Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

番外編

フーリエ級数

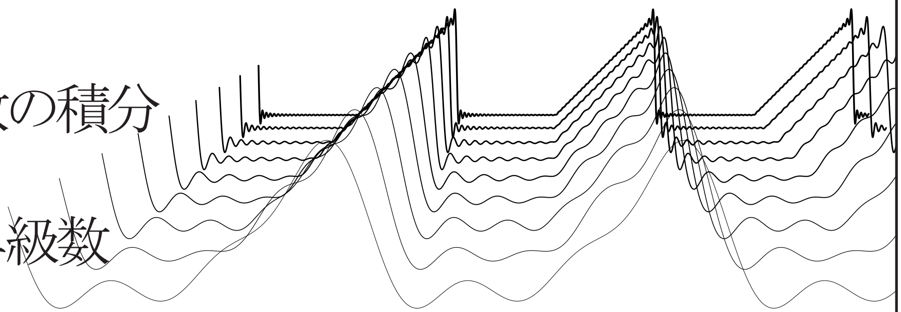
（改訂版）

（2003年度版）

内容

◎　三角関数

◎　三角関数の積分



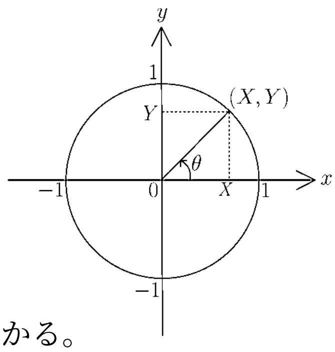
◎　フーリエ級数

◎　フーリエ級数の複素数表示

◎　フーリエ変換

井上 昌昭　著

< 三角関数 >



右図のような場合に

$\sin\theta = Y$ (正弦)

$\cos\theta = X$ (余弦)

$\tan\theta = \dfrac{Y}{X}$ (正接)

と定め、これらを三角関数という。角度 θ は通常弧度法ではかる。

問 1 下の表を完成させせよ。

度数法		-540°		-180°		0°	30°	45°		90°	180°	270°			720°	
弧度法	-4π		-2π		$-\frac{\pi}{2}$	0			$\frac{\pi}{3}$		π		2π	3π		5π
$\sin\theta$																
$\cos\theta$																

三角関数の定義により、次の性質がわかる。

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(2) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

(3) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

(4) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

(5) $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

(6) $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

例 $\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{9}{4}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\dfrac{25}{6}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問 2 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\left(-\dfrac{3}{2}\pi\right)$ (2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{6}\pi\right)$ (3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 8\pi\right)$

(4) $\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi - 4\pi\right)$ (5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 3\pi\right)$

< 加法定理 1 >

正弦と余弦の加法定理は

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

である。前ページの性質 (2) より $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$ であるから

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

がわかる。この加法定理を使うと前ページの性質 (3)〜(6) が導かれる。

例 1　$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ より

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}=\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\theta$$

問 1　次式を加法定理によって展開し，$\sin\theta$ 又は $\cos\theta$ を用いて表せ。

(1) $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=$　　　　(2) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=$

例 2

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

問 2　次式を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ で表せ。

(1) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　　　(2) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　　　(4) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

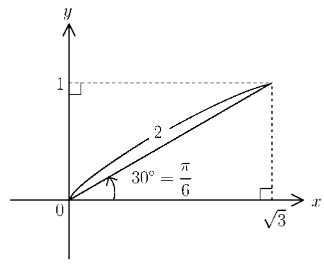
＜加法定理 2＞

例 1 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

$$= 2\left((\sin\theta)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + (\cos\theta)\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

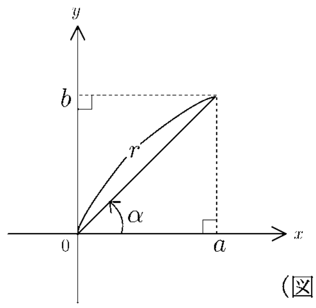


（図１）

一般に定数 a, b と角度 α が
図 2 の場合に

$$\boxed{a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)}$$

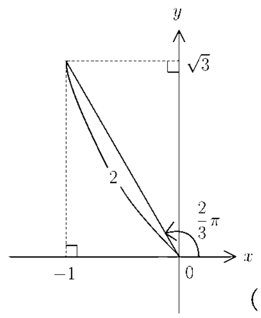
が成り立つ。ここで $r = \sqrt{a^2+b^2}$ である。



（図２）

例 2
図 3 より

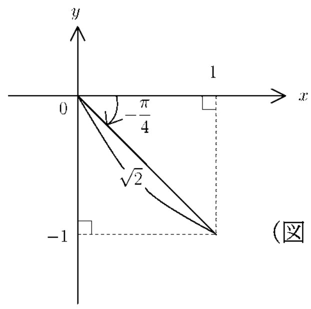
$$-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$



（図３）

例 3
図 4 より

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$



（図４）

問 次式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にせよ。

(1) $\sin\theta + \cos\theta$

$=$

(2) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$

$=$

(3) $\cos\theta - \sin\theta$

$=$

(4) $-4\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta$

$=$

＜ 加法定理 3 ＞

2 ページの加法定理に対して，$\alpha = \beta = \theta$ とおくと

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \quad \cdots(1) \\ \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \cdots(2) \end{aligned}}$$

が導かれる。この式を**倍角の公式**という。三角関数の性質

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \cdots(3)}$$

を使うと (2) 式は

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \cdots(4)}$$

と表される。この式から

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \text{ , } \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

と表されるから，θ のかわりに $\dfrac{\theta}{2}$ を代入すると

$$\boxed{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \cdots(5)}$$

が導かれる。(5) 式をコサインの**半角の公式**という。

問 1 上と同様にして，サインの半角の公式を求めよ。($\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ を $\cos\theta$ で表せ。)

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

例 2 ページの加法定理において $\alpha = 2\theta$,$\beta = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) &= \sin(2\theta)\cos\theta + \cos(2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

問 2 例と同様にして，$\cos(3\theta)$ を $\cos\theta$ だけで表せ。

$$\cos(3\theta) =$$

< 積和公式 >

2 ページの加法定理から次の公式が導かれる。

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\cdots(1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\cdots(2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\cdots(3)$$

これらの公式を**積を和にする公式**とか略して**積和公式**などという。
これらの公式は右辺を加法定理によって展開し，整理すると左辺が導かれる。

例 1　(3) 式で $\alpha=\beta=\theta$ とおくと $\cos 0 = 1$ より

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\{\cos(2\theta)+\cos 0\} = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

が得られる。

問 1　上の (1) と (2) で $\alpha=\beta=\theta$ とおくことにより，次式を例 1 のようになおせ。

(1) $\sin\theta\cos\theta =$　　　　(2) $\sin^2\theta =$

例 2　$\alpha = 2t$, $\beta = 3t$ のとき，上の公式より

$$\sin(2t)\cos(3t) = \frac{1}{2}\{\sin(5t)+\sin(-t)\} = \frac{1}{2}\{\sin(5t)-\sin(t)\}$$

$$\sin(2t)\sin(3t) = \frac{1}{2}\{\cos(-t)-\cos(5t)\} = \frac{1}{2}\{\cos(t)-\cos(5t)\}$$

$$\cos(2t)\cos(3t) = \frac{1}{2}\{\cos(5t)+\cos(t)\}$$

問 2　次の三角関数の積を例 2 のような三角関数の和の形にせよ。

(1) $\sin(5t)\cos(4t)$
$=$

(2) $\sin(5t)\sin(4t)$
$=$

(3) $\cos(5t)\cos(4t)$
$=$

(4) $\sin(mt)\cos(nt)$
$=$

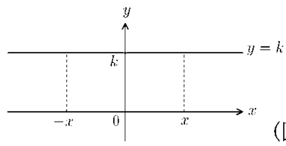
(5) $\sin(mt)\sin(nt)$
$=$

(6) $\cos(mt)\cos(nt)$
$=$

＜偶関数と奇関数１＞

関数 $f(x)$ が $f(-x) = f(x)$ を満たすとき**偶関数**という。また $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき**奇関数**という。

例 (1) 定数 k に対し，$f(x) = k$(定数関数) は，偶関数。(図１)

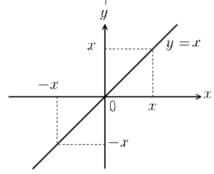


（図１）

(2)$f(x) = x$ のとき

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

より $f(x)$ は奇関数 (図 2)

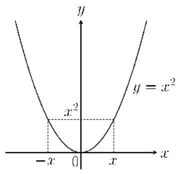


（図２）

(3)$f(x) = x^2$ のとき

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

より $f(x)$ は偶関数 (図 3)

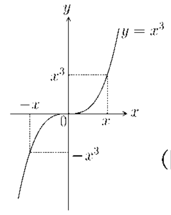


（図３）

(4)$f(x) = x^3$ のとき

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

より $f(x)$ は奇関数 (図 4)

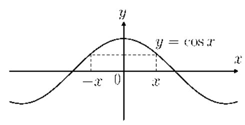


（図４）

(5)$f(x) = \cos x$ のとき

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

より $f(x)$ は偶関数 (図 5)

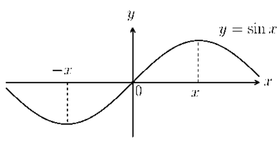


（図５）

(6)$f(x) = \sin x$ のとき

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

より $f(x)$ は奇関数 (図 6)



（図６）

問 次の関数は偶関数か奇関数かどちらであるか答えよ。

(1)$f(x) = x^4$　(2)$f(x) = x^5$　(3)$f(x) = x^6$

(4)$f(x) = x^7$　(5)$f(x) = \cos(2x)$　(6)$f(x) = \sin(2x)$

(7)$f(x) = \cos(3x)$　(8)$f(x) = \sin(3x)$　(9)$f(x) = \sin^2(x)$

＜偶関数と奇関数 2 ＞

例 1 $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x^5$ は共に奇関数であるが、積

$$f_1(x)f_2(x) = x^3 \times x^5 = x^8$$

は偶関数になる。

例 2 $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = \sin x$ は共に奇関数であるが、

積 $f(x) = f_1(x)f_2(x) = x^3 \sin x$ は

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = (-x^3) \times (-\sin x) = x^3 \sin x = f(x)$$

より、積 $f_1(x)f_2(x)$ は偶関数になる。

例 3 $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \cos x$ は共に偶関数であり、

積 $f(x) = f_1(x)f_2(x) = x^2 \cos x$ は

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$$

より、積 $f_1(x)f_2(x)$ は偶関数である。

例 4 $f_1(x) = \sin x$ は奇関数、 $f_2(x) = \cos(3x)$ は偶関数である。

積 $f(x) = f_1(x)f_2(x) = \sin x \cos(3x)$ は

$$f(-x) = \sin(-x) \times \cos(-3x) = (-\sin x) \times \cos(3x) = -\sin x \cos(3x) = -f(x)$$

より、積 $f_1(x)f_2(x)$ は奇関数になる。

問 1 次の関数は偶関数か奇関数か答えよ。

(1) $x^2 \times x^4$　(2) $x^2 \times x^5$　(3) $x^3 \times x^7$

(4) $x \sin(2x)$　(5) $x^2 \cos(3x)$　(6) $x^3 \cos(5x)$

(7) $\sin(2x)\sin(3x)$　(8) $\sin(4x)\cos(3x)$　(9) $\cos(2x)\cos(5x)$

問 2 以下の $\boxed{}$ の中に偶関数か奇関数かどちらかの言葉を記入せよ。

(1) 奇関数 × 奇関数 = $\boxed{}$

(2) 偶関数 × 偶関数 = $\boxed{}$

(3) 奇関数 × 偶関数 = $\boxed{}$

＜ 正弦波のグラフ ＞

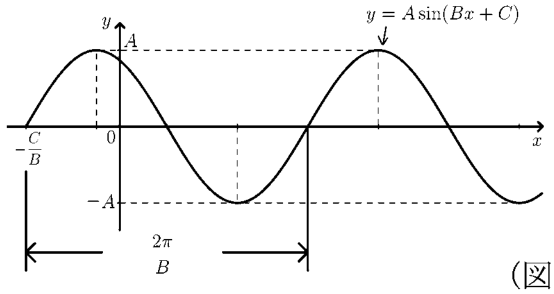
定数 A, B, C に対し，
正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$
のグラフを**正弦波**という。
A, B, C が正の数ならば，グラフは
図１のような周期関数であり，
この場合は

$$\text{周期} = \frac{2\pi}{B}$$

$$\text{振幅} = A$$

$$\text{初期位相} = -\frac{C}{B}$$

となる。



（図１）

例１ 図２の正弦波の式を求めたい。

図より $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{3}{2}\pi$ までが一つの周期であるから，

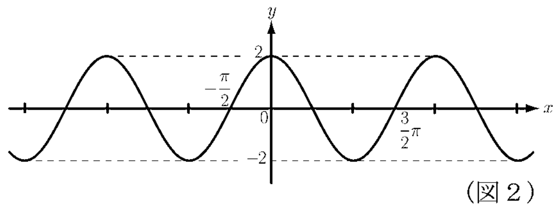
$$\text{周期} = \frac{3}{2}\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 2 (= A)$$

$$\text{初期位相} = -\frac{\pi}{2} \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

より $A = 2, B = 1, C = \dfrac{\pi}{2}$

よって図２は$\boldsymbol{y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$のグラフである。



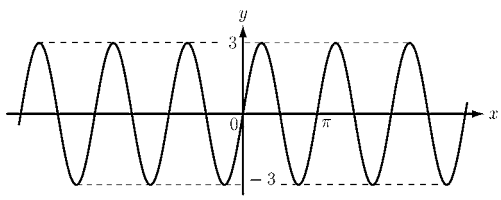
（図２）

例２ 図３の正弦波の式を求めたい。

$$\text{周期} = \pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 3 (= A)$$

$$\text{初期位相} = 0 \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

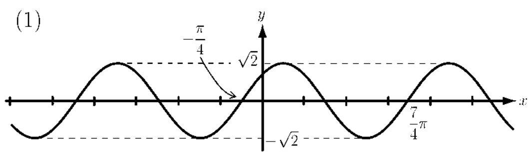


（図３）

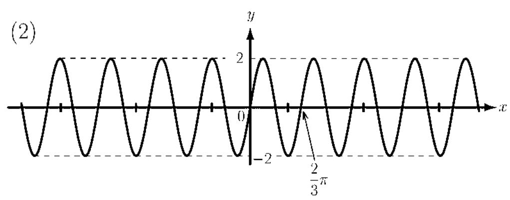
より $A = 3, B = 2, C = 0$ よって図３は$\boldsymbol{y = 3\sin(2x)}$のグラフである。

問　次の正弦波の周期，振幅，初期位相を求め，グラフの式を求めよ。

(1)



(2)

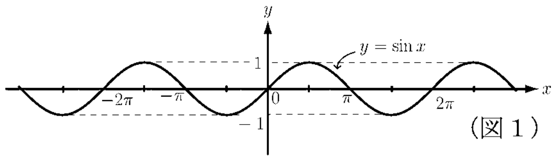


＜同周期正弦波の和＞

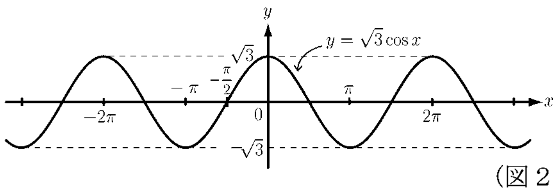
例 1 $y = \sin x$ のグラフは，周期 2π, 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 1)
$y = \sqrt{3}\cos x \left(= \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ のグラフは周期 2π, 振幅 $\sqrt{3}$, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{2}$ の正弦波である。(図 2) この 2 つの正弦波の和は，3 ページの結果より

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

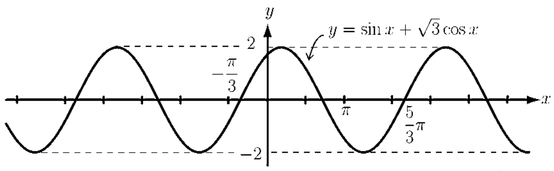
となるから，グラフは周期 2π, 振幅 2, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{3}$ の正弦波である。(図 3)



（図１）



（図２）

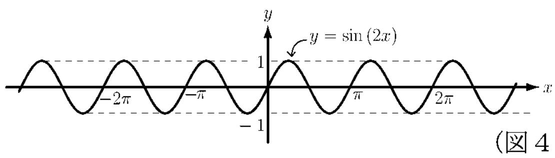


（図３）

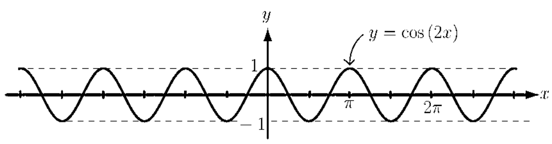
例 2 $y = \sin(2x)$ のグラフは周期 π, 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 4)
$y = \cos(2x) \left(= \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ のグラフは周期 π, 振幅 1, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{4}$ の正弦波である。(図 5) この 2 つの正弦波の和は，3 ページの結果より

$$\sin(2x) + \cos(2x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

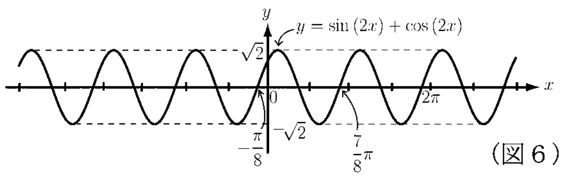
となるから，グラフは周期 π, 振幅 $\sqrt{2}$, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{8}$ の正弦波である。(図 6)



（図４）



（図５）



（図６）

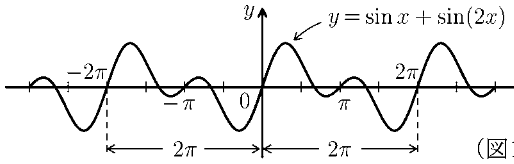
一般に周期 L の 2 つの正弦波の和または差は (周期 L の) 正弦波になる。

問 次の正弦波の周期，振幅および初期位相を求めよ。

(1) $\sin x + \cos x$, (2) $\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x)$, (3) $\sin(3x) - \cos(3x)$

< 異周期正弦波の和 >

例 1 前ページの図より
$y = \sin x$ のグラフは周期 2π の正弦波であり、$y = \sin(2x)$ のグラフは周期 π の正弦波である。
しかし、その和

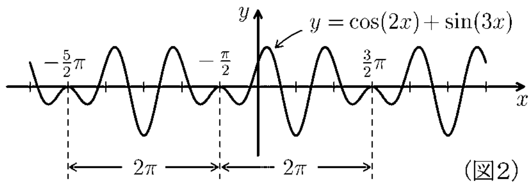


(図1)

(1) $\quad y = \sin x + \sin(2x)$

はもはや正弦波ではない (図 1)。
しかし図 1 を見ると $-2\pi \leqq x \leqq 0$ の範囲の波形と $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲の波形が同じである。つまり (1) のグラフは周期 2π の周期関数である。
前ページの図 4 をよく見ると、$y = \sin(2x)$ のグラフは基本周期が π であるが、2 つの波を一つの波形と考えると、周期 2π の周期関数とも考えられる。$\sin x$ と $\sin(2x)$ が共に周期 2π の周期関数であるから、その和も周期 2π の周期関数になる。

例 2 $y = \cos(2x) + \sin(3x)$ のグラフは図 2 のような周期 2π の周期関数になる。
$\cos(2x)$ と $\sin(3x)$ の周期は以下のようになる。

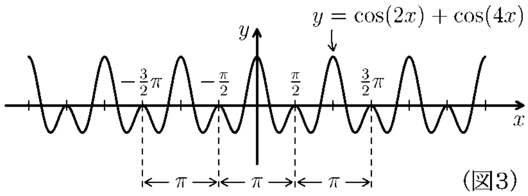


(図2)

	基本周期	倍周期	3 倍周期	
$\cos(2x)$	π	2π	3π	$\cdots$ 2 つの波の周期 2π
$\sin(3x)$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	2π	$\cdots$ 3 つの波の周期 2π

例 3 $y = \cos(2x) + \cos(4x)$ のグラフは図 3 のように周期 π の周期関数になる。

	基本周期	倍周期	
$\cos(2x)$	π	2π	
$\cos(4x)$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\cdots$ 2 つの波の周期 π



(図3)

(注) $\sin(nx)$ や $\cos(nx)$ の基本周期は $\dfrac{2\pi}{n}$ である。

問 次の関数の周期を求めよ。

(1) $\cos(x) + \cos(3x)$ (2) $\sin(2x) + \cos(5x)$ (3) $\cos(3x) + \sin(6x)$

< 三角多項式 1 >

自然数 n と定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ に対し, 関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}
\end{aligned}
$$

を**三角多項式**という。

例 1 前ページの例 1 の関数

$$f(x) = \sin x + \sin(2x)$$

は三角多項式であり, 基本周期は 2π である。また $\sin x$ と $\sin(2x)$ はともに奇関数であるから $f(x)$ も奇関数である。従ってグラフは原点対称になる。

