6) x^2-1

(7) x^2+3x+2

(8) x^2+5x+6

(9) $x^2+7x+10$

(10) $x^2+7x+12$

＜ 2次式の因数分解 4 ＞

前ページの (IV) の式

$$\boxed{\text{(IV)}\quad x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

の β のかわりに $-\beta$ を代入すると

$$\boxed{\text{(V)}\quad x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha(-\beta)=(x+\alpha)(x-\beta)}$$

が得られ、さらに α のかわりに $-\alpha$ を代入すると

$$\boxed{\text{(VI)}\quad x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=(x-\alpha)(x-\beta)}$$

が得られる。

例 1 (V) の例をあげる。

(1) $x^2+3x-10=x^2+(5-2)x+5\times(-2)=(x+5)(x-2)$

(2) $x^2+x-20=x^2+(5-4)x+5\times(-4)=(x+5)(x-4)$

(3) $x^2-2x-15=x^2+(3-5)x+3\times(-5)=(x+3)(x-5)$

(4) $x^2-x-6=x^2+(2-3)x+2\times(-3)=(x+2)(x-3)$

例 2 (VI) の例をあげる。

(1) $x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3)\times(-4)=(x-3)(x-4)$

(2) $x^2-7x+6=x^2+(-6-1)x+(-6)\times(-1)=(x-6)(x-1)$

(3) $x^2-5x+6=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)=(x-3)(x-2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+5x-6

(2) x^2+x-6

(3) $x^2+2x-15$

(4) x^2-3x-4

(5) x^2-4x-5

(6) x^2-2x-8

(7) x^2-6x+5

(8) x^2-4x+3

(9) x^2-9x+8

(10) x^2-6x+8

< 2次方程式 1 >

「x の 2 次式 $= 0$」の形の式を **2 次方程式** という。2 次方程式をみたす数 x を 2 次方程式の **解** という。2 次方程式の解は通常は 2 個ある。

例 1 $x^2 - 5 = 0$ は $x^2 = 5$ と同じである。

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \quad , \quad \left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

より解は $\underline{x = \sqrt{5} \text{ または } x = -\sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x = \pm\sqrt{5}}$ と書く。

例 2 $(x-1)^2 - 5 = 0$ は $(x-1)^2 = 5$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \pm\sqrt{5}$$

より解は $\underline{x = 1 + \sqrt{5} \text{ または } x = 1 - \sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x = 1 \pm \sqrt{5}}$ と書く。

例 3 $(x-1)^2 - 4 = 0$ は $(x-1)^2 = 4$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \pm 2$$
$$x - 1 = +2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 + 2 = 3$$
$$x - 1 = -2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 - 2 = -1$$

より解は $\underline{x = 3 \text{ または } x = -1}$ である。これを略して $\underline{x = 3 \text{ または } -1}$ と書く。

問 次の 2 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^2 - 4 = 0$

(2) $x^2 - 8 = 0$

(3) $(x-2)^2 - 5 = 0$

(4) $3 - (x+2)^2 = 0$

(5) $(x-3)^2 - 9 = 0$

(6) $4 - (x+1)^2 = 0$

＜２次方程式２＞

例１

$$x^2+6x+5=0 \Longrightarrow x^2+6x=-5$$

$$\Longrightarrow x^2+2\times 3\times x=-5 \Longrightarrow x^2+2\times 3\times x+3^2=3^2-5$$

$$\Longrightarrow (x+3)^2=4 \Longrightarrow x+3=\pm 2$$

$$\Longrightarrow x=-3+2 \quad \text{または} \quad x=-3-2 \Longrightarrow \underline{(\text{答})\ \ x=-1 \quad \text{または} \quad -5}$$

(注) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ の形になるよう式変形する。

例２

$$x^2-5x-3=0 \Longrightarrow x^2-5x=3$$

$$\Longrightarrow x^2-2\times\frac{5}{2}x=3 \Longrightarrow x^2-2\times\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+3$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{37}{4} \Longrightarrow x-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{37}{4}}$$

$$\Longrightarrow x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} \Longrightarrow x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\Longrightarrow \underline{(\text{答})\ \ x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}}$$