例 2 前ページの例 2 の関数

$$f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$$

は三角多項式であり, 基本周期は 2π である。$f(x)$ は奇関数でも偶関数でもない。

例 3 前ページの例 3 の関数

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(4x)$$

は三角多項式であり, 基本周期は π である。$f(x)$ は偶関数であり y 軸に関して対称なグラフになる。

例 4 $f(x) = \cos^2 x$ は 4 ページの公式より

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

となるので三角多項式であり, 基本周期は π である。$f(x)$ は偶関数であり y 軸に関して対称なグラフになる。

問 次の関数の基本周期を求めよ。また奇関数または偶関数の場合はそのように記せ。

(1) $f(x) = 2 + \sin(2x) + \cos(2x)$　　(2) $f(x) = \sin^2 x$

＜三角多項式 2 ＞

例題　右の図 1，図 2，図 3 のグラフはどの関数のグラフであるか。下の (1) から (6) の中から選べ。

(1)　$y = 3 + \sin x + \sin(2x)$

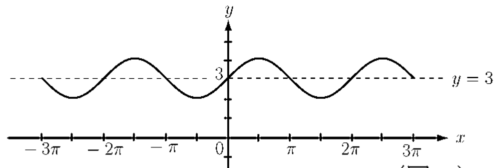
(2)　$y = 1 + \cos(2x)$

(3)　$y = -3 + \cos(2x) + \cos(4x)$

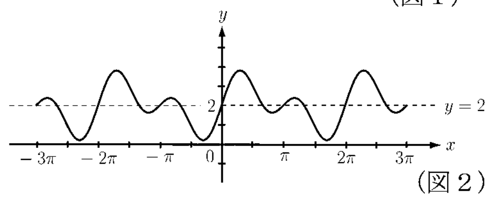
(4)　$y = 2 + \sin x + \sin(2x)$

(5)　$y = 3 + \sin x$

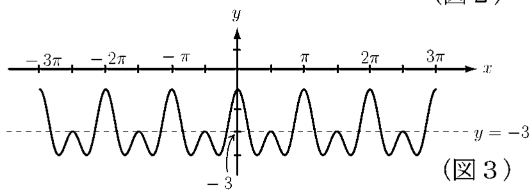
(6)　$y = 2 + \cos(2x) + \cos(4x)$



（図１）



（図２）



（図３）

(解答) 図１は正弦波を y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであるから (5) の関数である。
図２は 10 ページ図１の波形を y 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから (4) の関数である。
図３は 10 ページ図３の波形を y 軸方向に -3 だけ平行移動したものであるから (3) の関数である。

(答) 図１:$y = 3 + \sin x$　，**図２**:$y = 2 + \sin x + \sin(2x)$
図３:$y = -3 + \cos(2x) + \cos(4x)$

問　右の図４，図５，図６のグラフの式を下の (1) ～ (6) の中から選べ。

(1)　$y = 2 + \sin(2x)$

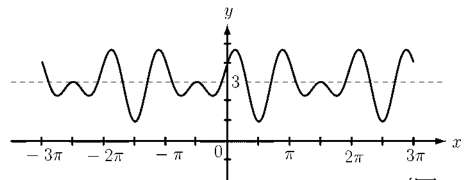
(2)　$y = 3 + \sin x + \sin(2x)$

(3)　$y = 3 + \cos(2x) + \sin(3x)$

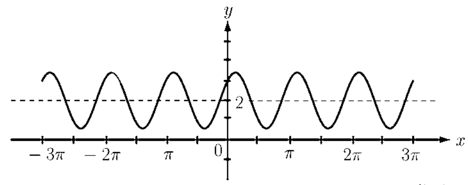
(4)　$y = 2 + \sin(2x) + \cos(2x)$

(5)　$y = -2 + \sin x + \sin(2x)$

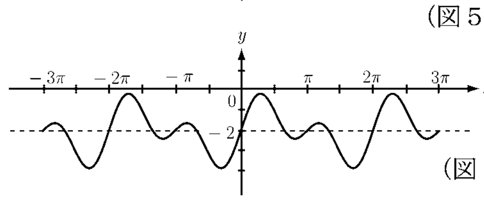
(6)　$y = -2 + \cos(2x) + \sin(3x)$



（図４）



（図５）



（図６）

＜三角多項式 3 ＞

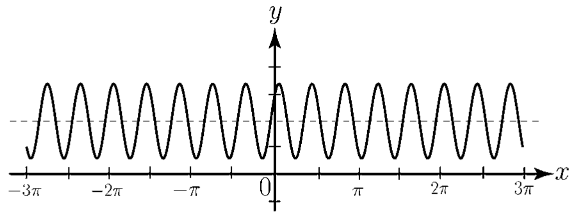
例題 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ が

$$f(x) = 3\cos x - \cos(3x) + \frac{3}{5}\cos(5x) - \frac{3}{7}\cos(7x)$$

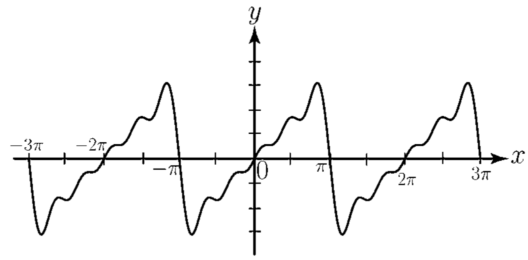
$$g(x) = 2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$$

$$h(x) = 2 + \cos(5x) + \sin(5x)$$

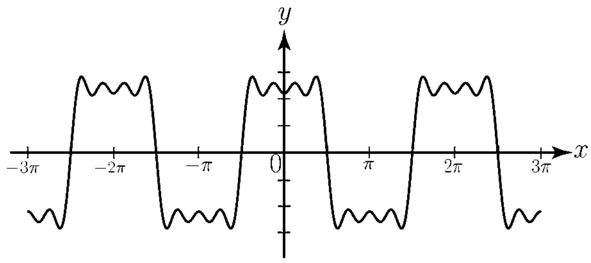
であるとき，$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ のグラフは右の図 1 〜 図 3 のどれか答えよ。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

(解答)

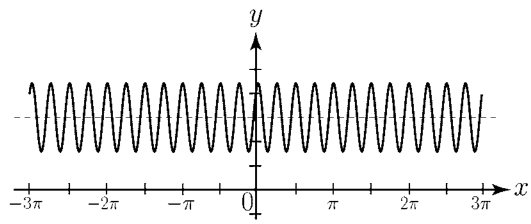
$f(x)$ は偶関数である。6 ページの例より偶関数のグラフは y 軸に関して対称であるから，$f(x)$ のグラフは図 3 である。
$g(x)$ は奇関数であり，奇関数のグラフは原点に関して対称であるから，$g(x)$ のグラフは図 2 である。
$h(x)$ は 9 ページのように正弦波の波形であるから，図 1 である。

問 以下の関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ のグラフを右の図 4 〜 図 6 からえらべ。

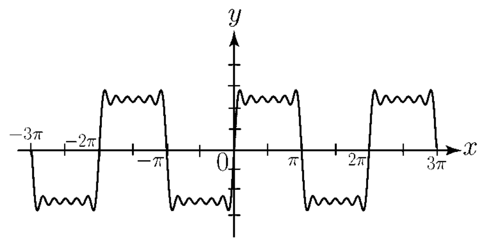
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) - \frac{4}{49\pi}\cos(7x)$$

$$g(x) = 3\sin x + \sin(3x) + \frac{3}{5}\sin(5x) + \frac{3}{7}\sin(7x) + \frac{1}{3}\sin(9x) + \frac{3}{11}\sin(11x)$$

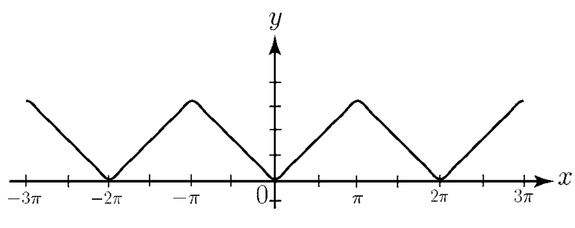
$$h(x) = 3 + \cos(8x) + \sin(8x)$$



(図 4)



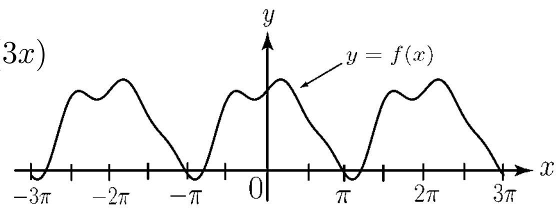
(図 5)



(図 6)

< 三角多項式 4 >

例1 $f(x) = 2 + 1.7\cos x - 0.5\cos(2x) + 0.4\sin(3x)$
のグラフは図 1 の波形である。このとき



(図 1)

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = 1.7$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx = 0$

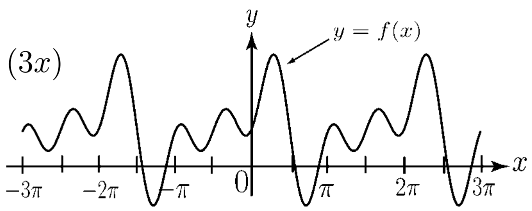
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = -0.5$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx = 0.4$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx = 0$

n が 4 以上の自然数に対し

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 \ , \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

が成り立つ (計算は次ページ以降で説明する)。

例2 $f(x) = 1.5 + 1.3\cos x + 1.2\sin(2x) - 1.25\cos(3x)$
のグラフは図 2 の波形である。このとき



(図 2)

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 1.5$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$

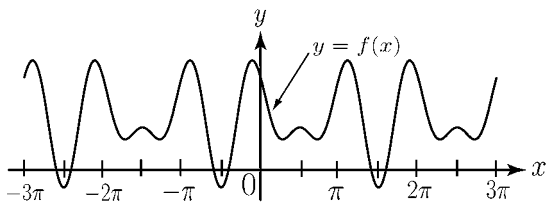
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = 1.3$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx = 1.2$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = 0$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx = -1.25$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$ $(n = 4)$

が成り立つ。

問 $f(x)$ は三角多項式で、



(図 3)

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2.1$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = 1.6$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx = -1.2$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$ $(n = 4)$

が成り立つ。$f(x)$ の式を類推せよ (注. $y = f(x)$ のグラフは図 3 である)。

＜ 積分 1 ＞

前ページのように三角多項式は積分することによって式が求まる。
その仕組みを以後のページで解説する。まず積分の復習をしよう。
[不定積分の定義]

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C} \text{(不定積分)}$$

例 1 $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ より $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

$\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ より $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\dfrac{d}{dx}(\sin(2x)) = 2\cos(2x)$ より $\displaystyle\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

$\dfrac{d}{dx}(\cos(3x)) = -3\sin(3x)$ より $\displaystyle\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq 0$)

(1) $\displaystyle\int \cos(4x)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(5x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \cos(nx)dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(nx)dx =$

例 2 三角関数の積の不定積分は積和公式 (5 ページ) によって以下のようにする。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \right\} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(3x)dx = \int \left\{ \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos(5x) \right\} dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin(5x) + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

=

(2) $\displaystyle\int \cos^2(2x)dx$

=

(3) $\displaystyle\int \sin^2(3x)dx$

=

(4) $\displaystyle\int \sin(3x)\sin(2x)dx$

=

(5) $\displaystyle\int \cos(2x)\cos(4x)dx$

=

(6) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(5x)dx$

=

＜ 積分 2 ＞

[定積分の定義]

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

例

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \left\{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin(2\pi)\right\} - \left\{0 + \frac{1}{4}\sin 0\right\} = \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\sin(3x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin(5x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$

$\displaystyle= \left\{\frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{10}\sin(5\pi)\right\} - \left\{\frac{1}{2}\sin(-\pi) - \frac{1}{10}\sin(-5\pi)\right\} = 0$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(4x)dx =$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sin(4x)dx =$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\cos(4x)dx =$

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(4x)dx =$

＜ 積分 3 ＞

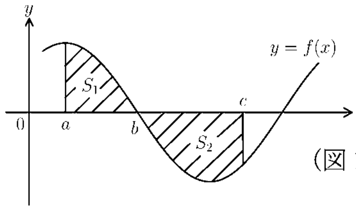
関数 $y=f(x)$ のグラフが図１の場合,
斜線部分の面積を S_1, S_2 とすると

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 \ , \ \int_b^c f(x)dx = -S_2$$

となる。すなわち

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = S_1 - S_2$$

となる。この性質を使うと以下の事がわかる。

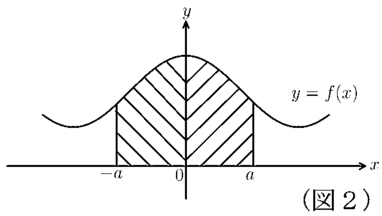


（図１）

［１］$f(x)$ が偶関数の場合は，グラフは
図２のように y 軸対称になるから

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx} \text{ (偶関数の積分)}$$

となる。

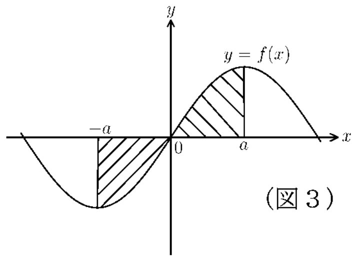


（図２）

［２］$f(x)$ が奇関数の場合は，グラフは
図３のように原点対称になるから

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx = 0} \text{ (奇関数の積分)}$$

となる。



（図３）

例１ 奇関数 × 奇関数 = 偶関数だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\sin(3x)dx = 2\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(3x)dx = 2\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos(5x)\right\}dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin(5x)\right]_0^{\pi} = 2\left\{\left(\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{10}\sin(5\pi)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(0) - \frac{1}{10}\sin(0)\right)\right\} = 0$$

例２ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(2x)dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\cos(5x)dx = 0$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(3x)dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\sin(3x)dx =$

＜積分 4＞

問 1 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(4x)dx$ =

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(5x)dx$ =

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\sin(4x)dx$ =

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\cos(4x)dx$ =

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\cos(4x)dx$ =

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\cos(5x)dx$ =

問 2 自然数 n と m $(n \neq m)$ に対し，次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx$ =

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx$ =

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$ =

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx$ =

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx$ =

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$ =

< 積分 5 >

部分積分の公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

例 1

$$\int_0^\pi x\cos(3x)dx = \int_0^\pi x \times \left(\frac{1}{3}\sin(3x)\right)' dx$$
$$= \left[x \times \frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \frac{1}{3}\sin(3x)dx$$
$$= \left\{\frac{\pi}{3}\sin(3\pi) - 0\right\} - \int_0^\pi \frac{1}{3}\sin(3x)dx$$
$$= 0 - \left[-\frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^\pi = \left[\frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{9}\cos(3\pi) - \frac{1}{9}\cos 0 = -\frac{2}{9}$$

例 2

$$\int_0^\pi x\sin(3x)dx = \int_0^\pi x\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)' dx$$
$$= \left[x\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)dx$$
$$= -\frac{\pi}{3}\cos(3\pi) - 0 + \int_0^\pi \frac{1}{3}\cos(3x)dx$$
$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9}\sin(3\pi) - \frac{1}{9}\sin(0) = \frac{\pi}{3}$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^\pi x\cos(4x)dx =$

(2) $\int_0^\pi x\sin(4x)dx =$

(3) $\int_0^\pi x\cos(5x)dx =$

(4) $\int_0^\pi x\sin(5x)dx =$

< 積分 6 >

例題　n を自然数とするとき

$$I_n = \int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$$

を求めよ。

(解答)　前ページのように部分積分の公式を使う。$\sin(n\pi) = 0$ より

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)' dx \\
&= \left[x \times \frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)' \times \frac{1}{n}\sin(nx)dx \\
&= \frac{\pi}{n}\sin(n\pi) - 0 - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)dx \\
&= -\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n^2}\{\cos(n\pi) - \cos(0)\}
\end{aligned}$$

ここで $\cos 0 = 1$ であるが，$\cos(n\pi)$ は n が奇数か偶数かによって異なる。

(1) n が奇数のとき $\cos(n\pi) = -1$ より

$$I_n = \frac{1}{n^2}\{-1-1\} = -\frac{2}{n^2}$$

(2) n が偶数のとき $\cos(n\pi) = 1$ より

$$I_n = \frac{1}{n^2}\{1-1\} = 0$$

問　自然数 n に対し，次の定積分の値を求めよ。

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin(nx)dx$　　(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx$

＜三角多項式の係数１＞

例１ n を自然数とするとき $\sin(n\pi)=0$, $\cos(-n\pi)=\cos(n\pi)$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\sin(-nx) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(n\pi)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cos(-n\pi) = 0$$

例２ $f(x)=7+1.5\cos x+2.4\sin(2x)-3.5\cos(3x)$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}7dx + 1.5\times\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx + 2.4\times\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)dx - 3.5\times\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)dx$$

$$= \left[7x\right]_{-\pi}^{\pi} + 1.5\times 0 + 2.4\times 0 - 3.5\times 0$$

$$= 7\pi - (-7\pi) = 14\pi$$

例３ $f(x)=3.1-0.7\sin x+1.3\cos(2x)+5.8\cos(4x)$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}3.1dx - 0.7\times\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx + 1.3\times\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)dx + 5.8\times\int_{-\pi}^{\pi}\sin(4x)dx$$

$$= \left[3.1x\right]_{-\pi}^{\pi} - 0.7\times 0 + 1.3\times 0 + 5.8\times 0 = 6.2\pi$$

問 $f(x)$ が以下の場合に $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ を求めよ。（ただし n は自然数）

(1) $f(x) = 5.2 - 3.1\cos x + 2.7\sin(5x)$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx =$

(2) $f(x) = -3.7 - 4.9\cos(3x) - 6.8\sin(7x)$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx =$

(3) $f(x) = a_0 + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx =$

< 三角多項式の係数 2 >

18 ページおよび前ページより自然数 $n, m (n \neq m)$ に対し次式が成り立つ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0$$

例 $f(x) = 6 + 7\cos x - 4\sin x + 5\cos(2x) - 8\sin(3x)$ に対し

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = 6\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + 7\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx - 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx + 5\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\cos x dx - 8\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\cos x dx$$
$$= 6 \times 0 + 7 \times \pi - 4 \times 0 + 5 \times 0 - 8 \times 0 = 7\pi$$

問 例と同じ関数 $f(x)$ に対し，次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx =$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx =$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx =$

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(4x)dx =$

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(4x)dx =$

(8) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(5x)dx =$

＜三角多項式の係数 3 ＞

例 3 次の三角多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$$

に対し，前ページの公式から

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \times \int_{-\pi}^{\pi} 1dx + a_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + a_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)dx$$
$$+ b_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx + a_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)dx + b_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)dx$$
$$= a_0 \times 2\pi + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times 0 + b_2 \times 0 + a_3 \times 0 + b_3 \times 0 = 2\pi a_0$$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = a_0 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)dx + a_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos(2x)dx + b_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos(2x)dx$$
$$+ a_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)dx + b_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\cos(2x)dx + a_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\cos(2x)dx + b_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\cos(2x)dx$$
$$= a_0 \times 0 + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times \pi + b_2 \times 0 + a_3 \times 0 + b_3 \times 0 = \pi a_2$$

問 例と同じ $f(x)$ に対し，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx =$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx =$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx =$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x) =$

(5) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx =$

(6) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(4x) =$

(7) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(4x)dx =$

(8) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(5x) =$

< 三角多項式の係数 4 >

例 3 次の三角多項式

$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x)$

に対し，前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x) = \pi a_2$$

であるから，係数 a_0 と a_2 は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx$$

と表される。

問 1 例と同じ三角多項式 $f(x)$ に対し，以下の係数を
例のような $f(x)$ に関する積分の形で表せ。

(1) $a_1 =$

(2) $b_1 =$

(3) $b_2 =$

(4) $a_3 =$

(5) $b_3 =$

問 2 n 次の三角多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} \end{aligned}$$

に対し，各係数 $a_0, a_k, b_k (1 \leqq k \leqq n)$ を例のような
$f(x)$ に関する積分の形で表せ。

(1) $a_0 =$

(2) $a_k =$

(3) $b_k =$

< フーリエ級数１ >

三角多項式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

は周期 2π の周期関数である。前ページの結果より各係数は

$$(*) \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ , \ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \ , \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx} \quad (k = 1)$$

で定まる。一方１３ページの図５や図６を見ると，一般の周期 2π の周期関数も三角多項式で近似できることが予想される。そこで一般の周期 2π の周期関数 $f(x)$ に対し，$(*)$ で定められた係数 a_0, a_k, b_k をとるとき，無限級数

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \cdots \\ & \quad = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \end{aligned}$$

は $f(x)$ を近似としていると考え，

$$\boxed{f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}}$$

と書き，発見者の名前をつけて $f(x)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) という。
また a_0, a_k, b_k を**フーリエ係数**という。

例 $f(x)$ が偶関数のときは

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

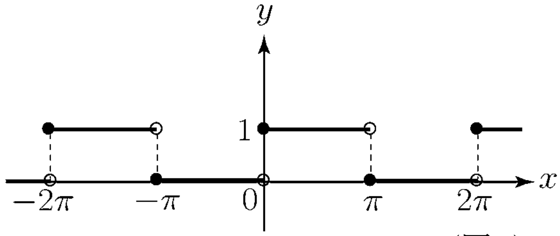
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$$

より $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

問 $f(x)$ が奇関数の場合にフーリエ係数とフーリエ級数を例のように表せ。

< フーリエ級数 2 >



(図1)

例 $f(x)$ が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。

$-\pi \leqq f(x) \leqq \pi$ の範囲では

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leqq x < \pi \\ 0 & : -\pi \leqq x < 0 \end{cases}$$

である。フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dx = \frac{1}{2\pi}\big[x\big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k}\cos(0)\right) = \begin{cases} 0 & : k \text{ が偶数} \\ \dfrac{2}{k\pi} & : k \text{ が奇数} \end{cases}$$

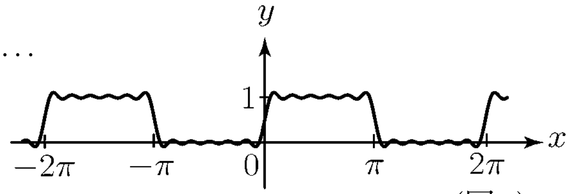
であるからフーリエ級数は

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x) + \frac{2}{7\pi}\sin(7x)$$

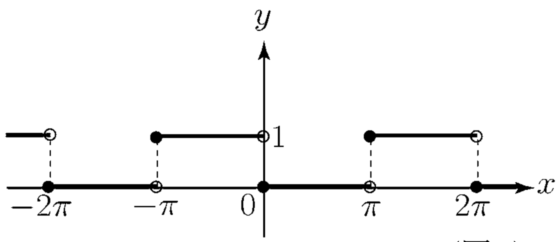
$$+ \frac{2}{9\pi}\sin(9x) + \frac{2}{11\pi}\sin(11x) + \cdots$$

となる。右図（図2）はこのフーリエ級数の $k = 11$ までの部分和のグラフである。



(図2)

問 $f(x)$ が図 3 の周期関数であるとき、$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。



(図3)

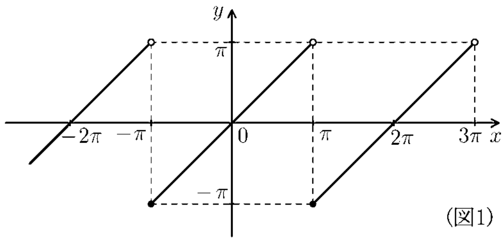
＜フーリエ級数 3＞

例 $f(x)$ が図 1 のような周期関数のとき
$-\pi \leqq x < \pi$ の範囲では

$$f(x) = x$$

であるから、$f(x)$ は奇関数である。
25 ページの結果より奇関数の場合は
フーリエ係数は

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0 \quad (k \geqq 1)$$



(図1)

であり、奇関数 × 奇関数 = 偶関数だから

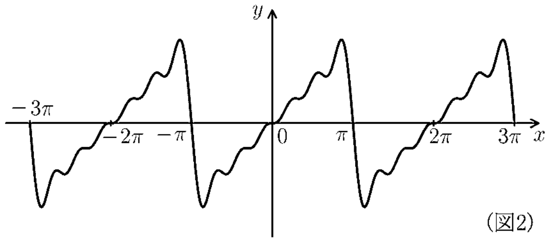
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx$$

となり、20 ページの結果から

$$\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{k} & : k \text{ が奇数} \\ -\frac{\pi}{k} & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

であるから

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & : k \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{k} & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$



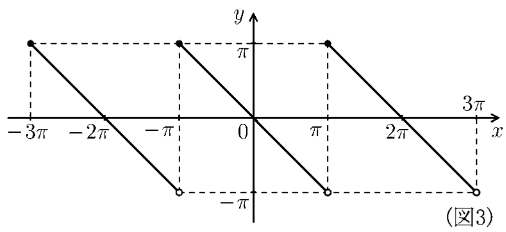
(図2)

となり、フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} \\ &= \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{4}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) - \frac{2}{6}\sin(6x) + \cdots \\ &= 2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) - \frac{1}{3}\sin(6x) + \cdots \end{aligned}$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数の $k = 6$ までの部分和の
グラフである。

問 $f(x)$ が図 3 の周期関数であるとき、
$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。



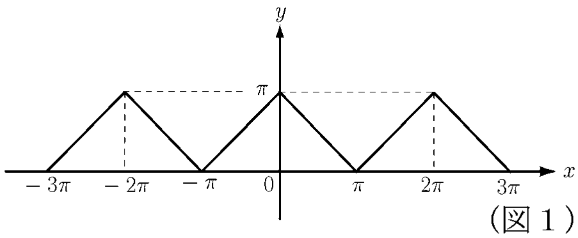
(図3)

< フーリエ級数 4 >

例 $f(x)$ が図 1 のような周期関数のとき $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲では

$$f(x) = \pi - |x|$$

であるから，$f(x)$ は偶関数である。



（図 1 ）

25 ページの例から偶関数の場合のフーリエ級数は

$$b_k = 0 \ , \ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - x)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(kx)}{k}dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 - 0 + \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

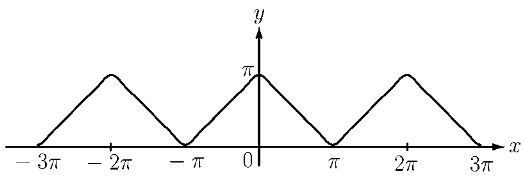
$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}\right\} = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & : k \text{ が奇数} \\ 0 & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる。よって $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}$$

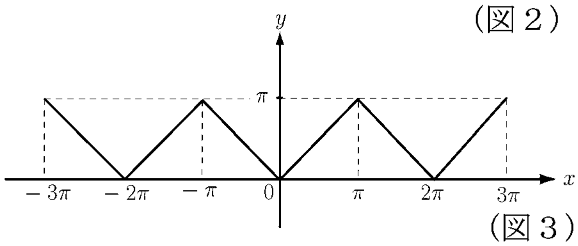
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \cdots\right\}$$

となる。
図 2 のグラフはこのフーリエ級数の $k = 7$ までの部分和のグラフである。



（図 2 ）

問 $f(x)$ が図 3 の周期関数であるとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。



（図 3 ）

＜フーリエ級数 5＞

このページでは計算で求めたフーリエ級数が正しいかどうかを Mathematica で確かめる方法を示す。

例1 積分 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)dx = \dfrac{2}{3}$ は右の [入力 1] のように書いて [Shift]+$\boxed{\hookleftarrow}$ を押すと [出力 1] の結果がでる。

$\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{x} * \mathrm{Sin}[3 * \mathrm{x}]\mathrm{dx}\right)/\pi \cdots$ [**入力** 1]

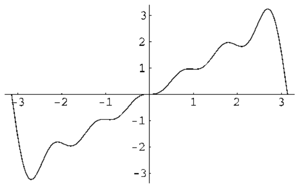
$\dfrac{2}{3}$ .... [**出力** 1]

例2 27 ページの $f(x) = x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に対するフーリエ級数の $n = 6$ までの部分和を

$$S(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{6}\sin(6x)\right)$$

とする。$S(x)$ が $f(x) = x$ のフーリエ級数になっていることを確認するためにはグラフを描いてみればよい。$S(x)$ のグラフが $f(x)$ を近似していれば正しいことがわかる。$S(x)$ のグラフを $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で描かせるためには [入力 2] のプログラムを実行 (Shift＋リターン) すればよい。その結果が図 1 である。

(入力2)
```
S[x_ ] := 2 * (Sin[x] − (1/2) * Sin[2 * x] + (1/3) * Sin[3 * x]−
        (1/4) * Sin[4 * x] + (1/5) * Sin[5 * x] − (1/6) * Sin[6 * x]);
Plot[{S[x]},  {x, −π, π}]
```

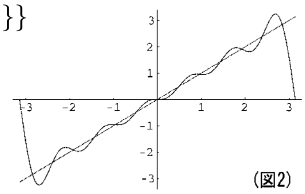


(図1)