(注) $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ の形になるよう式変形する。

問 次の２次方程式を解け。

(1) $x^2+6x+8=0$

(2) $x^2-10x+16=0$

(3) $x^2+8x-11=0$

(4) $x^2-4x+1=0$

(5) $x^2-3x+1=0$

(6) $x^2+5x-2=0$

＜ 2 次方程式 3 ＞

例 2 次方程式 $3x^2+11x+5=0$ を次のように解く。

$$3x^2+11x+5=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{11}{3}x+\frac{5}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{11}{3}x=-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\quad x^2+2\times\frac{11}{2\times3}x=-\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad x^2+2\times\frac{11}{2\times3}x+\left(\frac{11}{2\times3}\right)^2=\left(\frac{11}{2\times3}\right)^2-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \left(x+\frac{11}{2\times3}\right)^2=\left(\frac{11}{2\times3}\right)^2-\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad \left(x+\frac{11}{2\times3}\right)^2=\frac{11^2-4\times3\times5}{4\times3^2}$$

$$\Rightarrow\quad x+\frac{11}{2\times3}=\pm\sqrt{\frac{11^2-4\times3\times5}{4\times3^2}} \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{11}{2\times3}\pm\frac{\sqrt{11^2-4\times3\times5}}{2\times3}$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\times3\times5}}{2\times3}=\frac{-11\pm\sqrt{61}}{6}$$

問 $a\neq0$, $b^2-4ac\geqq0$ のとき 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を例を参考にして導け。(途中の式変形を書くこと)

(問) $ax^2+bx+c=0$

(答) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

< 2次方程式と因数分解 1 >

一般の係数 $a,\ b,\ c$ に対し、2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解の公式は前ページより

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

である。

例 2 次方程式

$$x^2-5x+6=0$$

の解を求める。$a=1,\ b=-5,\ c=6$ を解の公式にあてはめると

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$\dfrac{5+1}{2}=3,\ \dfrac{5-1}{2}=2$ より　　<u>(答) $x=3$ または $x=2$</u>

(別解)

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

と因数分解されるから

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)\times(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ または } x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=2 \text{ または } x=3}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2-6x+8=0$

(2) $x^2-8x+7=0$

(3) $x^2-7x+10=0$

(4) $x^2+x-12=0$

(5) $x^2-x-2=0$

(6) $x^2+5x+4=0$

(7) $x^2-5=0$

(8) $x^2+x-1=0$

＜ 2 次方程式と因数分解 2 ＞

前ページの例のように 2 次方程式の解と因数分解の関係は

$x^2+\square x+\triangle=0$ の解が α と β $\Longleftrightarrow$ $x^2+\square x+\triangle=(x-\alpha)(x-\beta)$

となる。

例 1 $x^2+2x-3=0$ の解は $\underline{x=-3 \text{ と } x=1}$ であるから

$$x^2+2x-3=\bigl(x-(-3)\bigr)(x-1)=(x+3)(x-1)$$

と因数分解できる。

例 2 $x^2-x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問 1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 3 $2x^2+4x-6=2\left(x^2+2x-3\right)=2(x+3)(x-1)$

この式は例 1 の結果を使った。

(注) $2x^2+4x-6=0$ の解と $x^2+2x-3=0$ の解は同じ。

一般に

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \ \text{の解が}\ x=\alpha \ \text{または}\ x=\beta} \cdots(1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)} \cdots(2)$$

と因数分解できる。逆に (2) であれば (1) がわかる。

問 2 次式を因数分解せよ。

(1) x^2-2x-3

(2) x^2+3x-4

(3) x^2-3

(4) x^2-x-4

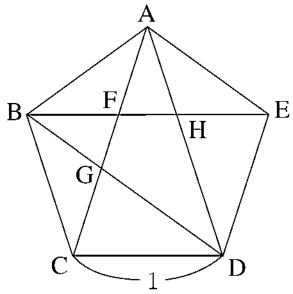
(5) $2x^2-6x-20$

(6) $3x^2+3x-18$

(7) $9x^2+6x+1$

(8) $3x^2-5x-2$

＜ 2 次方程式の応用 ＞



問　一辺の長さが 1 である正五角形の対角線の長さ x を求めたい。

(1)　$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{BE} = x$ である。
線分 BE と CD は平行であり,
線分 AC と DE も平行である。
次の長さを数字または x を用いて表せ。