$f(x) = x$ と $S(x)$ のグラフを同時に描かせるためには (入力 3) のプログラムを実行すればよい。その出力結果が図 2 である。

(入力3)
```
f[x_ ] := x;
S[x_ ] := 2 * (Sin[x] − (1/2) * Sin[2 * x] + (1/3) * Sin[3 * x]−
        (1/4) * Sin[4 * x] + (1/5) * Sin[5 * x] − (1/6) * Sin[6 * x]);
Plot[{f[x], S[x]}, {x, −π, π},  PlotStyle−> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```

(注) 入力 3 で PlotStyle−> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 0, 1]}} は $f(x)$ のグラフを赤, $S(x)$ のグラフを青でディスプレイ上に表示するための命令である。これを省略すると、両方とも黒になる。



(図2)

問 26 ページの例の関数 $f(x) = \begin{cases} 1 : 0 \leqq x < \pi \\ 0 : -\pi \leqq x < 0 \end{cases}$ とそのフーリエ級数の $n = 11$ までの部分和のグラフを $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で同時に表示したい。プログラムと出力結果をプリントアウトせよ。

(ヒント)Mathematica には $f(x)$ に相当する関数はない。そのかわりに

$$\mathrm{Sign}[x] = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

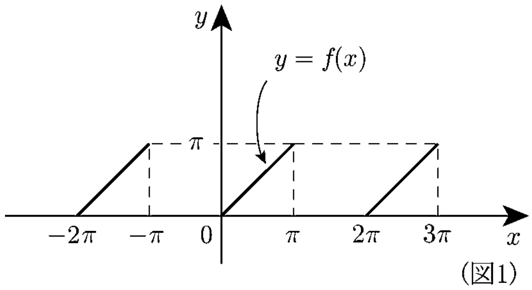
を用いて f(x) = Sign[1 + Sign[x]] とおく。

＜ フーリエ級数 6 ＞

例 $f(x)$ が図 1 のような周期関数のとき $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲では

$$f(x) = \begin{cases} x: & 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0: & -\pi \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

となるのでフーリエ係数は



(図1)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{\cos(k\pi)}{k}$$

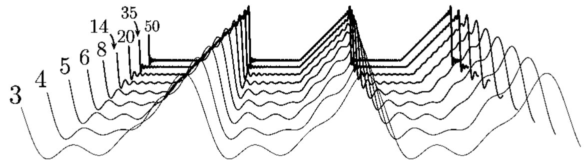
となるのでフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(x)$ は

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}\right)\cos(kx) - \left(\frac{\cos(k\pi)}{k}\right)\sin(kx)\right\}$$

となる。

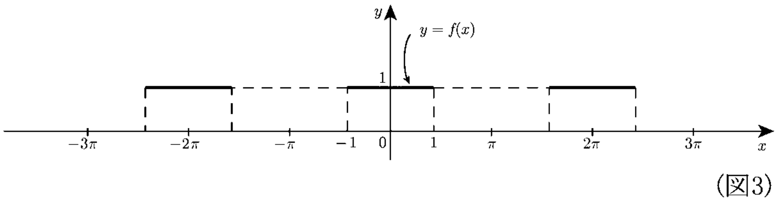
図 2 では $n = 3, 4, 5, 6, 8, 14, 20, 35, 50$ のときの $S_n(x)$ のグラフを $-3\pi \leqq x \leqq 3\pi + 0.5$ までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。



(図2)

問 $f(x)$ が図 3 のような周期関数のとき $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲では

$$f(x) = \begin{cases} 0: & 1 < x \leqq \pi \\ 1: & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0: & -\pi \leqq x < -1 \end{cases}$$



(図3)

となる。$f(x)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(x)$ を求め，例のように $\sum$ で表せ。

＜ フーリエ級数 7 ＞

関数 $f(x)$ に対するフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}$$

とする。フーリエ級数 $S_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ は元の関数 $f(x)$ と一致するかどうかは場合によって異なる。

例1 $f(x)$ が前ページの例のような連続な周期関数のとき，$f(x)$ と第 7 部分和 $S_7(x)$ のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に，この場合は全ての実数 x でフーリエ級数と元の関数 $f(x)$ が一致している。つまり

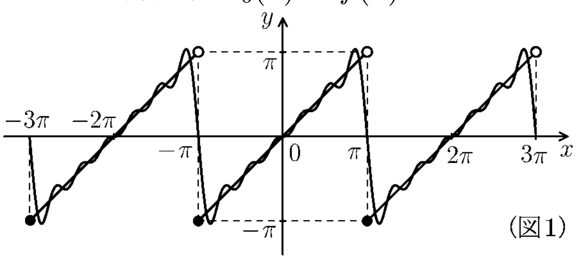
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} = S_\infty(x)$$

が全ての実数 x で成り立つ。

例2 $f(x)$ が 27 ページの例の関数の場合，$x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots$ で $f(x)$ は不連続になる。図 1 は $n = 6$ までの部分和 $S_6(x)$ と $f(x)$ のグラフを重ねて表したものである。このグラフでは $x = \pi$ のとき

$f(\pi) = -\pi$, $S_6(\pi) = 0$

である。実際フーリエ級数 $S_\infty(x)$ は



(図1)

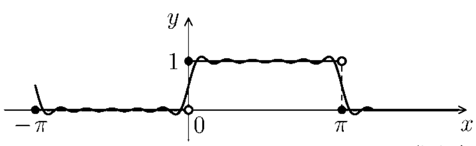
$$S_\infty(x) = 2\left\{\frac{1}{1}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{6}\sin(6x) + \cdots\right\}$$

であるが，$\sin(n\pi) = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから $S_\infty(\pi) = 0$ より $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$ である。実際

$$f(n\pi) = -\pi \quad , \quad S_\infty(n\pi) = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$$

となる。しかし，それ以外の x では $f(x) = S_\infty(x)$ となる。

問 $f(x)$ が 26 ページの例の関数のとき，フーリエ級数の第 11 部分和 $S_{11}(x)$ と $f(x)$ のグラフは図 2 のようになる。このとき，フーリエ級数 $S_\infty(x)$ と元の関数 $f(x)$ の $x = 0, \pi$ のときの値を求めよ。

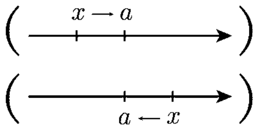


(図2)

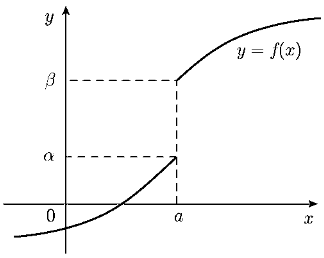
$f(0) =$ 　　　　　　, $S_\infty(0) =$

$f(\pi) =$ 　　　　　　, $S_\infty(\pi) =$

< 左極限・右極限 >



変数 x が a より小さい値から a に近づくことを $x \to a-0$,
変数 x が a より大きい値から a に近づくことを $x \to a+0$,
と表す。関数 $f(x)$ が右図のような場合は



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \quad \text{(左側極限値)}$$

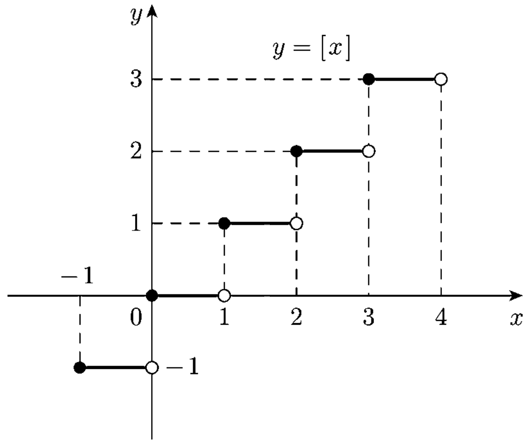
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta \quad \text{(右側極限値)}$$

となる。このとき α を $x=a$ における $f(x)$ の**左側極限値**, β を $x=a$ における $f(x)$ の**右側極限値**という。このワークブックでは

$$\boxed{\lim_{x \to a-0} f(x) = f_{-}(a) \quad \text{(左側極限値)}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a+0} f(x) = f_{+}(a) \quad \text{(右側極限値)}}$$

という記号で表すことにする。



例 関数 $f(x)$ がガウス記号 $[x]$(x 以下の最大整数) であるとき，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。このとき $x=1$ における左右の極限値は

$$f_{-}(1) = 0 \quad , \quad f_{+}(1) = 1$$

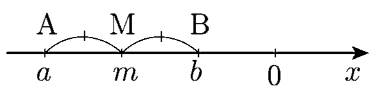
である。

問 1 例の場合に次の値を求めよ。

① $f_{-}(0)$　　② $f_{+}(0)$　　③ $f_{-}(2)$　　④ $f_{+}(2)$

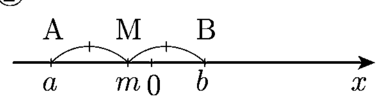
問 2 数直線上の 2 点 A(a)，B(b)　($a<b$) が次の各場合に，A と B の中点 M(m) の座標 m を a と b で表せ。

①



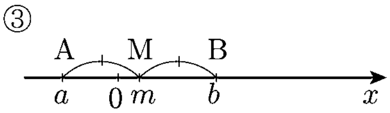
$m=$

②



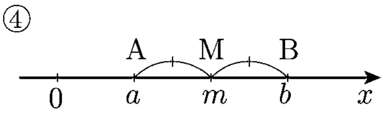
$m=$

③



$m=$

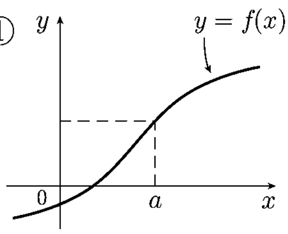
④



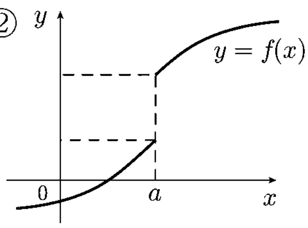
$m=$

問 3 $y=f(x)$ のグラフが次の各場合に $\frac{1}{2}(f_{-}(a)+f_{+}(a))$ の値を y 軸上に図示せよ。

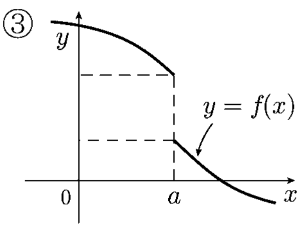
①



②



③



＜フーリエ級数の収束＞

$f(x)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(x)$ のフーリエ級数の第 n 部分和は

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}$$

である。ただし係数 a_0, a_k, b_k は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

である。このとき次の定理が成り立つ。

[定理]　すべての x $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に対し次式が成り立つ。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}}$$

(フーリエ級数の収束)

(注) $\left(\begin{array}{l}\text{正確に言うと関数 } f(x) \text{ には ”区分的になめらか ”という条件が必要}\\ \text{だが、その定義は複雑なので省略する。普通の関数は全てこの条件}\\ \text{を満足すると思ってよい。}\end{array}\right)$

この定理の右辺 $\dfrac{1}{2}\Big(f_-(x) + f_+(x)\Big)$ は左側極限値と右側極限値の平均である。

前ページ問 3 の結果より、

$f(x)$ が連続関数のとき $S_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ である。

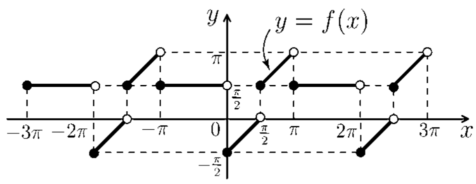
$f(x)$ が不連続関数のとき極限値 $S_\infty(x)$ は左側極限値と右側極限値の中点である。

この定理を

$$\boxed{S_\infty(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}} \text{(フーリエ級数の収束)}$$

と表すこともある。

例　$f(x)$ が右図のような周期関数のとき $f(x)$ のフーリエ級数を $S_\infty(x)$ とすると



$$S_\infty(-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left\{f_-(-\tfrac{\pi}{2}) + f_+(-\tfrac{\pi}{2})\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$S_\infty(\pi) = \frac{1}{2}\left\{f_-(\pi) + f_+(\pi)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{3\pi}{4}$$

問　例の場合に以下の値を求めよ。

(1)$S_\infty(\frac{3\pi}{2})$　　(2)$S_\infty(0)$　　(3)$S_\infty(\frac{\pi}{2})$

< フーリエ級数の部分和 >

前ページの定理「フーリエ級数の収束」の厳密な証明は大変複雑なので省略する。興味ある読者は「フーリエ解析」等の専門書を読んでほしい。
これから説明する話 (P.34〜P.50) は「フーリエ級数の収束」の様子をできるだけ直感的に解説しようとするものである。この解説の中に応用上重要な「オイラーの公式」,「たたみこみ」,「デルタ関数」等の概念の説明を含めたので，それらを理解するつもりで読んでいってほしい。

$f(x)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(x)$ のフーリエ級数 a_0, a_k, b_k $(k = 1)$ を t に関する積分

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

で表すことにする。このとき $f(x)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(x)$ は

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt\,\cos(kx) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt\,\sin(kx)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\boxed{}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(\boxed{}\right)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\boxed{}\right)\right\}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

と表される。ここで

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$$

である。
この関数 $D_n(t)$ を**ディリクレ核** (Dirichlet kernel) と呼ぶ。

問 上記の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

< オイラーの公式１ >

自然対数の底 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(= 2.718\cdots)$ に対し，指数関数 e^x をマクローリン展開によって展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \big(= \exp(x)\big)$$

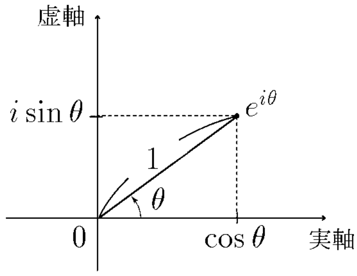
となる。この右辺を $\exp(x)$ と書く場合もある。Z が複素数の場合の指数関数 e^Z を $\exp(Z)$ で定義する。虚数単位 i と実数 θ に対し

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

となる。この式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad \text{(オイラーの公式)}$$

を**オイラーの公式**という。複素平面で表すと右図のようになる。



問１　次の複素数を $x + iy$ (x と y は実数) の形にし，できるだけ簡単にせよ。

(1) $e^{2\pi i}$　　(2) $e^{-\pi i}$　　(3) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

(4) $e^{\frac{\pi}{3}i}$　　(5) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$　　(6) $e^{\frac{3}{4}\pi i}$

問２　実数 θ に対し $\left|e^{i\theta}\right|$ の値を求めよ。(ただし $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ である)

$\left|e^{i\theta}\right| =$

問３　実数 θ に対し三角関数の性質 $\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いて次式を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

$e^{-i\theta} =$

問４　オイラーの公式と問３の結果をつかって次式を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ で表せ。(分母は実数化せよ)

$\cos\theta =$　　　　　　　　，　$\sin\theta =$

< オイラーの公式 2 >

実数 α , β と整数 n に対し , 次の指数法則が成立する。

$$\boxed{(1)\ e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)} \qquad (2)\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=e^{i(\alpha-\beta)} \qquad (3)(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha}}$$ (指数法則)

<(2) の証明>　三角関数の加法定理より

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)}{(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\beta-i\sin\beta)}$$

$$=\frac{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)}{1}=e^{i(\alpha-\beta)}$$ (証明終)

問 1　指数法則の (1) を証明せよ。

例 1　実数 t に対し次式が成り立つ。

$$(1)\frac{1+e^{8ti}}{e^{4ti}}=\frac{1}{e^{4ti}}+\frac{e^{8ti}}{e^{4ti}}=e^{-4ti}+e^{4ti}=2\cos(4t)$$

$$(2)(e^{8ti}-1)\times e^{-4ti}=e^{4ti}-e^{-4ti}=2i\sin(4t)$$

問 2　実数 t に対し次式を例 1 のようになおせ。

(1) $\dfrac{1+e^{10ti}}{e^{5ti}}$　　(2) $(e^{6ti}-1)\times e^{-3ti}$

例 2

$$e^{-6ti}\times\frac{1-e^{14ti}}{1-e^{2ti}}=\frac{e^{-6ti}-e^{8ti}}{1-e^{2ti}}=\frac{(e^{-6ti}-e^{8ti})\times e^{-ti}}{(1-e^{2ti})\times e^{-ti}}$$

$$=\frac{e^{-7ti}-e^{7ti}}{e^{-ti}-e^{ti}}=\frac{e^{7ti}-e^{-7ti}}{e^{ti}-e^{-ti}}=\frac{2i\sin(7t)}{2i\sin t}=\frac{\sin(7t)}{\sin t}$$

問 3　実数 t に対し次式を例 2 のようになおせ。

$$e^{-8ti}\times\frac{1-e^{18ti}}{1-e^{2ti}}$$

< 三角数列の和 >

例 1 初項 $a(\neq 0)$, 公比 $r(\neq 1)$ の等比数列の第 n 項までの和は

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

である。

問 1 $a(\neq 0)$, $r(\neq 1)$ なる定数 a , r と自然数 $n(\geqq 1)$ に対し , 次式を求めよ。

(1) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$
$=$

(2) $r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$
$=$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ar^k =$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} r^k =$

例 2 三角数列 $\{\cos(kt)\ ;\ k \geqq 1\}$ の第 n 項までの和 S

$$S = \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(nt) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

を求めたい。33 ページの問 4 より

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

となる。この式を使うと

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (e^{it})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (e^{-it})^k$$

S は等比数列の和として表される。

問 2 実数 $t(\neq 0)$ に対し次式を等比数列の和として求め ,
複素指数 e^{it} を用いた分数で表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e^{it})^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k$

問 3 0 でない実数 t に対し , 次の三角数列の和が $e^{-int}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k$ となることを示せ。

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

< ディリクレ核 >

周期 2π の周期関数 $f(x)$ に対し，フーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(x)$ は 32 ページより

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\big\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

と表される。ここで $D_n(t)$ はディリクレ核

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\} \qquad \text{(ディリクレ核)}$$

である。$t \neq 0$ に対し前ページより

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k + \sum_{k=1}^{n}(e^{it})^{-k}$$

$$= 1 + (e^{it}) + (e^{it})^2 + \cdots + (e^{it})^n + (e^{it})^{-1} + (e^{it})^{-2} + \cdots + (e^{it})^{-n}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}(e^{it})^k = (e^{it})^{-n}\sum_{k=-n}^{n}(e^{it})^{n+k} = e^{-itn}\sum_{k=0}^{2n}(e^{it})^k$$

$$= e^{-itn}\big\{1 + e^{it} + (e^{it})^2 + (e^{it})^3 + \cdots + (e^{it})^{2n}\big\} = e^{-itn} \times \frac{1 - e^{\boxed{}}}{1 - e^{\boxed{}}}$$

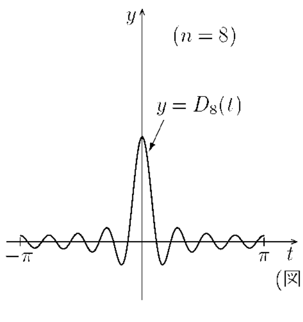
$$= \frac{e^{\boxed{}} - e^{\boxed{}}}{1 - e^{\boxed{}}} = \frac{\left(e^{\boxed{}} - e^{\boxed{}}\right) \times e^{-\frac{it}{2}}}{\left(1 - e^{\boxed{}}\right) \times e^{-\frac{it}{2}}}$$