① FE =　　　② BF =　　　③ EH =

④ FH =　　　⑤ FG =

(2)　三角形 ACD と三角形 BFG は相似だから

$$\mathrm{AD} : \mathrm{CD} = \mathrm{BF} : \mathrm{FG}$$

より x に関する 2 次方程式を導き、 x を求めよ。

< 時計の問題 >

問 1　時計の長針が x 分間に回転する角度を $y°$ とする。次の表を完成し, y を x で表せ。

時間 (分)　x	0	10	20	30	40	50	60	x
長針の回転角度　y	0°						360°	

$y =$

問 2　時計の短針が x 分間に回転する角度を $z°$ とする。次の表を完成し, z を x で表せ。

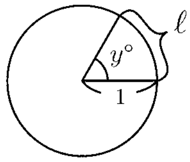
時間 (分)　x	0	10	20	30	40	50	60	x
短針の回転角度　z	0°							

$z =$

問 3　正午 (12:00) から午後 1 時 (13:00) までの間に時計の長針と短針の角度が 90° になる時刻を求めよ。(答は 2 通りある)

< ベルトの問題 >

問 1 半径 1, 中心角 $y°$ の扇形の弧の長さを ℓ とする。
次の表を完成し, ℓ を y で表せ。ただし π は円周率である。



中心角 $y°$	$0°$	$1°$	$30°$	$45°$	$90°$	$180°$	$360°$	$y°$
弧の長さ ℓ	0					2π		

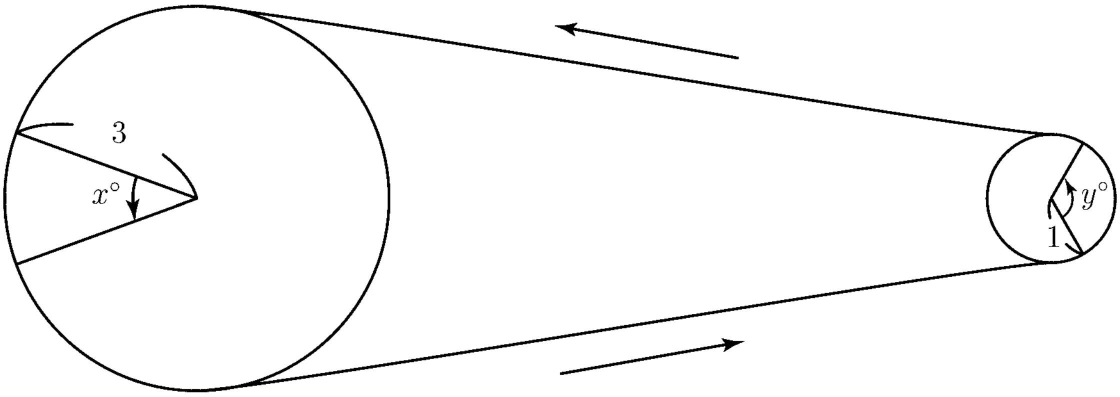
$\ell =$

問 2 半径 3, 中心角 $x°$ の扇形の弧の長さを ℓ とする。次の表を完成し, ℓ を x で表せ。

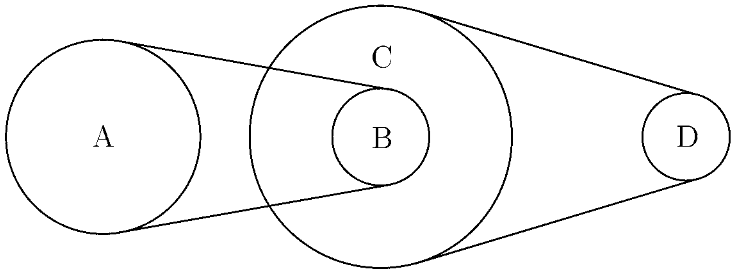
中心角 $x°$	$0°$	$1°$	$10°$	$15°$	$30°$	$60°$	$120°$	$180°$	$360°$	$x°$
弧の長さ ℓ	0							6π		