$$= \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \frac{-2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

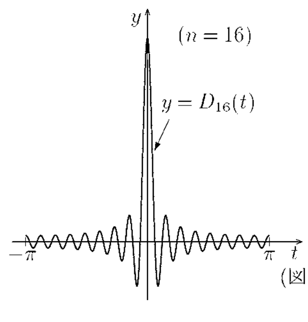
となるのでディリクレ核は

$$\boxed{D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}} \qquad \text{(ディリクレ核)}$$

となる。ディリクレ核 $D_n(t)$ のグラフは図 1 $(n = 8)$，図 2 $(n = 16)$ のようなグラフである。



(図 1)



(図 2)

問 上の文の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

＜たたみこみ１＞

周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数の第 n 部分和は

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

と表される。ここで $D_n(t)$ はディリクレ核

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

である。一般に周期 2π の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して，

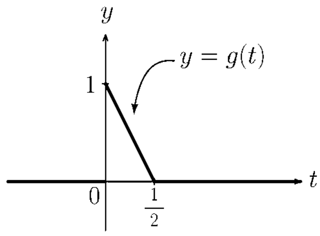
$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt} \quad (\ f\ と\ g\ のたたみこみ\ )$$

を $f(x)$ と $g(x)$ の **「たたみこみ」**(convolution) という。フーリエ級数の収束を調べるためにはこの「たたみこみ」を計算しなければならない。そのためにはまず，関数 $g(t)$ に対して関数 $g(x-t)$ がどのような関数であるかを理解する必要がある。

例

$$g(t) = \begin{cases} 1-2t & : 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & : その他 \end{cases}$$

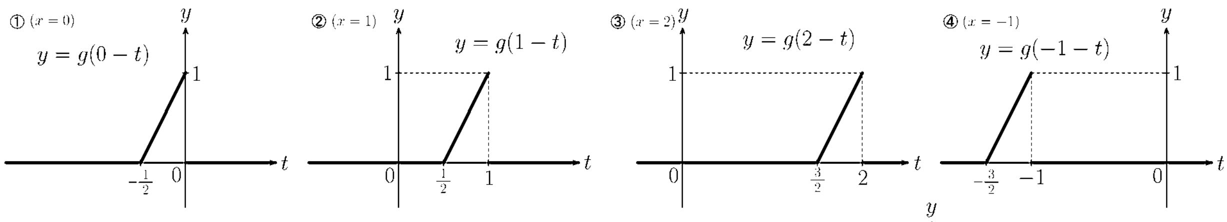
のとき $g(x-t)$ のグラフを書きたい。



$$0 \leqq x-t \leqq \frac{1}{2} \iff 0 \geqq t-x \geqq -\frac{1}{2} \iff x \geqq t \geqq x-\frac{1}{2} \quad より$$

$$g(x-t) = \begin{cases} 1-2(x-t) = 1-2x+2t & : x-\frac{1}{2} \leqq t \leqq x \\ 0 & : その他 \end{cases}$$

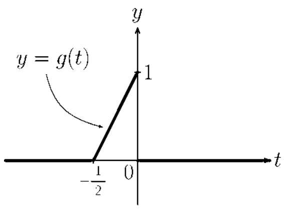
である。よって，$x=0$，$x=1$，$x=2$，$x=-1$ の各場合のグラフは次のとおりである。



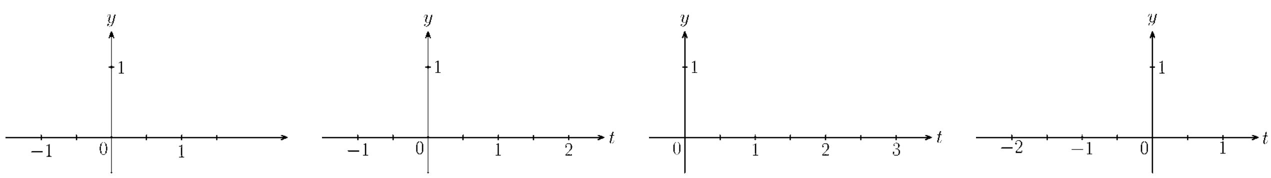
問

$$g(t) = \begin{cases} 1+2t & : -\frac{1}{2} \leqq t \leqq 0 \\ 0 & : その他 \end{cases}$$

のとき次の関数のグラフを描け。



① $y = g(0-t)$　② $y = g(1-t)$　③ $y = g(2-t)$　④ $y = g(-1-t)$



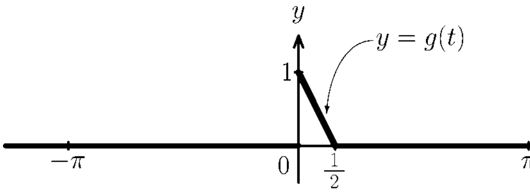
＜たたみこみ 2＞

周期 2π の関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対し， f と g のたたみこみは

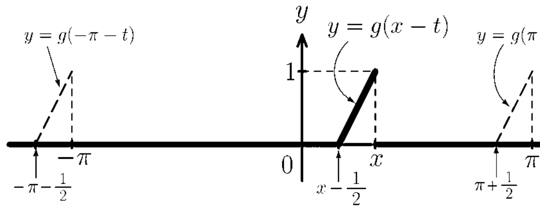
$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

である。関数 $y = g(t)$ に対し， 関数 $y = g(x-t)$ はどのようなグラフになるかを調べる。

例　前ページの例の場合 $y = g(t)$ のグラフは図 1 であり， $y = g(x-t)$ のグラフは図 2 のようになる。

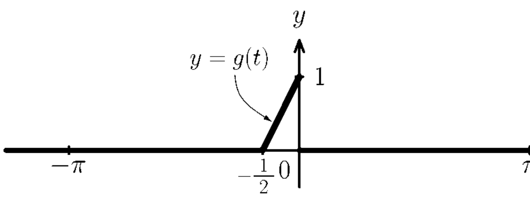


(図1)

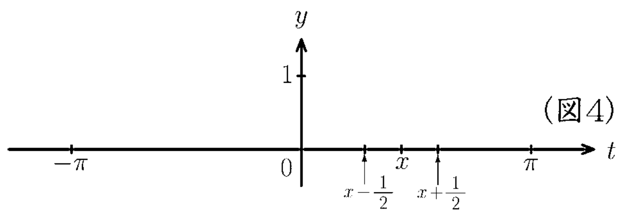


(図2)

問 1　前ページの問の場合 $y = g(t)$ のグラフは図 3 のようになる。このとき $y = g(x-t)$ のグラフを右下図 (図 4) 内に (図 2 のように) 描け。



(図3)



(図4)

問 2　次の文の $\boxed{}$ 内に適当な文字を記入せよ。

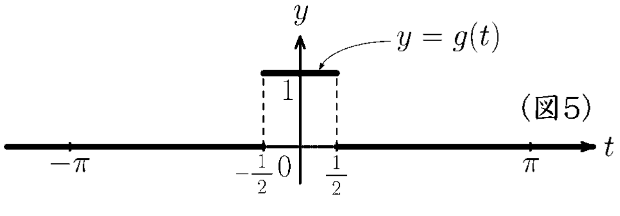
「 $y = g(x-t)$ のグラフは $y = g(t)$ のグラフを $\boxed{}$ 軸に関し対称に折り返して，

t 軸 (横軸) に平行に $\boxed{}$ だけ移動したグラフである。」

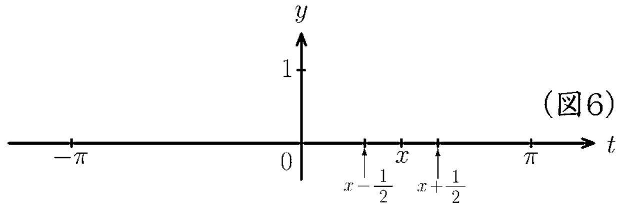
問 3

$$g(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & : \quad \text{それ以外} \end{cases}$$

のとき $y = g(x-t)$ のグラフを右下図 (図 6) に描け。



(図5)



(図6)

問 4　次の文の $\boxed{}$ 内に適当な文字を記入せよ。

「 関数 $g(t)$ が偶関数 (y 軸に対称) のとき， $y = g(x-t)$ のグラフは

$y = g(t)$ のグラフを $\boxed{}$ 軸に平行に $\boxed{}$ だけ移動したグラフである。」

< たたみこみ 3 >

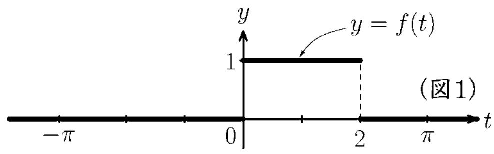
周期 2π の関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対し，f と g のたたみこみは

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

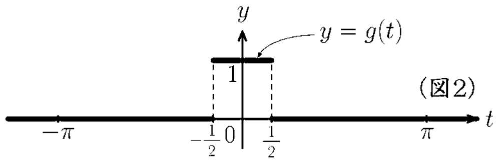
である。この新しい関数 $(f * g)(x)$ を計算してみよう。

例

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき} \\ 0 & : \quad \text{それ以外} \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ 0 & : \quad \text{それ以外} \end{cases}$$



(図1)

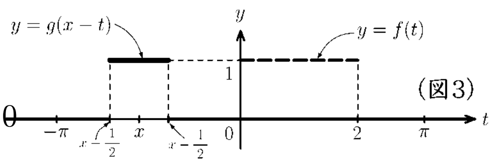


(図2)

の場合に $(f * g)(x)$ を計算したい。

(1) $-\pi \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$ のとき $g(x-t)$ は図 3 より

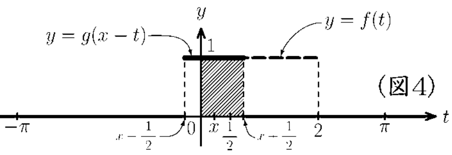
$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt = \int_{0}^{2} g(x-t)dt = 0$$



(図3)

(2) $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき $g(x-t)$ は図 4 より

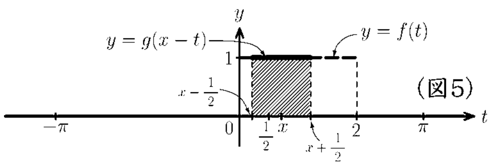
$$(f * g)(x) = \int_{0}^{2} g(x-t)dt = \int_{0}^{x+\frac{1}{2}} 1dt = x + \frac{1}{2}$$



(図4)

(3) $\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ のとき $g(x-t)$ は図 5 より

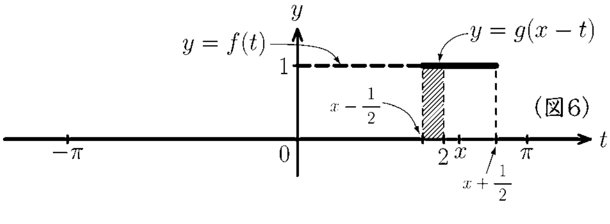
$$(f * g)(x) = \int_{0}^{2} g(x-t)dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} 1dt = 1$$



(図5)

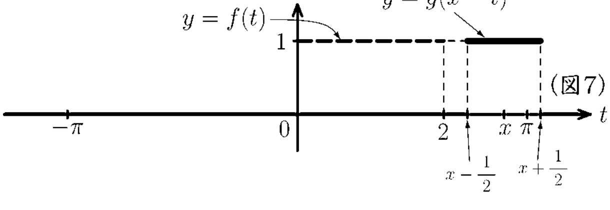
問　例の場合に図 6，7 を参考にして次の各場合の $(f * g)(x)$ の値を求めよ。

(1) $\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ のとき $(f * g)(x) =$



(図6)

(2) $\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき $(f * g)(x) =$



(図7)

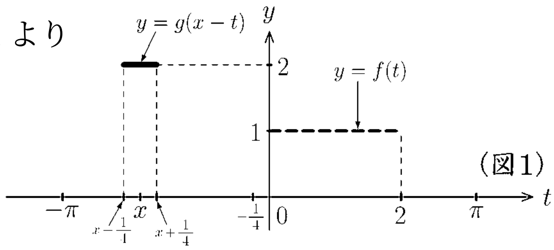
＜たたみこみ 4＞

例 $f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leqq t \leqq 2 \\ 0 & : \quad \text{その他} \end{cases}$, $g(t) = \begin{cases} 2 & : \quad -\frac{1}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{4} \\ 0 & : \quad \text{その他} \end{cases}$

の場合に $(f * g)(x)$ を計算したい。

(1) $-\pi \leqq x \leqq -\frac{1}{4}$ のとき $g(x-t)$ は図 1 より

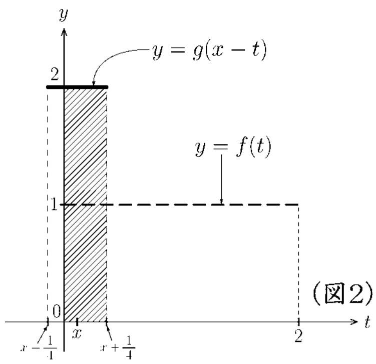
$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$$
$$= \int_{0}^{2} g(x-t)dt = 0$$



(図1)

(2) $-\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{4}$ のとき $g(x-t)$ は図 2 より

$$(f * g)(x) = \int_{0}^{2} g(x-t)dt = \int_{0}^{x+\frac{1}{4}} g(x-t)dt$$
$$= \int_{0}^{x+\frac{1}{4}} 2dt$$
$$= 2(x + \frac{1}{4}) = 2x + \frac{1}{2}$$



(図2)

問 例の $f(t)$, $g(t)$ に対して x が次の各場合に $(f * g)(x)$ を計算せよ。

(1) $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{7}{4}$ のとき

$(f * g)(x) =$

(2) $\frac{7}{4} \leqq x \leqq \frac{9}{4}$ のとき

$(f * g)(x) =$

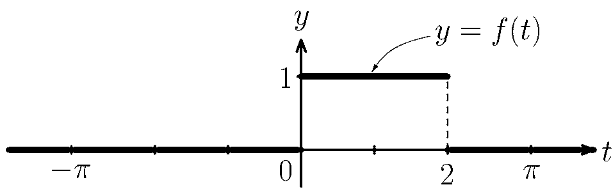
(3) $\frac{9}{4} \leqq x \leqq \pi$ のとき

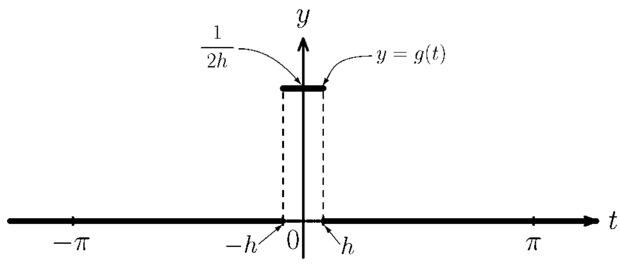
$(f * g)(x) =$

＜たたみこみ 5 ＞

問 $f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leqq t \leqq 2 \\ 0 & : \quad \text{その他} \end{cases}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & : \quad -h \leqq t \leqq h \\ 0 & : \quad \text{その他} \end{cases}$ の場合に

$(f * g)(x)$ を計算したい。ただし h は $0 < h \leqq \frac{1}{2}$ なる定数である。





以下の各場合に $(f * g)(x)$ を求めよ。

(1) $-\pi \leqq x \leqq -h$ のとき

$(f * g)(x) =$

(2) $-h \leqq x \leqq h$ のとき

$(f * g)(x) =$

(3) $h \leqq x \leqq 2 - h$ のとき

$(f * g)(x) =$

(4) $2 - h \leqq x \leqq 2 + h$ のとき

$(f * g)(x) =$

(5) $2 + h \leqq x \leqq \pi$ のとき

$(f * g)(x) =$

＜たたみこみ 6＞

例　41 ページの例の $f(t)$ ，$g(t)$ に対して，たたみこみ $(f*g)(x)$ は

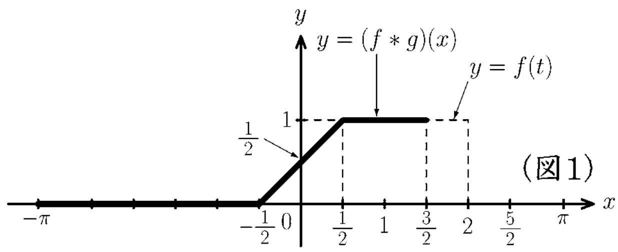
$-\pi$ 5 x 5 $-\frac{1}{2}$ のとき $(f*g)(x) = 0$

$-\frac{1}{2}$ 5 x 5 $\frac{1}{2}$ のとき $(f*g)(x) = x + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ 5 x 5 $\frac{3}{2}$ のとき $(f*g)(x) = 1$

であった。これを x の関数として

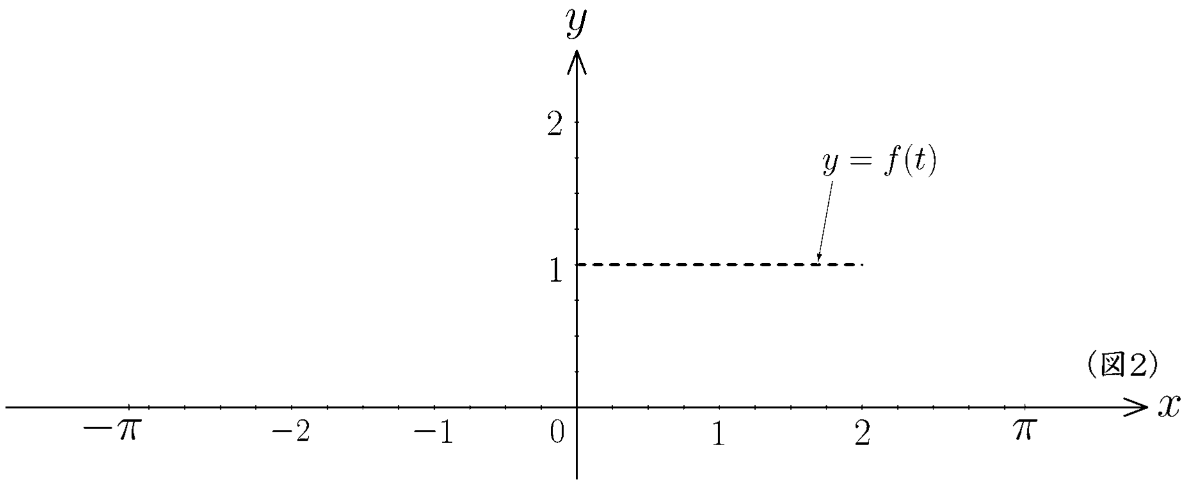
グラフを書くと右図 (図 1) の太線になる。



(図1)

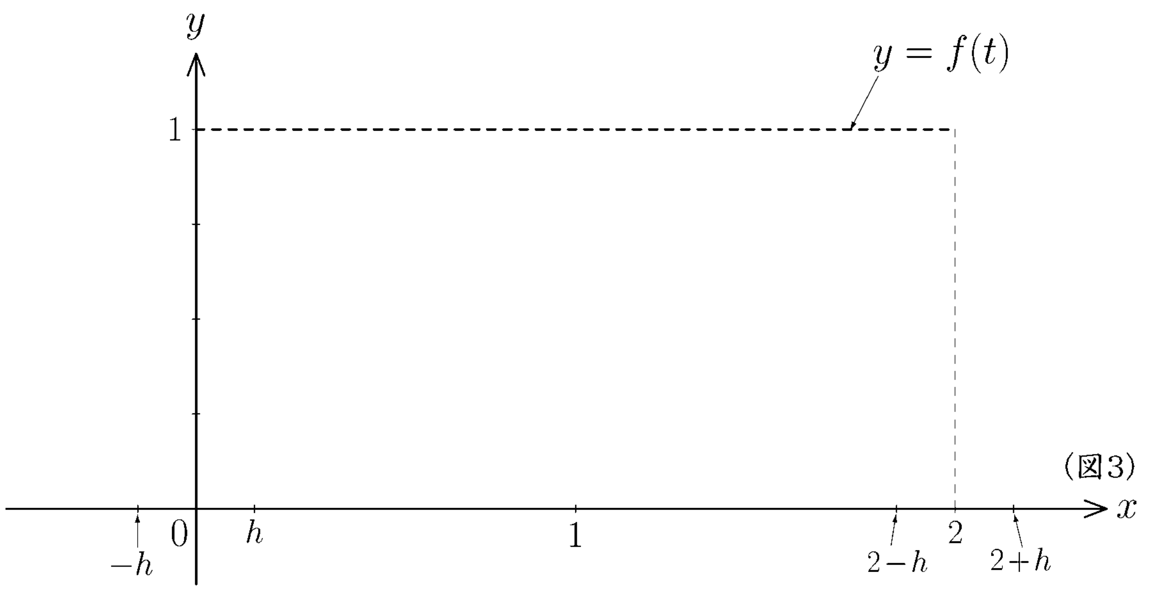
問 1　例の場合に 41 ページ問の結果を用いて $\frac{3}{2}$ 5 x 5 π の範囲の $y = (f*g)(x)$ のグラフを図 1 内に描け。

問 2　42 ページの例の $f(t)$ ，$g(t)$ に対し，たたみこみ $(f*g)(x)$ のグラフを $-\pi$ 5 x 5 π の範囲で図 2 内に描け。



(図2)

問 3　前ページの問の $f(t)$ ，$g(t)$ に対し，たたみこみ $(f*g)(x)$ のグラフを $-h$ 5 x 5 $2+h$ の範囲で図 3 内に描け。



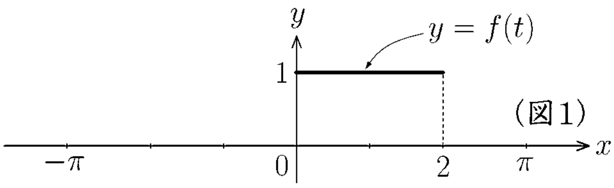
(図3)

＜たたみこみ 7＞

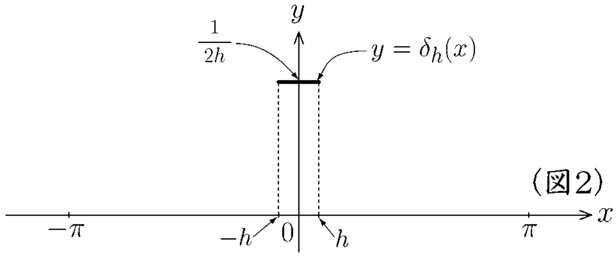
43 ページの関数 g を今後 δ_h (デルタ h) と呼ぶことにする。前ページ問 3 の場合は

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \quad 0 \leqq x \leqq 2\\ 0 & : \quad \text{その他}\end{cases} \quad と \quad g(x)=\delta_h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h} & : \quad -h \leqq x \leqq h\\ 0 & : \quad \text{その他}\end{cases}$$

のたたみこみ $(f*\delta_h)(x)$ である。

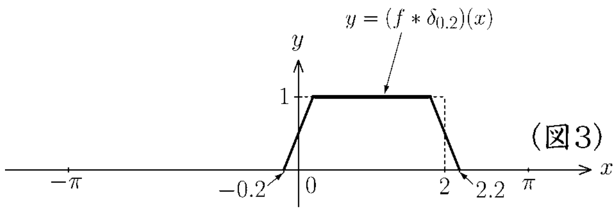


(図1)

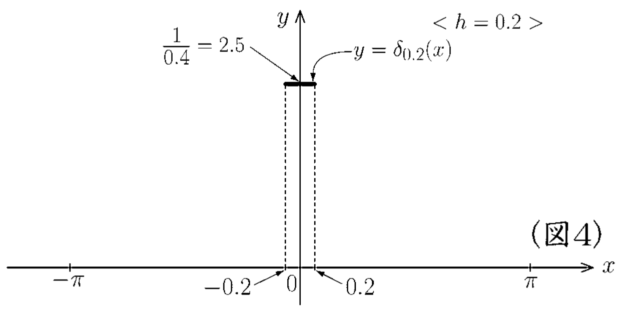


(図2)

例1 $h=0.2$ の場合 $\delta_h(x)=\delta_{0.2}(x)$ のグラフは図 4 であり，f とのたたみこみ $(f*\delta_{0.2})(x)$ のグラフは図 3 の太線である。(点線は $f(x)$ のグラフ)

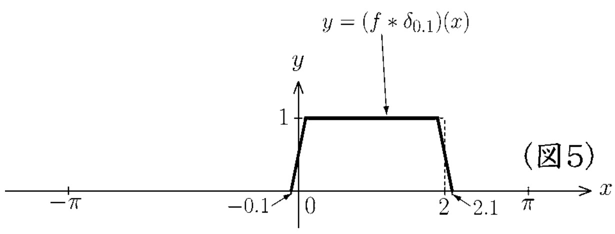


(図3)

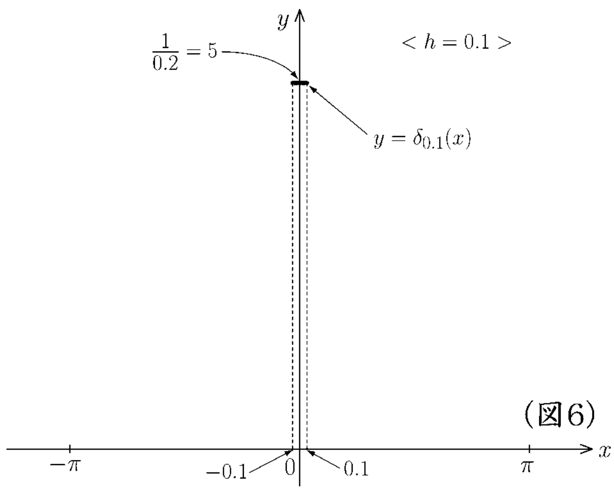


(図4)

例2 $h=0.1$ の場合 $\delta_h(x)=\delta_{0.1}(x)$ のグラフは図 6 であり，f とのたたみこみ $(f*\delta_{0.1})(x)$ のグラフは図 5 の太線である。



(図5)

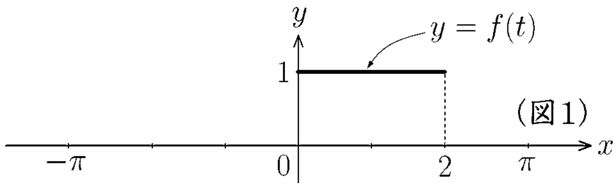


(図6)

◎ h が小さくなるにつれ，$(f*\delta_h)(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフにだんだん近づいていく。

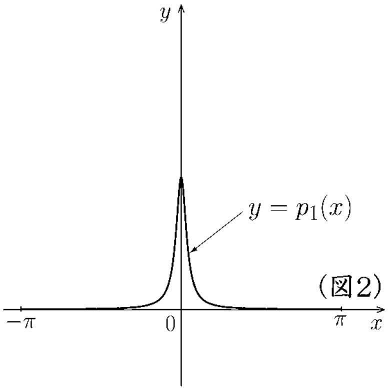
＜たたみこみ 8＞

$f(x)$ が図 1 の場合にたたみこみ $(f*g)(x)$ のグラフの例を紹介する。

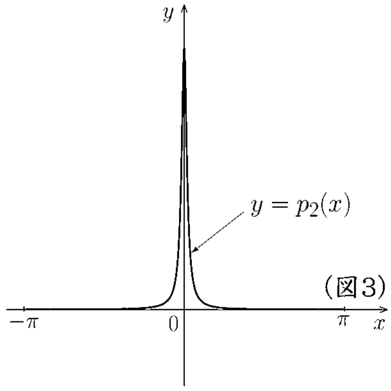


(図1)

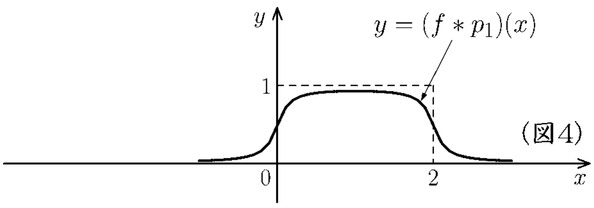
例 1　図 2 の関数 $p_1(x)$ とのたたみこみ $(f*p_1)(x)$ が図 4 であり，図 3 の関数 $p_2(x)$ とのたたみこみ $(f*p_2)(x)$ が図 6 である。



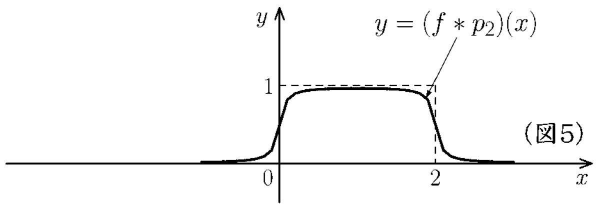
(図2)



(図3)

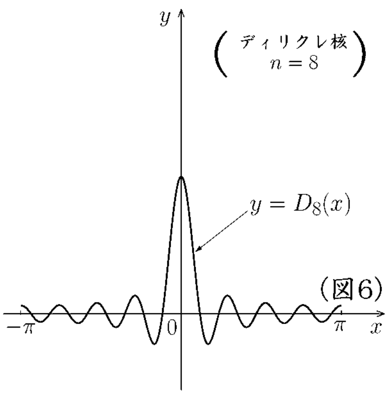


(図4)

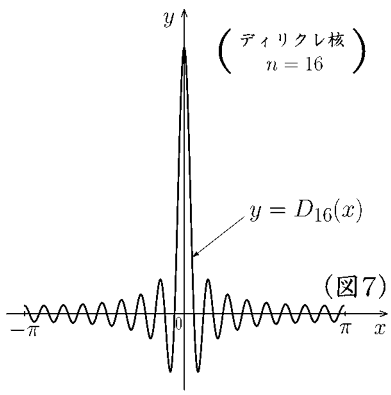


(図5)

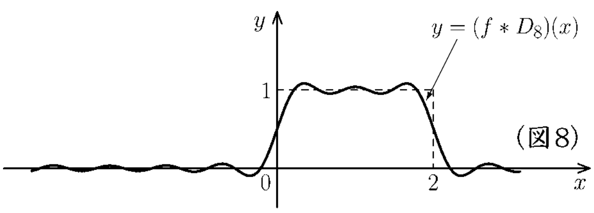
例 2　ディリクレ核 D_n (38 ページ参照) とのたたみこみ $(f*D_n)(x)$ は以下のようになる。$D_8(x)$ (図 6) とのたたみこみ $(f*D_8)(x)$ は図 8 であり，$D_{16}(x)$ (図 7) とのたたみこみ $(f*D_{16})(x)$ が図 9 である。



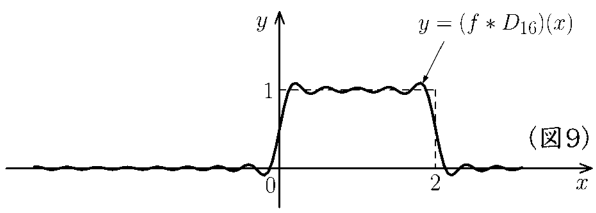
(図6)



(図7)

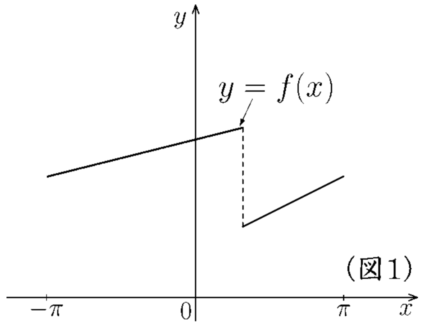


(図8)



(図9)

＜たたみこみ 9＞

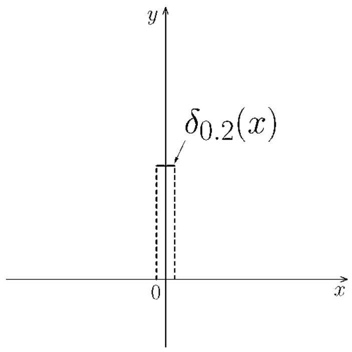


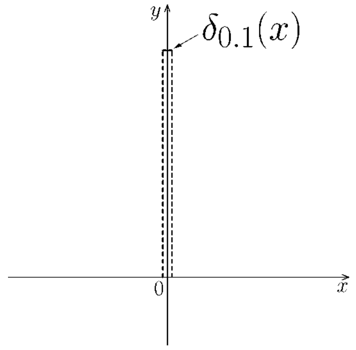
(図1)

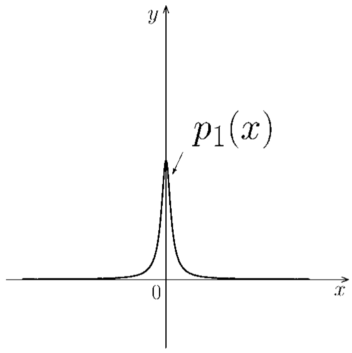
問 $y=f(x)$ は図 1 のような関数であるとき,
図 2 から図 7 のグラフ (実線) は次の関数

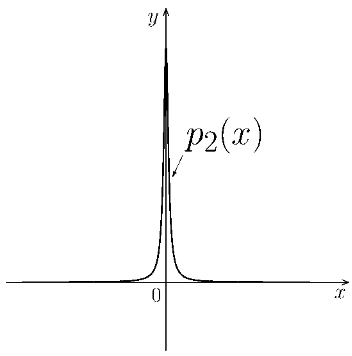
$$(f*\delta_{0.2})(x) \quad , \quad (f*\delta_{0.1})(x) \quad , \quad (f*p_1)(x)$$
$$(f*p_2)(x) \quad , \quad (f*D_8)(x) \quad , \quad (f*D_{16})(x)$$

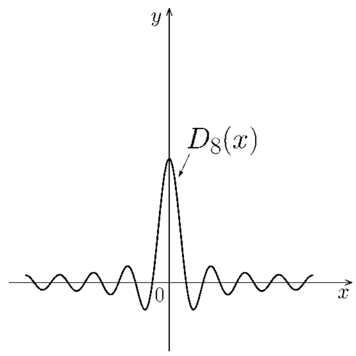
のどれかである。45, 46 ページの図を参考にして, 図 2 から図 7 の中に
関数の式を記入せよ。

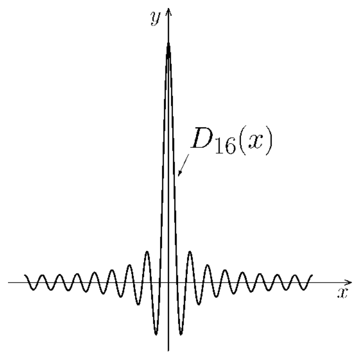


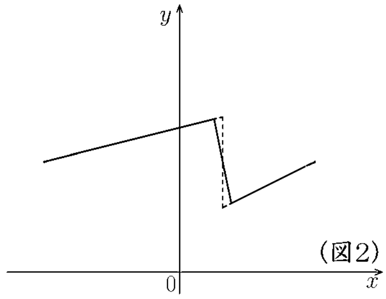


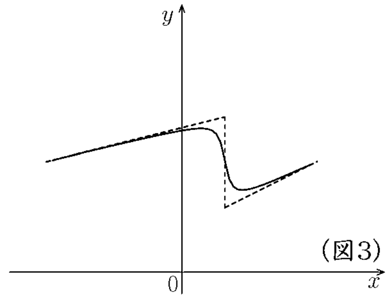


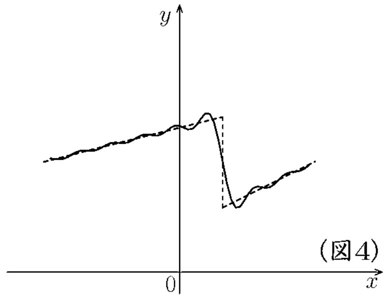


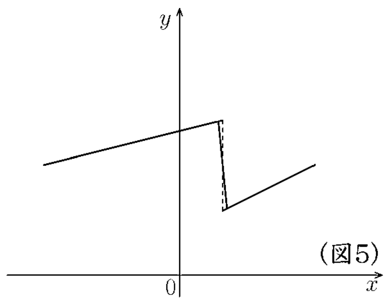


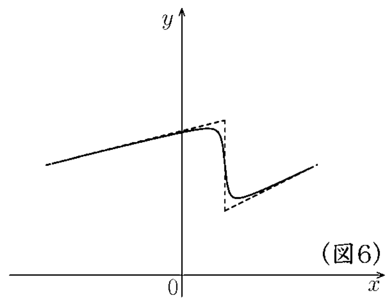


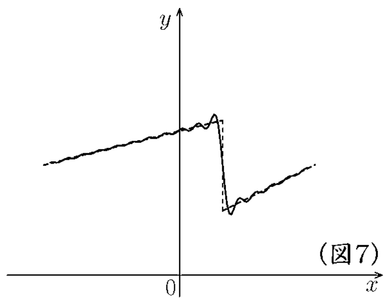

(図2)


(図3)


(図4)


(図5)


(図6)

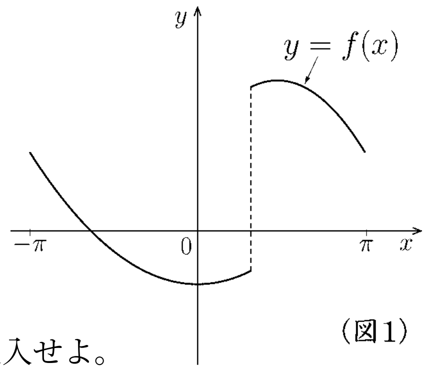

(図7)

＜たたみこみ 10＞

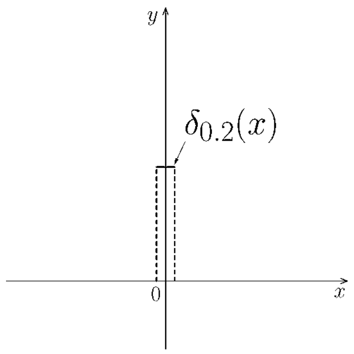
問 $y=f(x)$ は図 1 のような関数であるとき，
図 2 から図 7 のグラフ (実線) は次の関数

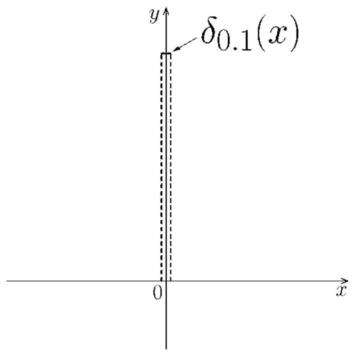
$$(f*\delta_{0.2})(x)\quad,\quad(f*\delta_{0.1})(x)\quad,\quad(f*p_1)(x)$$
$$(f*p_2)(x)\quad,\quad(f*D_8)(x)\quad,\quad(f*D_{16})(x)$$

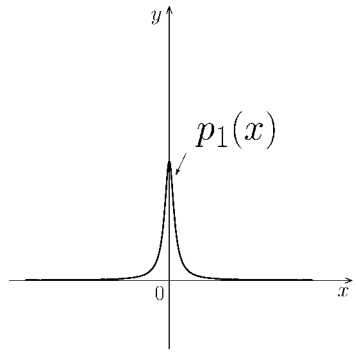
のどれかである。図 2 から図 7 の中に関数の式を記入せよ。

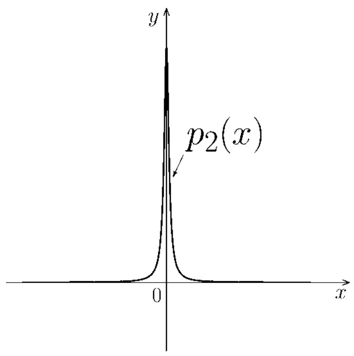


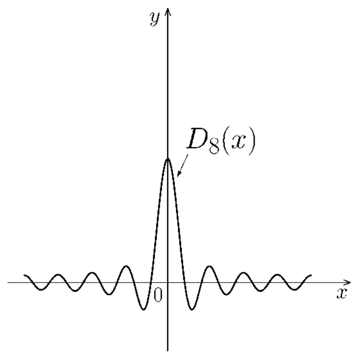
(図1)

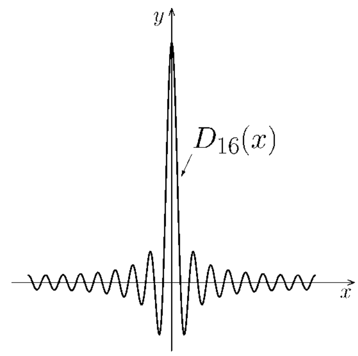


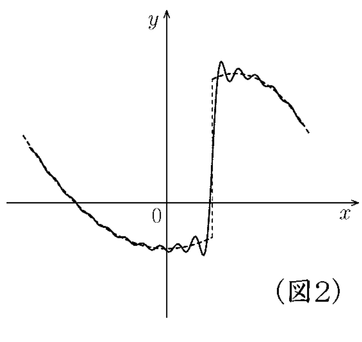




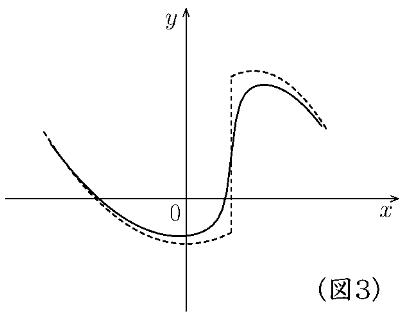




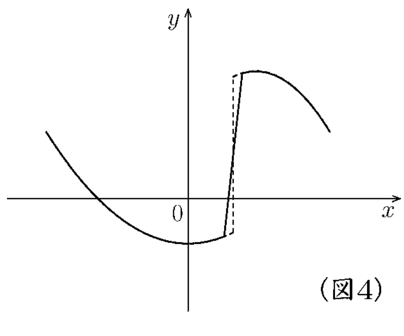




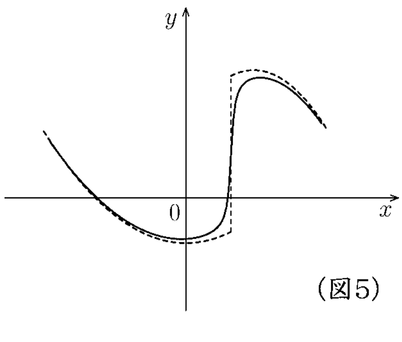
(図2)



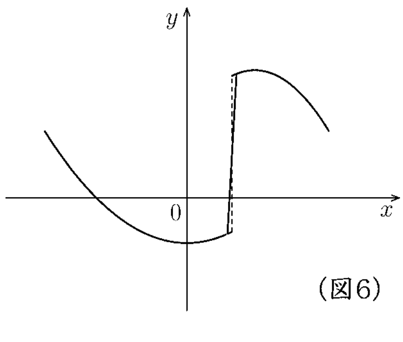
(図3)



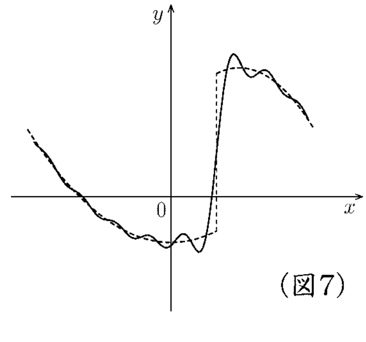
(図4)



(図5)



(図6)



(図7)

< たたみこみ近似 >

周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(x)$ は

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt = (f * D_n)(x)$$

と表される。ここで $D_n(t)$ はディリクレ核

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}} \qquad \text{(ディリクレ核)}$$

である。33 ページの定理 (フーリエ級数の収束) は次の定理 1 と同等である。

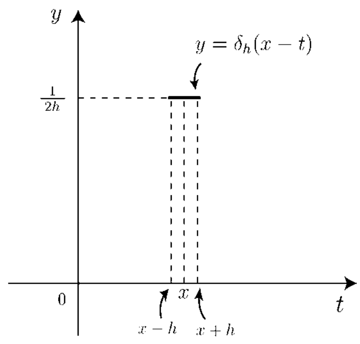
[**定理 1**]
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(f * D_n)(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2}\Big\{f_{-}(x) + f_{+}(x)\Big\}}$$
(フーリエ級数の収束)

定理 1 の厳密な証明は複雑なので省略する。この収束の様子は <u>P.45</u>〜<u>P.48</u> の図で理解してほしい。これに対し次の定理は簡単なので紹介する。

[**定理 2**]
$$\boxed{\lim_{h\to+0}(f * \delta_h)(x) = \lim_{h\to+0}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta_h(x-t)dt = \frac{1}{2}\Big\{f_{-}(x) + f_{+}(x)\Big\}}$$

ただし $\delta_h(x)$ は 45 ページの関数 $\delta_h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & : \ |x| \ 5 \ h \text{ のとき} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases}$ である。

[定理 2 の証明]



$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とおく。すなわち

$$F(x) = \int f(x)dx \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \right)$$

とおく。

$$(f * \delta_h)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta_h(x-t)dt = \int_{\boxed{\quad}}^{\boxed{\quad}} f(t)\ \boxed{\quad}\ dt$$

$$= \frac{1}{2h}\Big[\ \boxed{\quad}\ \Big]_{x-h}^{x+h} = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

ここで $h \to +0$ の極限をとると , 分母分子共に 0 に近づくのでロピタルの定理より

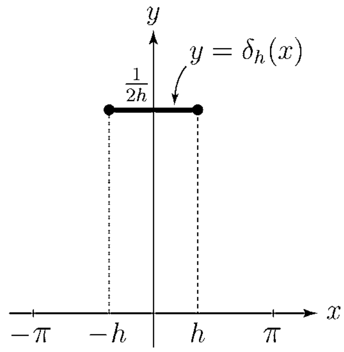
$$\lim_{h\to+0}(f * \delta_h)(x) = \lim_{h\to+0}\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to+0}\frac{\frac{d}{dh}\{F(x+h) - F(x-h)\}}{\frac{d}{dh}(2h)}$$

$$= \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} = \frac{f_{+}(x) + f_{-}(x)}{2}$$

(証明終)

問 証明の中の $\boxed{\quad}$ 内に適当な式を記入せよ。

< デルタ関数 >



前ページの関数 $\delta_h(x)$ は、$0<h<\pi$ ならば

> (i) $\delta_h(x)$ は偶関数で $\delta_h(x)=0$
>
> (ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\delta_h(x)dx=1$
>
> (iii) $\displaystyle\lim_{h\to+0}\delta_h(x)=\begin{cases}+\infty & : x=0\\ 0 & : x\neq 0\end{cases}$

を満たす関数である。$h\to+0$ のとき極限を関数の一種と考え

$$\boxed{\lim_{h\to+0}\delta_h(x)=\delta(x)=\begin{cases}+\infty & : x=0\\ 0 & : x\neq 0\end{cases}}$$

と書き、ディラックの**デルタ関数**という。また $\delta_h(x)$ のような (i)~(iii) の性質を持つ関数を**デルタ収束関数**という。前ページのように、デルタ収束関数 $\delta_h(x)$ は関数 $f(x)$ に対して、

$$(*)\quad \boxed{\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(x)=\lim_{h\to+0}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\delta_h(x-t)dt=\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}}$$

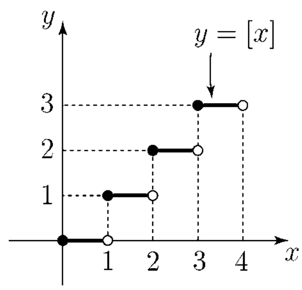
が成立する。(正確に言うと $(*)$ が成立するためには $f(x)$ に条件が必要だが、ほとんどの場合は成立すると考えてよい。)

例 1 $f(x)=x^2+3x$ は連続関数で $f_+(x)=f_-(x)=f(x)$ より

$$\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(4)=\frac{f_+(4)+f_-(4)}{2}=f(4)=16+12=28$$

例 2 $f(x)=[x]$ (ガウス記号 $=x$ をこえない最大整数) のとき $f_-(3)=2$, $f_+(3)=3$ より

$$\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(3)=\frac{f_+(3)+f_-(3)}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$



問 1 例 2 の場合に次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(2)=$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(2.5)=$

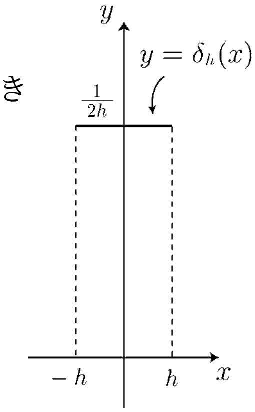
問 2 $(*)$ 式をデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて形式的に

$$(*)'\quad \boxed{(f*\delta)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\delta(x-t)dt=\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}}$$

と表す。$f(x)$ が例 1 のような連続関数のとき右辺を簡単にせよ。

$$(f*\delta)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\delta(x-t)dt=$$

< デルタ関数とディリクレ核 >



問 1 $0<h<\pi$ なる定数 h に対し $\delta_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h} & : -h \leqq x \leqq h \text{ のとき} \\ 0 & : \text{その他}\end{cases}$

のフーリエ級数を求めたい。

(1) 次のフーリエ係数を求めよ。

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_h(x)dx=$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_h(x)\cos(kx)dx=$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_h(x)\sin(kx)dx=$$

(2) フーリエ級数の等 n 部分和 $S_n(x)$ を求めよ。

$$S_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\Big\{a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big\}$$

$$=$$

問 2 上で求めたフーリエ級数に対し $h\to+0$ の極限を求めたい。

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を用いて次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to+0}a_k$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to+0}S_n(x)$

問 3 34 ページで定義したディリクレ核 $D_n(x)$ の式を書け。

$D_n(x)=$

問 4 次の文中の $\boxed{}$ 内に適当な文字または式を記入せよ。

「$h\to+0$ のとき $\delta_h(x)\to$ $\boxed{}$ よりディリクレ核 $D_n(x)$ は

$\boxed{}$ 関数のフーリエ級数の等 n 部分和と考えられる」

＜一般の周期関数１＞

例１ 図１の曲線は

$$y = \sin(2\pi x)$$

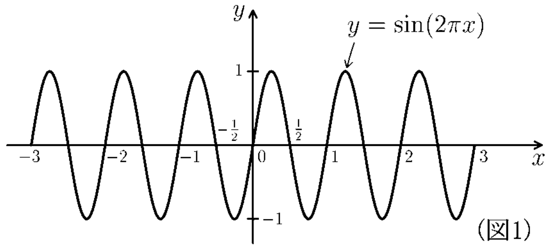
のグラフである。この関数は周期１の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 $(2\pi x)$ が $360^\circ = 2\pi$ となるとき，すなわち

$$2\pi x = 2\pi$$

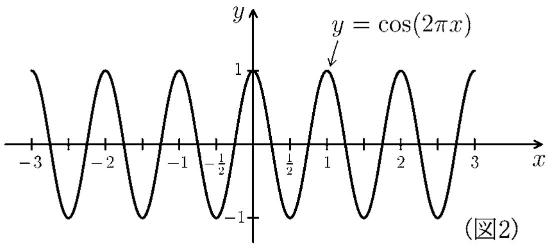
のときは $x = 1$ であるから周期が１になる。図２の曲線は

$$y = \cos(2\pi x)$$

であり，同様に周期１の周期関数である。



(図1)



(図2)

例２ 図３の曲線は

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

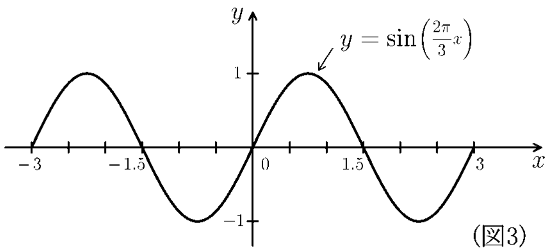
のグラフである。この関数は周期３の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 $\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ が $360^\circ = 2\pi$ となるとき，すなわち

$$\frac{2\pi}{3}x = 2\pi$$

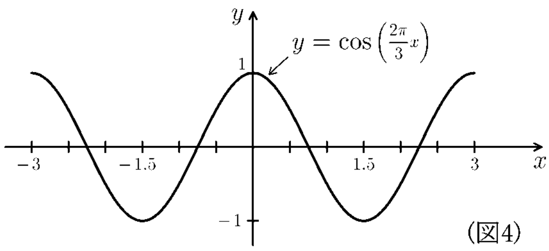
のときは $x = 3$ であるから周期が３になる。図４の曲線は

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

であり，同様に周期３の周期関数である。



(図3)



(図4)

問 次の関数の周期を求めよ。(ただし L, l は正の実数，n は自然数である。)

(1) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$　(2) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}x\right)$　(3) $\sin\left(\frac{2\pi}{9}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}x\right)$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$　(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$　(6) $\sin(\pi x)$

(7) $\cos(3\pi x)$　(8) $\sin(n\pi x)$　(9) $\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$

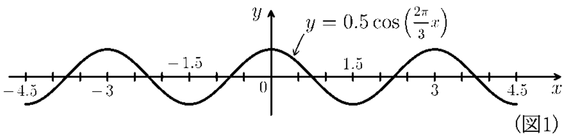
(10) $\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$　(11) $\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$　(12) $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

＜一般の周期関数 2 ＞

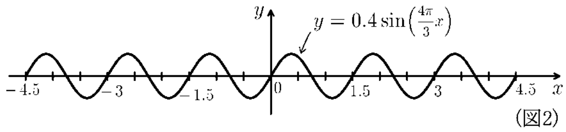
前ページの結果より

$$\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \quad , \quad \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

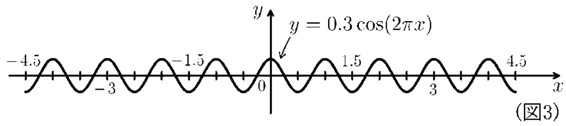
は周期が L の周期関数である。



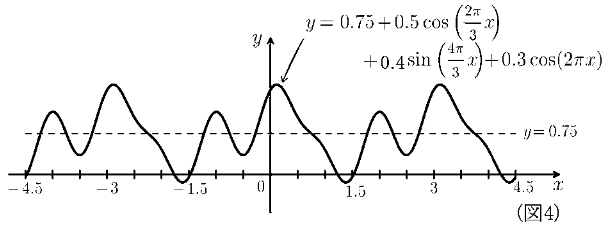
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

例 (1) $y = 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ は周期 3 の周期関数である (図 1)。

(2) $y = 0.4\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$ は周期 $\frac{3}{2} = 1.5$ の周期関数である (図 2)。

(3) $y = 0.3\cos(2\pi x)$ は周期 1 の周期関数である (図 3)。

(4) 上の (1)~(3) の関数と $y = 0.75$ を加えた和の関数

$$y = 0.75 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 0.4\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + 0.3\cos(2\pi x)$$

は周期 3 の周期関数である (図 4)。

(2) の関数は基本周期が $\frac{3}{2}$ であるが倍周期が 3 である。(3) の関数も基本周期が 1 であるが 3 倍周期は 3 である。

(5) 一般に定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ に対し

$$y = a_0 + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + b_1\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + a_2\cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + b_2\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + \cdots$$
$$\cdots + a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)$$

は周期 3 の周期関数である。

問 次の関数の周期を求めよ。

(1) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{5}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{5}x\right)\right\}$

(2) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)\right\}$

(3) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\right\}$

＜一般周期のフーリエ級数１＞

正の定数 L に対し , 周期 L の周期関数 $f(x)$ を考える。$y = f(x)$ のグラフは $-\frac{L}{2} \leqq x \leqq \frac{L}{2}$ の範囲の曲線が周期的に繰り返されていく。周期 2π の関数の場合と同様に $f(x)$ のフーリエ級数が考えられる。

この場合 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(x) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right\}}$$

（周期 L の
フーリエ級数）

となる。ここでフーリエ係数 a_0 , a_k , b_k は

$$\boxed{\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)dx \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx \\ b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx \qquad (k \geqq 1) \end{gathered}}$$

（周期 L の
フーリエ係数）

となる。

問　周期関数 $f(x)$ の周期が次の各場合に , 上記のようにフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。(ただし $\ell > 0$)

(1) 周期 $2\,\ell$

(2) 周期 $2\pi\,\ell$

< 一般周期のフーリエ級数 2 >

周期 L の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は 31 ページと同様にその収束が成立する。すなわち

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)\right\} = \frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}} \quad \text{(フーリエ級数の収束)}$$

である。ただし

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)dx \ , \ a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx \ , \ b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx$$

である。もし $f(x)$ が偶関数であれば , この係数は

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)dx \quad , \quad a_k = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx \quad , \quad b_k = 0$$

となる。

問 1 $f(x)$ が奇関数の場合のフーリエ係数 a_0 , a_k , b_k を求めよ。

$a_0 =$, $a_k =$, $b_k =$

問 2 $f(x)$ が周期 2 ℓ の周期関数の場合 , フーリエ級数の収束の式を書け。

問 3 $f(x)$ が問 2 の場合でかつ偶関数 (または奇関数) の場合にフーリエ係数を求めよ。

(1) $f(x)$ が偶関数のとき

$a_0 =$, $a_k =$, $b_k =$

(2) $f(x)$ が奇関数のとき

$a_0 =$, $a_k =$, $b_k =$

< 三角多項式の複素数表示１ >

例 定数 α , β に対し次の三角多項式

$$\boxed{S(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big\{\alpha\cos(kx) + \beta k\sin(kx)\Big\}} \quad (1)$$

を考える。オイラーの公式 (<u>P.35</u>) より次式が成り立つ。

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad , \quad \sin(kx) = \frac{i}{2}(e^{-ikx} - e^{ikx})$$

三角関数を複素指数で置き換えると

$$S(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big\{\frac{\alpha}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{\beta ki}{2}(e^{-ikx} - e^{ikx})\Big\}$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta k}{2}i\Big)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta k}{2}i\Big)e^{-ikx}$$

と表される。ここで

$$\boxed{C_k = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta k}{2}i} \quad (2)$$

とおくと ,

$$C_{-k} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta k}{2}i \quad , \quad C_0 = \frac{\alpha}{2}$$

より $S(x)$ は

$$S(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} C_{-k}e^{-ikx} = C_0 e^0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} C_k e^{ikx}$$

より

$$\boxed{S(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx}} \quad (3)$$

と表される。

(注) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k e^{-ikx} = C_{-1}e^{-ix} + C_{-2}e^{-i2x} + \cdots + C_{-n}e^{-inx} = \sum_{k=-n}^{-1} C_k e^{ikx}$

問１ ディリクレ核 $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\cos(kx)$ を例の (3) 式のような形にせよ。

$D_n(x) =$

問２ 定数 α , β に対し次の三角多項式

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big\{\alpha k^2\cos(kx) + \beta k\sin(kx)\Big\}$$

を例の (3) 式のような形にせよ。またこのときの C_k を (2) 式のような式で表せ。

< 三角多項式の複素数表示 2 >

例 定数 a_0 と数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ に対し , 三角多項式

$$\boxed{S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right\}} \qquad (1)$$

を考える。この式を前ページのような複素指数を用いて表現したい。

オイラーの公式より

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad , \quad \sin(kx) = \frac{i}{2}(e^{-ikx} - e^{ikx})$$

を (1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k i}{2}(e^{-ikx} - e^{ikx}) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2} i \right) e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} i \right) e^{-ikx} \end{aligned}$$

となる。ここで $k = 1$ に対し

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2} i \; , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} i \; , \quad C_0 = a_0} \qquad (2)$$

とおくと $S(x)$ は

$$S(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} C_{-k} e^{-ikx}$$

より

$$\boxed{S(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx}} \qquad (3)$$

と表される。

問 定数 a_0 , ω と数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ に対し , 三角多項式

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right\}$$

を例の (3) 式のような形にせよ。またこのときの C_k を (2) 式のような式で表せ。

< フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期 L の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ とすると

$$\boxed{f(x) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{L}} \tag{1}$$

と表される。ここでフーリエ係数は

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx \ , \ a_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(k\omega x)dx \ , \ b_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(k\omega x)dx} \tag{2}$$

である。この第 n 部分和 $S_n(x)$ は前ページの結果より

$$\boxed{S_n(x) = a_0 + \sum_{K=1}^{n} \{\, a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \,\} = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{\,ik\omega x}} \tag{3}$$

と表される。ただし C_k は $k = 1$ に対し

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2} i \ , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} i \ , \quad C_0 = a_0} \tag{4}$$

である。$k = 1$ のときの C_k は (2) 式より

$$C_k = \frac{1}{2}\{\, a_k - b_k i \,\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(k\omega x)dx\right) - \left(\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(k\omega x)dx\right) i\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,\{\, \cos(k\omega x) - i\sin(k\omega x) \,\}\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{\,-ik\omega x} dx$$

と表される。

問 $k = 1$ に対し , 次の係数を上のような $f(x)$ に関する積分の形にせよ。

$C_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + b_k i) =$

$C_0 = a_0 =$

< フーリエ級数の複素数表示 2 >

周期 L の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} & f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{L} \\ & a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx \ , \ a_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(k\omega x)dx \ , \ b_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(k\omega x)dx \end{aligned}}$$