$\ell =$

問 3 半径 3 の大円盤と半径 1 の小円盤にベルトがかけられていて, 大円が回ると小円もまわる。大円が $x°$ 回転するとき, 小円は $y°$ 回転する。y を x で表せ。



問 4 右図の A,B,C,D の各車の半径がそれぞれ 2 , 1 , 2.7 , 0.9 で図のようにベルトがかけられ, B と C は同じ軸に固定されている。A が x 回転するとき D が y 回転する。y を x で表せ。



＜関数＞

問 1 時速 36km で走っている車が x 秒間に ym 走ったとする。次の表を完成し，y を x で表せ。

1分　　1時間

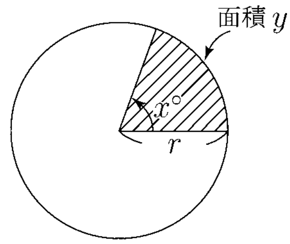
時間 (秒) x	1	10	60	600		x
距離 (m) y					36000	

$y =$

問 2 周の長さが 8 cm である長方形の縦の長さを x cm とし，そのときの長方形の面積を y cm^2 とする。 y を x で表せ。

問 3 半径 r (cm)，中心角 x° の扇形の面積を y cm^2 とする。次の表を完成し，y を r と x で表せ。

中心角 x°	1°	10°	30°	45°	90°	180°	360°	x°
面 積 y cm^2							πr^2	



問 4 ばねに重りをひっかけて，ばねの長さを計ったら次の表のようになった。

重り	100 g	600 g	1 kg	1.3 kg	1.7 kg
ばねの長さ (cm)	15.2	16.2	17	17.6	18.4

x kg の重りをひっかけたときのばねの長さを y cm とする。y を x で表せ。

問 1，問 3 の x と y のように，いろいろな値をとる文字を**変数**という。変数 x の値を決めるとそれにつれて y の値も決まるとき，y は x の**関数**という。

問 1，問 3，問 4 のように y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数**という。問 2 のように y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数**という。

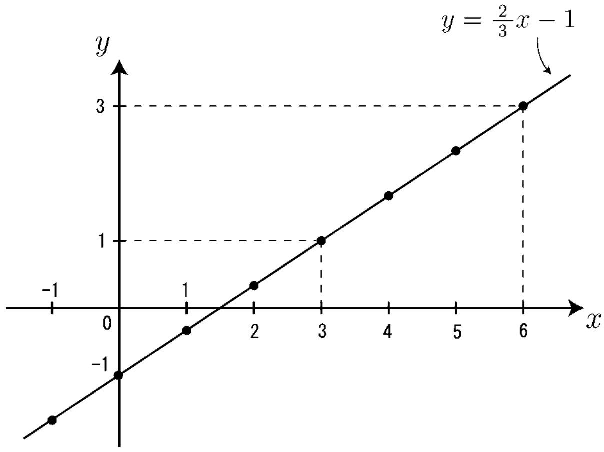
また問 1，問 3 のように $y =$ (定数) $\times\, x$ の形で表されるとき **y は x に比例する**という。

＜１次関数のグラフ１＞

例　１次関数 $y = \frac{2}{3}x - 1$ のグラフは

次の対応表より右図のような直線になる。

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3



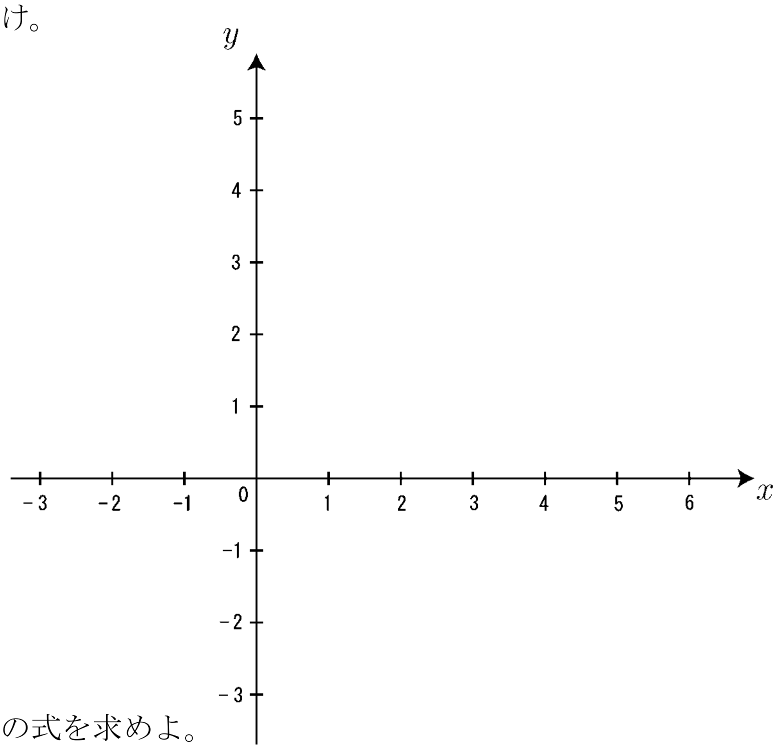
問１　次の１次関数のグラフを描け。

(1)　$y = \dfrac{3}{4}x + 3$

(2)　$y = 2x - 3$

(3)　$y = -x + 5$

(4)　$y = -1.5x + 3$



問２　右図の直線が表す１次関数の式を求めよ。

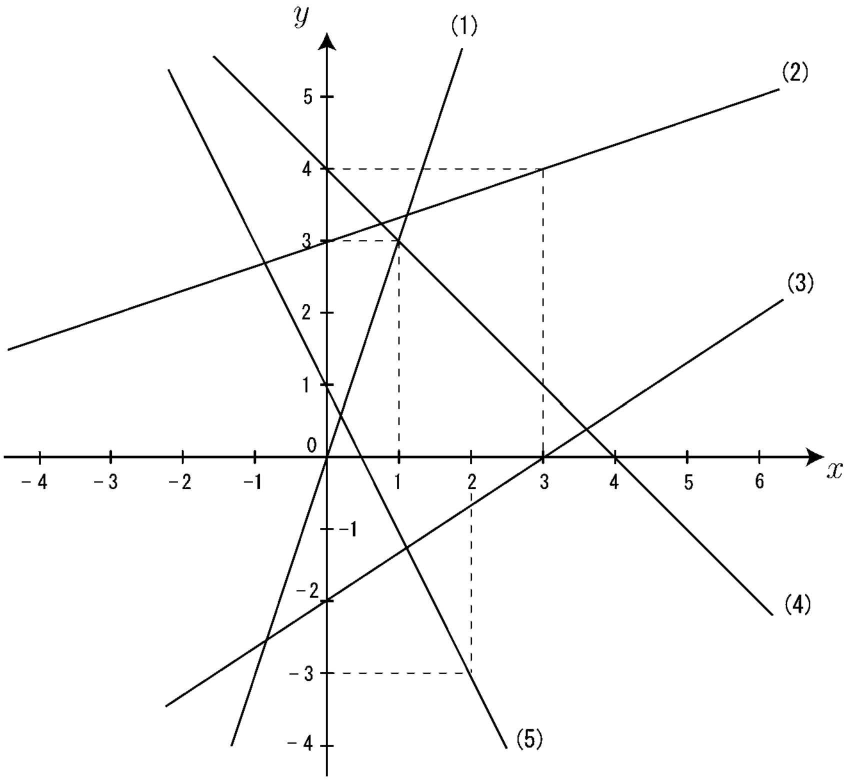
(1)

(2)

(3)

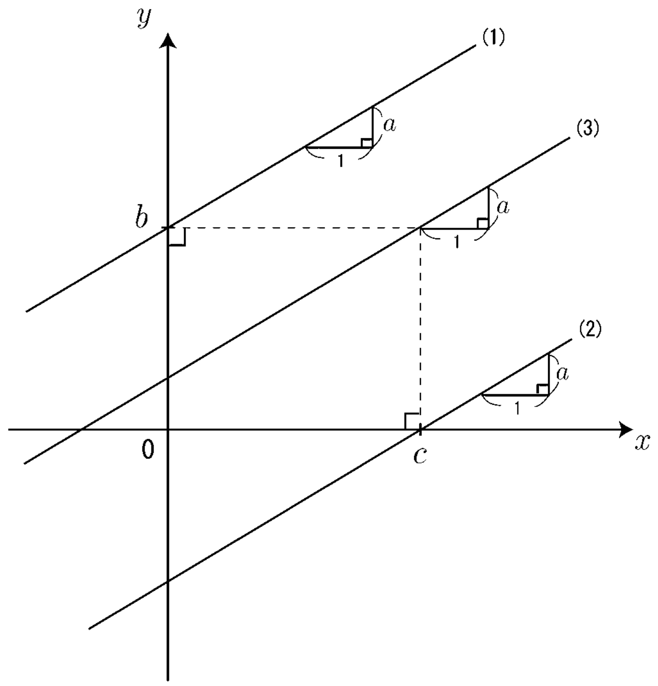
(4)