である。このフーリエ級数の等 n 部分和は前ページより

$$\boxed{S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \} = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ik\omega x}} \quad (1)$$

と表される。ここで

$$\boxed{C_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx} \quad (2)$$

である。

問 1 (2) 式の C_k において k の代わりに $-k$ (または 0) を代入した式を積分の形で表示し , 前ページ問の結果を使って a_0 , a_k , b_k で表せ。

$C_{-k} =$

$C_0 =$

(1) 式で $n \to \infty$ の極限を考えるとフーリエ級数の式 $(*)$ は次のように簡単になる。

$$(**)\quad \boxed{f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega x} \ , \ \omega = \frac{2\pi}{L} \ , \ C_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx}$$

< 周期 L の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (複素数表示) >

$(**)$ 式を**フーリエ級数の複素数表示**という。

問 2 周期関数 $f(x)$ の周期が以下の場合に , フーリエ級数を複素数表示せよ。(ただし $m > 0$)

(1) 周期 2π

(2) 周期 $2\pi m$

＜広義積分１＞

定数 a, b $(a < b)$ と関数 $f(x)$ に対し定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

を考える。今 $a \to -\infty$ ， $b \to +\infty$ のときの極限値が存在する場合に

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \quad , \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

と表し，**広義の定積分**または**広義積分**という。

例１ $\displaystyle \int_0^\infty e^{-2x}dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=b}$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}e^0 \right] = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2e^{2b}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

例２ $\displaystyle \int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-4}dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{-3}x^{-3} \right]_1^b$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{3}b^{-3} + \frac{1}{3}(1)^{-3} \right] = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

問　次の値を求めよ。(ただし $t > 0$, $r > 1$)

(1) $\displaystyle \int_0^\infty e^{-tx}dx =$

(2) $\displaystyle \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx =$

(3) $\displaystyle \int_1^\infty \frac{1}{x^r}dx =$

＜広義積分 2 ＞

定理　$\alpha > 0$ に対し , 次式が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin(tx)}{x}dx = \tan^{-1}\left(\tfrac{t}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

＜証明の概略＞

(1)　$\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)dx$　とおくと部分積分法よりより

$$I = \left[-\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\cos(tx)\right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}t\sin(tx)dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{t}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(tx)dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{t}{\alpha}\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\sin(tx)\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}t\cos(tx)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{t^2}{\alpha^2}I$$

より

$$I = \frac{1}{\alpha} - \frac{t^2}{\alpha^2}I \;\Rightarrow (1+\frac{t^2}{\alpha^2})I = \frac{1}{\alpha} \;\Rightarrow\; I = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$$

(2)　$\displaystyle f_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin(tx)}{x}dx$ とおいて t で微分すると

$$\frac{d}{dt}f_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\frac{d}{dt}\big(\sin(tx)\big)}{x}dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$$

$\displaystyle\frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\tfrac{t}{\alpha}\right) = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$ より　$f_\alpha(t) = \tan^{-1}\left(\tfrac{t}{\alpha}\right) + C$　(C は定数)

ここで $t=0$ のとき　$\displaystyle f_\alpha(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{0}{x}dx = 0$　より　$C=0$

よって　$f_\alpha(t) = \tan^{-1}\left(\tfrac{t}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\alpha\to+0}f_\alpha(1) = \lim_{\alpha\to+0}\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

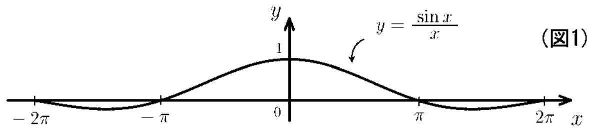
＜広義積分 3＞

例　前ページの公式 (3)

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

はフーリエ逆変換を求める計算のときにでてくる積分である。この式から以下の積分が計算できる。

例 1　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求めたい。

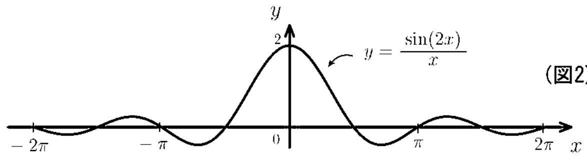


(図1)

$\dfrac{\sin x}{x}$ は図 1 のような偶関数であるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

例 2　$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx$ を求めたい。

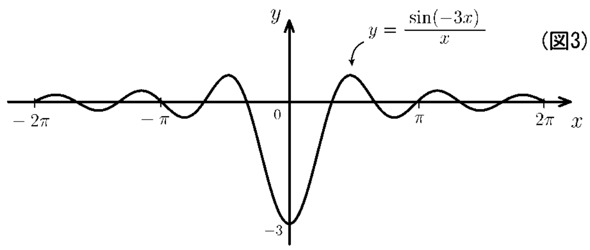


(図2)

$2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{1}{2}dt$ より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2}dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

例 3　$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(-3x)}{x} dx$ を求めたい。



(図3)

$3x = t$ とおくと $dx = \dfrac{1}{3}dt$ である。

ここで $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(-3x)}{x} dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x} dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{3}} \times \frac{1}{3}dt = -\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}$$

問　次の定積分の値を求めよ。(ただし λ は正の定数とする。)

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-3x)}{x} dx$

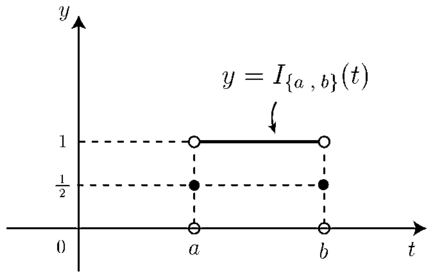
(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$　　　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(-\lambda x)}{x} dx$

< 広義積分 4 >

[**定理**] 定数 $a<b$ に対し

$$I_{\{\,a\,,\,b\,\}}(t)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((b-t)x\big)}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((t-a)x\big)}{x}dx\right\}$$

とおくと，この関数のグラフは右図のようになる。



[証明] 前ページ問の結果より

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & :\ \lambda>0\text{ のとき}\\ 0 & :\ \lambda=0\text{ のとき}\\ -\dfrac{\pi}{2} & :\ \lambda<0\text{ のとき}\end{cases}$$

である。これを用いると上の定理が示される。

(1) $t>b$ のとき $b-t<0$，$t-a>0$ より $I_{\{a,b\}}(t)=\dfrac{1}{\pi}\left\{-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right\}=0$

(2) $t=b$ のとき $b-t=0$，$t-a>0$ より $I_{\{a,b\}}(t)=\dfrac{1}{\pi}\left\{0+\dfrac{\pi}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$

(3) $a<t<b$ のとき $b-t>0$，$t-a>0$ より $I_{\{a,b\}}(t)=\dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right\}=1$

(4) $t=a$ のとき $b-t>0$，$t-a=0$ より $I_{\{a,b\}}(t)=\dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}+0\right\}=\dfrac{1}{2}$

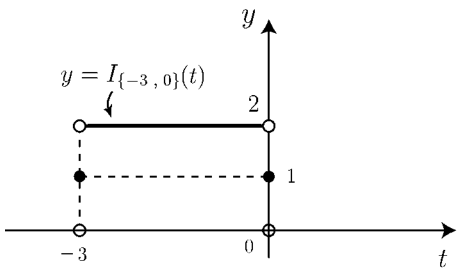
(5) $t<a$ のとき $b-t>0$，$t-a<0$ より $I_{\{a,b\}}(t)=\dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right\}=0$

(証明終)

例 $\dfrac{2}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(-xt)}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((3+t)x\big)}{x}dx\right\}$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((0-t)x\big)}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((t-(-3))x\big)}{x}dx\right\}$$

$$=2I_{\{\,-3\,,\,0\,\}}(t)$$



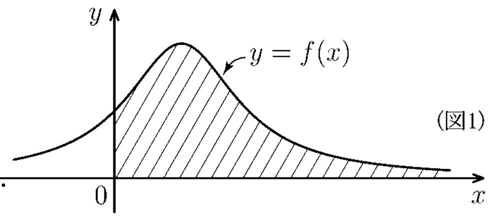
問 次式を関数 $I_{\{\,a\,,\,b\,\}}(t)$ を用いて表せ。

(1) $\dfrac{1}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin((8-t)x)}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{x}dx\right\}$

(2) $\dfrac{6}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((8-t)x\big)}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin\big((8+t)x\big)}{x}dx\right\}$

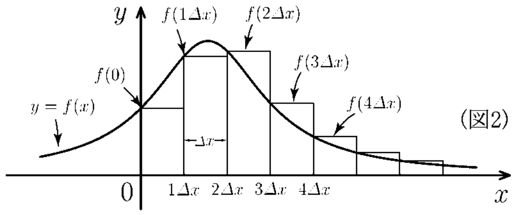
< 広義積分の近似 >

$f(x)$ = 0 のとき $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ は図 1の斜線部分の面積を意味する。これを図 2のように底辺が Δx の長方形の面積の和で近似する。すなわち



(図1)

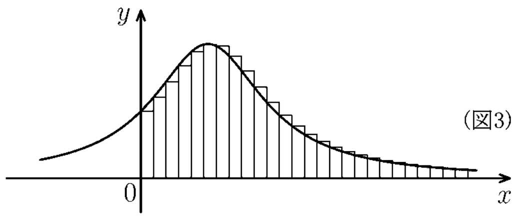
$$\int_0^\infty f(x)dx \;;\; f(0)\Delta x + f(1\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + \cdots$$
$$\cdots + f(k\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x$$



(図2)

ここで底辺の幅 Δx を小さくすれば，図 $3,4$ のように

図 1 の面積 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ に近づく。

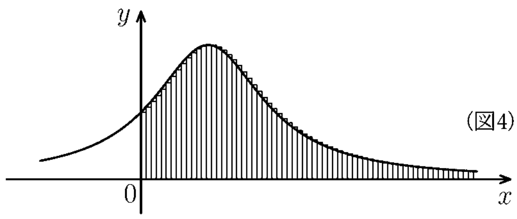


(図3)

一般に次の定理がなりたつ。

[定理 1] $$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^\infty f(x)dx}$$

この定理は $f(x)$ = 0 でなくても $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx$ が有限の値であれば成立する。
同様にして次の定理も成立する。



(図4)

[定理 2] $$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx}$$

例

(1) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k\Delta x} \sin(\alpha k\Delta x)\Delta x = \int_0^\infty e^{-\pi x}\sin(\alpha x)dx$$

(2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(k\Delta x)^2} k(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2} x dx$$

(3) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)e^{itk\Delta x}\Delta x = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{itx}dx$$

(注) このような問題は $k\Delta x \to x$ ，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\boxed{}\Delta x \to \int_0^\infty \boxed{}dx$ ，$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boxed{}\Delta x \to \int_{-\infty}^\infty \boxed{}dx$

とおきかえればよい。

問 次の極限を広義積分で表せ。

(1) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha k\Delta x)\Delta x}{1+(k\Delta x)^2}$$

(2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta x)e^{ik\Delta x t}\Delta x$$

＜フーリエ変換１＞

今後周期関数の変数を x のかわりに時間変数 t にする。周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は 59 ページの式で x を t に変えると

$$(*) \quad \boxed{f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \ , \quad \omega = \frac{2\pi}{L} \ , \quad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt}$$

となる。$f(t)$ が周期関数でないときはフーリエ級数では表現できない。そのときは周期 L が無限大 $(=\infty)$ の関数と考え，$L \to \infty$ の極限を考える。

問　$F_L(x) = \displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ixt} dt$ ，　$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$ とおく。

(1) 次の極限値を広義積分で表せ。　$\displaystyle\lim_{L\to\infty} F_L(x) =$

(2) $x = k\omega$ のときの $F_L(x)$ の値を定積分の式で表せ。　$F_L(k\omega) =$

(3) $(*)$ 式の C_k を ω と $F_L(k\omega)$ で表せ。($\frac{1}{L} = \frac{\omega}{2\pi}$ を使う)　$C_k =$

(4) 次式を $F_L(k\omega)$ と ω を用いて表せ。　$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} =$

(5) (4) で得られた式で $\omega = \Delta x$ とおく。このとき $k\omega = k\Delta x$ である。
$\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \times \Delta x$ を用いて次式を F_L と Δx で表せ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} =$$

(6) 前ページを参考にして，次の極限値を $F_L(x)$ を用いた広義積分の式で表せ。

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F_L(k\Delta x) e^{ik\Delta x t} \Delta x =$$

(7) $L \to \infty$ のとき $\Delta x = \dfrac{2\pi}{L} \to 0$，$F_L(x) \to F(x)$ であることを用いて次の極限値を $F(x)$ を用いた広義積分の式で表せ。

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \lim_{\substack{L\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F_L(k\Delta x) e^{ik\Delta x t} \Delta x =$$

(8) (7) の結果よりフーリエ級数の式 $(*)$ は $L \to \infty$ のとき $F(x)$ を用いると以下の式 $(**)$ になる。$\boxed{}$ 内に適当な文字式を記入せよ。

$$(**) \quad \boxed{f(t) \sim \boxed{} \ , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt}$$

＜ フーリエ変換 2 ＞

前ページの結果より

$$(*) \quad \boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \ , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt}$$

が得られた。$F(x)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換**という。また $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ を**フーリエ逆変換**という。フーリエ変換にはいろいろな定義式があるが，このワークブックでは $(*)$ 式を用いることにする。

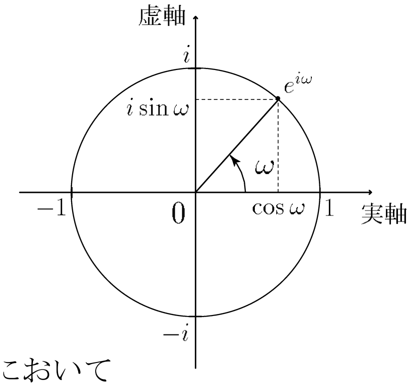
(注 1) 信号処理や通信理論の本では $(*)$ 式の変数 x を ω で表す場合が多い。$(*)$ 式のかわりに

$$(*)' \quad \boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ , \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt}$$

を用いる。t が時間を表す変数の場合に，ω を**角周波数**という。t の単位が秒であれば，関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度 ω だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。$(*)'$ 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi} \ , \quad \mathscr{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

とおくと $\omega = 2\pi\ell$，$d\omega = 2\pi d\ell$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t}2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell$$

となるので，$(*)'$ は

$$(**) \quad \boxed{f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell \ , \quad \mathscr{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt}$$

と書きなおせる。$(**)$ もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。t が時間を示す変数のとき，ℓ を**周波数**という。関数 $e^{i2\pi\ell t}$

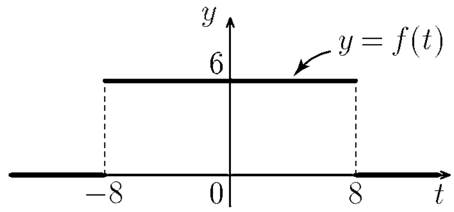
$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i\sin(2\pi\ell t)$$

の実部 $\cos(2\pi\ell t)$ と虚部 $\sin(2\pi\ell t)$ は基本周期が $\dfrac{1}{\ell}$ である。t の単位が秒であれば，1 秒間に基本波形が ℓ 回現れる。