(5)



＜１次関数のグラフ２＞

問１　定数 a , b , c $(a \neq 0)$ に対し右図の直線 (1) , (2) , (3) が表す１次関数の式を求めよ。



(1)

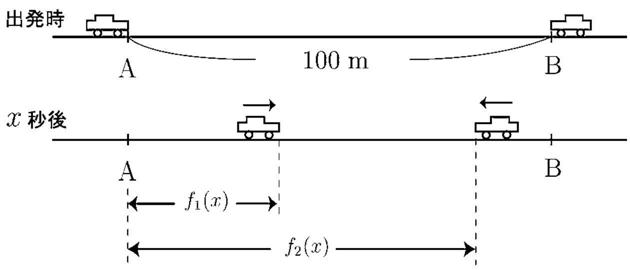
(2)

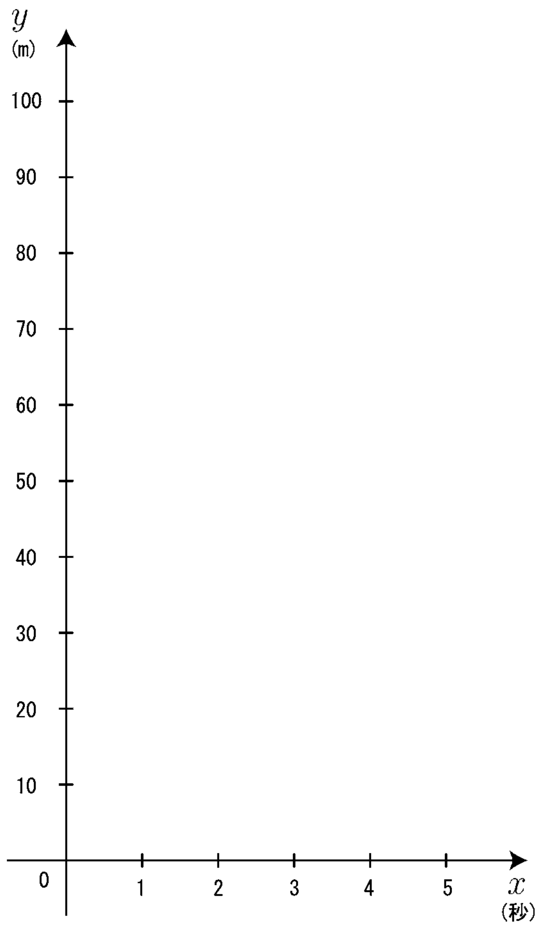
(3)

(注)　この３直線は全て平行である。このとき a を**傾き**または**勾配** (こうばい) という。
b を直線 (1) の y **切片**という。 c を直線 (2) の x **切片**という。

問２　２点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ 　$(x_1 < x_2\ ,\ y_1 \neq y_2)$ を通る直線の式を求めよ。

問３　100m ある直線道路を２つの車が走る。A 地点から B 地点に向かって走る車は秒速 20m で走る。B 地点から A 地点に向かって走る車は秒速 10m で走る。同時に出発し , x 秒後の A 地点からの距離をそれぞれ $f_1(x)$, $f_2(x)$ とする。





(1)　$f_1(x)$ と $f_2(x)$ を x の式で表せ。

$f_1(x) =$ 　　　　　　　,　$f_2(x) =$

(2)　$y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフを右図に描け。

(3)　２直線 $(y = f_1(x)$ と $y = f_2(x))$ の交点の座標を求めよ。

(4)　交点の座標は何を意味するか 答えよ。