＜ フーリエ変換 3 ＞

例

$$f(t) = \begin{cases} 6 & : \ -8 < t < 8 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$



の場合に $f(t)$ のフーリエ変換 $F(x)$ を求める。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big\{\cos(xt) - i\sin(xt)\big\}dt$$

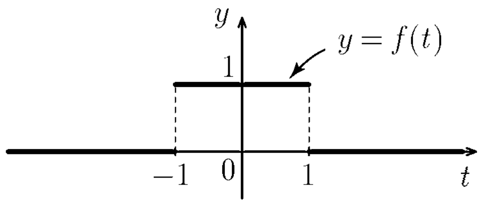
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = \int_{-8}^{8} 6\cos(xt)dt - i\int_{-8}^{8} 6\sin(xt)dt$$

$$= 12\int_{0}^{8} \cos(xt)dt = 12\left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=8} = \frac{12\sin(8x)}{x}$$

(注) 上の計算で偶関数と奇関数の積分の性質 (17 ページ) を使っている。

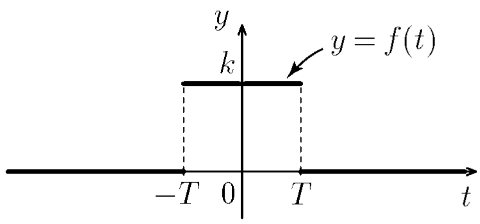
問 関数 $f(t)$ が次の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & : \ -1 < t < 1 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$



(2) $f(t) = \begin{cases} k & : \ -T < t < T \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$

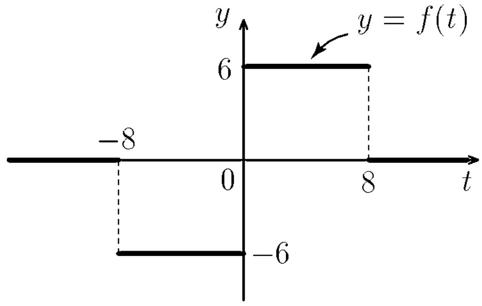
(ただし $T > 0$ とする)



＜ フーリエ変換 4 ＞

例

$$f(t) = \begin{cases} 6 & : \ 0 < t < 8 \\ -6 & : \ -8 < t < 0 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$



の場合に $f(t)$ のフーリエ変換 $F(x)$ を求める。

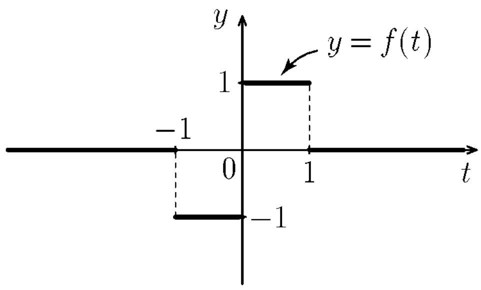
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt$$

$$= \int_{-8}^{0}(-6)\cos(xt)dt + \int_{0}^{8} 6\cos(xt)dt - i\left\{\int_{-8}^{0}(-6)\sin(xt)dt + \int_{0}^{8} 6\sin(xt)dt\right\}$$

$$= -12i\int_{0}^{8}\sin(xt)dt = -12i\left[-\frac{\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=8} = 12i\left(\frac{\cos(8x)-1}{x}\right)$$

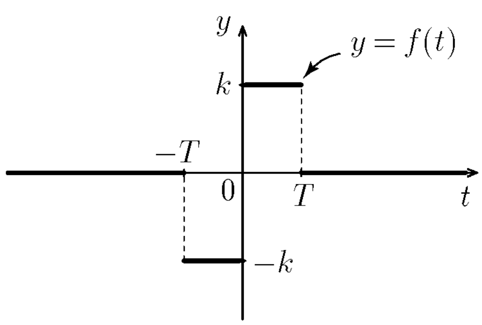
問 関数 $f(t)$ が次の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を求めよ。

(1) $$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ 0 < t < 1 \\ -1 & : \ -1 < t < 0 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$



(2) $$f(t) = \begin{cases} k & : \ 0 < t < T \\ -k & : \ -T < t < 0 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

(ただし $T > 0$)

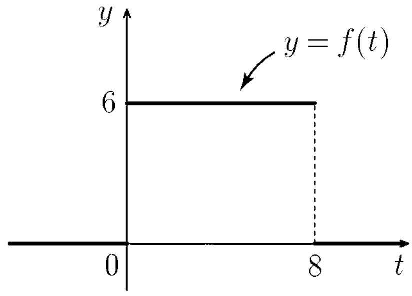


＜ フーリエ変換 5 ＞

例

$$f(t) = \begin{cases} 6 & : \ 0 < t < 8 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を求める。



$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt$$

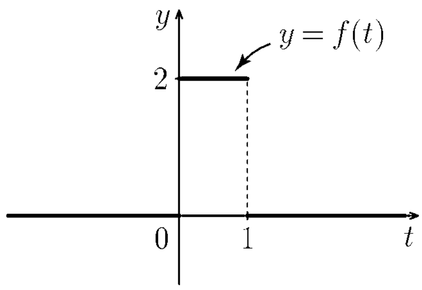
$$= \int_0^8 6\cos(xt)dt - i\int_0^8 6\sin(xt)dt$$

$$= \left[\frac{6\sin(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=8} - i\left[\frac{-6\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=8}$$

$$= \frac{6\sin(8x)}{x} + 6i\left(\frac{\cos(8x)-1}{x}\right)$$

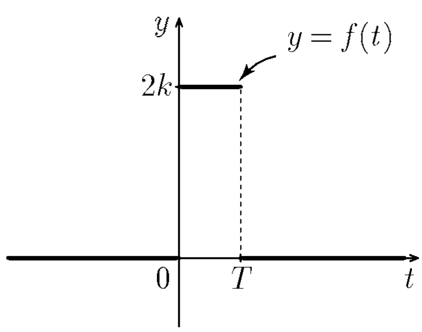
問 関数 $f(t)$ が次の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} 2 & : \ 0 < t < 1 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$



(2) $f(t) = \begin{cases} 2k & : \ 0 < t < T \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$

(ただし $T > 0$ とする)

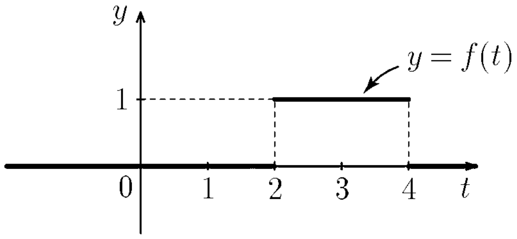


< フーリエ変換 6 >

例

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ 2 < t < 4 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を求める。



$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt$$

$$= \int_2^4 \cos(xt)dt - i\int_2^4 \sin(xt)dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{t=2}^{t=4} - i\left[-\frac{\cos(xt)}{x}\right]_{t=2}^{t=4}$$

$$= \frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x} + i\left(\frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)$$

(注) フーリエ変換を e^{-ixt} を用いて計算すると

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_2^4 e^{-ixt}dt = \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix}\right]_{t=2}^{t=4} = \frac{e^{-4ix} - e^{-2ix}}{-ix}$$

$$= \frac{e^{-3ix}}{-ix}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right) = \frac{e^{-3ix}}{-ix}(-2i\sin x) = \frac{2\sin x}{x}e^{-3ix}$$

問 1 $\dfrac{2\sin x}{x}e^{-3ix} = \dfrac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x} + i\left(\dfrac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)$ であることを示せ。

問 2

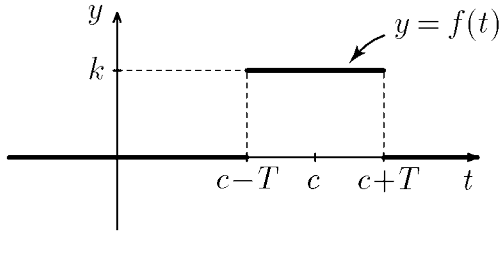
$$f(t) = \begin{cases} k & : \ a < t < b \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を例のような形で求めよ。

問 3

$$f(t) = \begin{cases} k & : \ c - T < t < c + T \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

の場合にフーリエ変換 $F(x)$ を (注) のような形で求めよ。

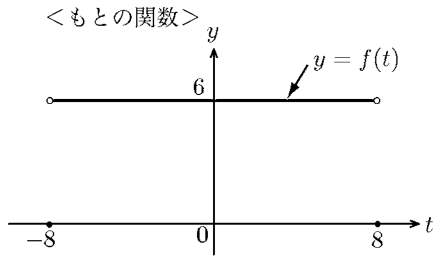


< フーリエ逆変換１ >

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ に対し, 逆変換は

$$f(t)\ \sim\ \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx}\quad \text{(フーリエ逆変換)}$$

である。フーリエ逆変換を求める練習をする。



例　$f(t)=\begin{cases} 6 & : \ -8<t<8 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$　のとき

P67 よりフーリエ変換は $F(x)=\dfrac{12\sin(8x)}{x}$

であった。よってフーリエ逆変換は

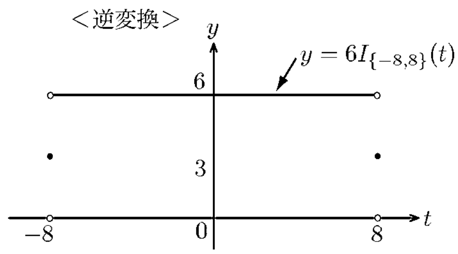
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{12\sin(8x)}{x}\Big(\cos(xt)+i\sin(xt)\Big)dx$$

$$=\frac{6}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(8x)\cos(xt)}{x}dx+\frac{6i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(8x)\sin(xt)}{x}dx$$

$$=\frac{12}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(8x)\cos(xt)}{x}dx=\frac{12}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(8x+xt)+\sin(8x-xt)}{2x}dx$$

$$=\frac{6}{\pi}\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{\sin((8-t)x)}{x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin((t+8)x)}{x}dx\right\}$$

$$=6I_{\{-8,8\}}(t)$$



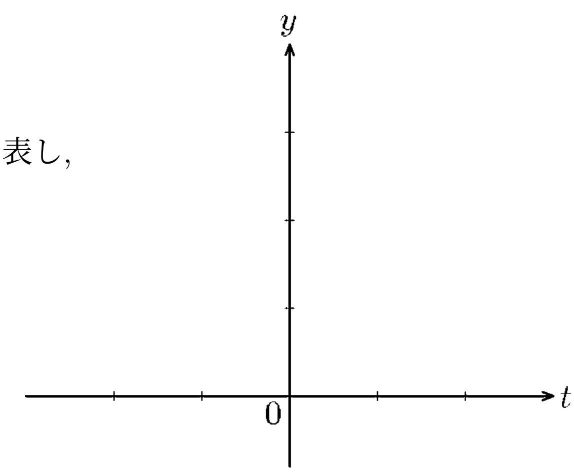
となる。ここで $I_{\{a,b\}}(t)$ は 63 ページで定義した関数であり, $6I_{\{-8,8\}}(t)$ のグラフは右図のようになる。

(注) 上の計算で i のついた項は奇関数の積分の性質 (P17) より 0 になる。

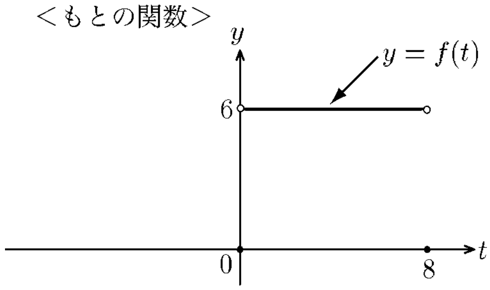
問　$f(t)=\begin{cases} 1 & : \ -1<t<1 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$

の場合にフーリエ逆変換を求め, $I_{\{a,b\}}(t)$ で表し,

右図内に逆変換のグラフを描け。



＜フーリエ逆変換 2＞



例 $f(t) = \begin{cases} 6 & : \ 0 < t < 8 \\ 0 & : \ その他 \end{cases}$ のとき

P69 より　フーリエ変換 $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{6\sin(8x)}{x} + 6i\left(\frac{\cos(8x) - 1}{x}\right)$$

である。よってフーリエ逆変換は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{6\sin(8x)}{x} + 6i\left(\frac{\cos(8x)-1}{x}\right)\right\}\left\{\cos(xt) + i\sin(xt)\right\}dx$$

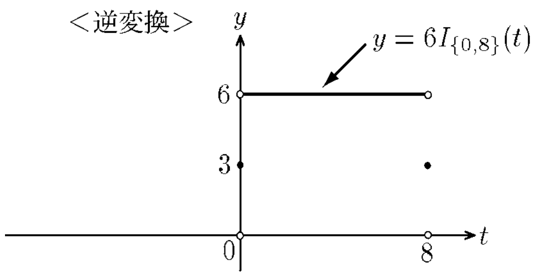
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 6\left\{\frac{\sin(8x)\cos(xt) - (\cos(8x)-1)\sin(xt)}{x}\right\}dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 6i\left\{\frac{(\cos(8x)-1)\cos(xt) + \sin(8x)\sin(xt)}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(8x)\cos(xt) - \cos(8x)\sin(xt) + \sin(xt)}{x}dx$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin((8-t)x) + \sin(xt)}{x}dx$$

$$= 6I_{\{0,8\}}(t)$$

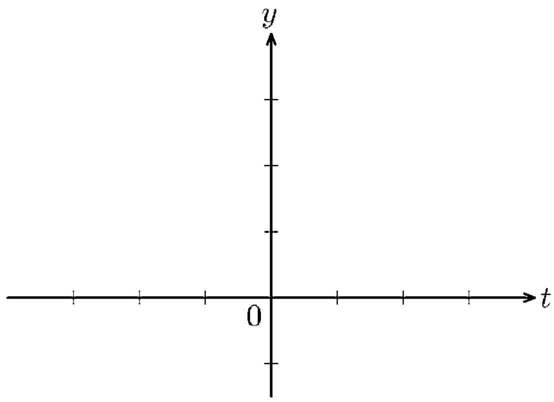


ここで $I_{\{a,b\}}(t)$ は P63 で定義した関数であり，逆変換のグラフは右図のようになる。

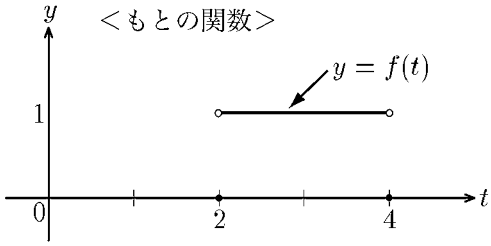
(注) 上の計算で i のついた項は奇関数の積分の性質 (P17) より 0 になる。

問 $f(t) = \begin{cases} 2 & : \ 0 < t < 1 \\ 0 & : \ その他 \end{cases}$

の場合にフーリエ逆変換を求め，$I_{\{a,b\}}(t)$ で表し，右図内に逆変換のグラフを描け。



＜ フーリエ逆変換 3 ＞



例 $f(t) = \begin{cases} 1 & : \ 2 < t < 4 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$ のとき

P70 よりフーリエ変換 $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x} + i\left(\frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)$$

である。よってフーリエ逆変換は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x} + i\left(\frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)\right\}\left\{\cos(xt) + i\sin(xt)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x}\right)\cos(xt) - \left(\frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)\sin(xt)\right\}dx$$

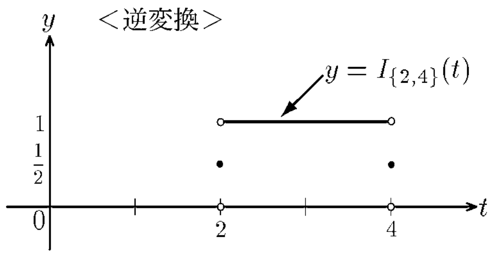
$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x}\right)\sin(xt) + \left(\frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x}\right)\cos(xt)\right\}dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\left\{\sin(4x)\cos(xt) - \sin(2x)\cos(xt) - \cos(4x)\sin(xt) + \cos(2x)\sin(xt)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\left\{\sin(4x)\cos(xt) - \cos(4x)\sin(xt) + \sin(xt)\cos(2x) - \cos(xt)\sin(2x)\right\}dx$$

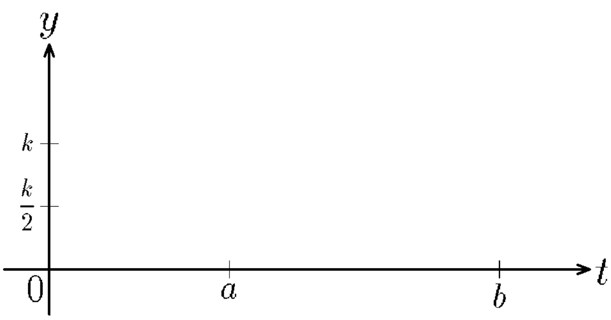
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\left\{\sin((4-t)x) + \sin((t-2)x)\right\}dx$$

$$= I_{\{2,4\}}(t)$$



問 $f(t) = \begin{cases} k & : \ a < t < b \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$

の場合にフーリエ逆変換を求め,
$I_{\{a,b\}}(t)$ で表し, 右図内に
逆変換のグラフを描け。



＜ 逆変換の収束１ ＞

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ に対し，逆変換は広義積分の定義より

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx \quad (\text{逆変換})$$

と表される。この右辺の定積分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx$ はフーリエ級数の第 n 部分和

に相当し，$n \to \infty$ のとき $f(t)$ に近づく。

[補題] フーリエ変換の定義から次式がなりたつ。

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\rho_n(t-s)ds}$$

ただし

$$\boxed{\rho_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}}$$

である。

＜証明＞ フーリエ変換を s に関する積分 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-ixs}ds$ で表すと

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-ixs}ds\right)e^{ixt}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\left(\int_{-n}^{n}\frac{1}{2\pi}e^{i(t-s)x}dx\right)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{\sin(n(t-s))}{\pi(t-s)}ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\rho_n(t-s)ds \quad (\text{証明終})$$

問 $t \neq s$ に対し，次の積分を求めよ。

$$\int_{-n}^{n}\frac{1}{2\pi}e^{i(t-s)x}dx =$$

< 逆変換の収束 2 >

実数全体で定義されている関数 $f(t), g(t)$ に対し，

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds} \quad \Big(f(t) \text{ と } g(t) \text{ とのたたみこみ}\Big)$$

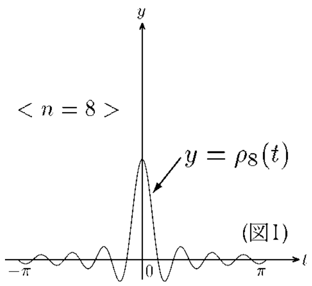
を $f(t)$ と $g(t)$ との**たたみこみ**という。

前ページより $f(t)$ のフーリエ変換 $F(x)$ に対し，逆変換は

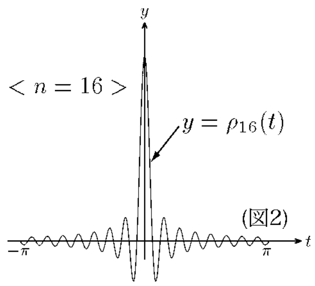
$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t)} \quad \text{(逆変換)}$$

と表される。ここで $\rho_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\pi t}$ である。$\rho_n(t)$ のグラフは図 1，2，3 のようなグラフである。

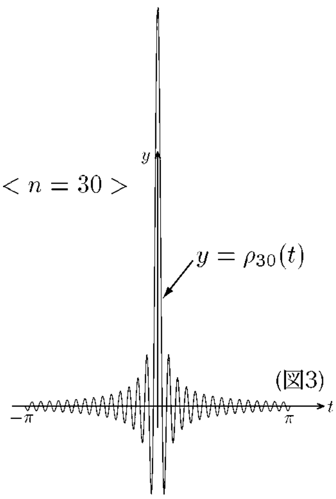
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = (f*\rho_n)(t)$ はフーリエ級数の第 n 部分和に相当する。



(図1)



(図2)



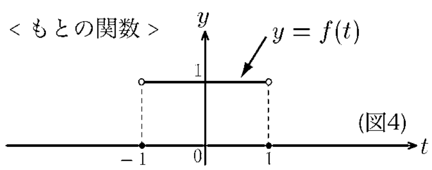
(図3)

$n \to \infty$ のとき $(f*\rho_n)(t)$ は $f(t)$ に近づいていく。

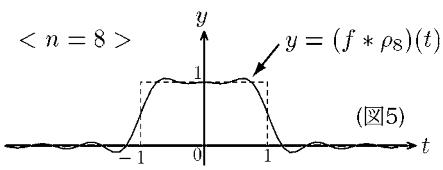
例

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ -1 < t < 1 \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$$

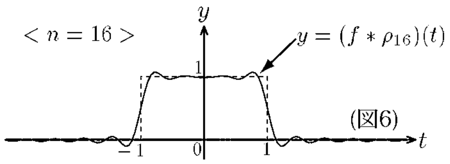
の場合，$(f*\rho_n)(t)$ のグラフは図 5, 図 6, 図 7, 図 8 のようなグラフである。$n \to \infty$ のとき $(f*\rho_n)(t)$ は逆変換 $I_{\{-1,1\}}(t)$ (図 9) に近づいていく。



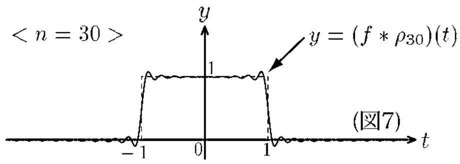
(図4)



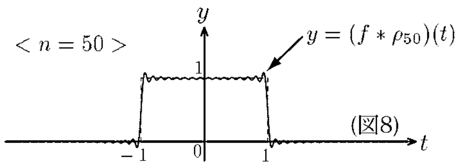
(図5)



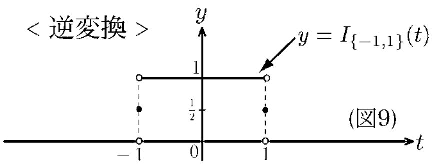
(図6)



(図7)



(図8)

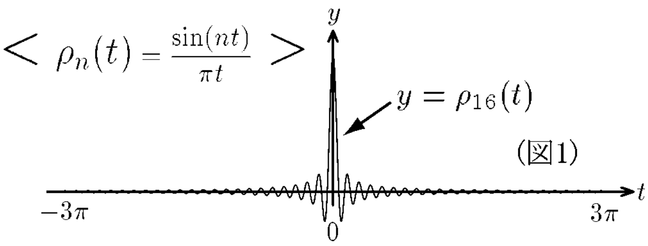


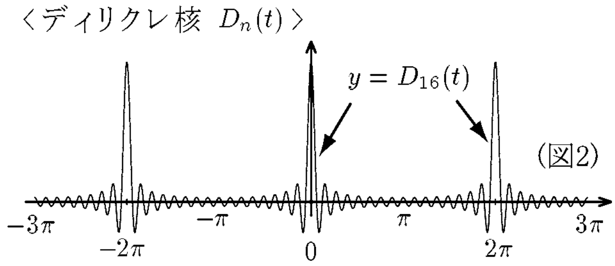
(図9)

< 反転公式 >

前ページの関数 $\rho_n(t)=\dfrac{\sin(nt)}{\pi t}$ はディリクレ核 $D_n(t)=\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi\sin(\frac{t}{2})}$ とよく似ている。

実際 $-\pi<t<\pi$ の範囲ではグラフはほとんど同じであるが，ディリクレ核は周期 2π の周期関数であるところが $\rho_n(t)$ と異なる。図 1 と図 2 は $n=16$ のときのグラフである。





$\rho_n(t)$ に関して 62 ページより次の性質がなりたつ。

$$
(1)\ \int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)dt=1, \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\rho_n(t)=\begin{cases}+\infty & : \ t=0\text{ のとき}\\ 0 & : \ \text{その他}\end{cases}
$$

また 49 ページ定理 1 と同様にして，ほとんどの関数 $f(t)$ に対し，次式が成り立つ。

$$
(3)\ \lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\rho_n(t-s)ds=\frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}
$$

これは 74 ページより $f(t)$ のフーリ変換 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt$ の逆変換が

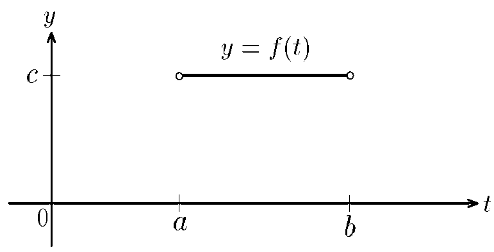
$$
\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}F(x)e^{ixt}dx=\lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t)=\frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}} \quad \text{(反転公式)}
$$

左極限値 $f_-(t)$ と右極限値 $f_+(t)$ の平均になることを意味する。これを**フーリエの反転公式**という。

問 1 関数 $f(x)$ が連続関数の場合反転公式を簡単にせよ。$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx=$

問 2 実数 a，b，c $(a<b)$ に対し，

$$
f(t)=\begin{cases}c & : \ a<t<b\text{ のとき}\\ 0 & : \ \text{その他}\end{cases}
$$



であるとき，$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x)$，

およびフーリエ逆変換 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx$ を求めよ。