高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A

$No.$ 2

内容

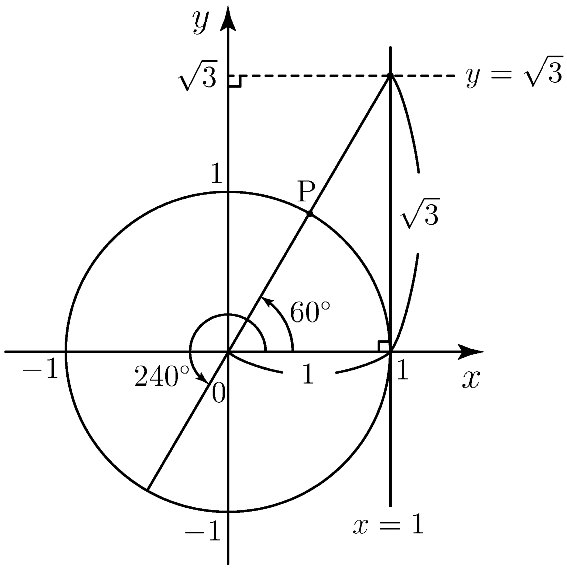
◎ 指数関数

◎ 対数関数

◎ 三角関数

◎ 余弦定理

◎ 加法定理



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜分数指数 1＞

例 1 自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\text{ 個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m\times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

(1) $$2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

(2) $$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例 2 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$, (2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$, (4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 次の値を求めよ。

(1) $121^{\frac{1}{2}}$ (2) $27^{\frac{1}{3}}$ (3) $25^{\frac{3}{2}}$

(4) $343^{\frac{2}{3}}$ (5) $81^{\frac{5}{4}}$ (6) $32^{\frac{4}{5}}$

(7) $16^{-\frac{1}{2}}$ (8) $27^{-\frac{4}{3}}$ (9) $64^{-\frac{2}{3}}$

< 分数指数 2 >

例 1 $x = \sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{(5^2)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$ より $x = \sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

例 2 $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{4^3}$ (2) $\sqrt[12]{7^4}$ (3) $\sqrt[3]{5^9}$ (4) $\sqrt[6]{27^4}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

(別解) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

例 4 $\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{5^3} \times \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{5 \times 5^3 \times 5^2} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(別解) $\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$

例 5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

(別解) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[2]{10} \times \sqrt[4]{100}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9}}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$ (4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$

＜ 指数法則 ＞

分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して

$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\square}$, $2^\circ : a^p \div a^q = a^{\square}$

$3^\circ : (a^p)^q = a^{\square}$, $4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\square$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 (1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^3}$

(2) $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^2}$

(4) $\sqrt[3]{a^7} \div (\sqrt[3]{a})^4$

(5) $(\sqrt[4]{a})^{\frac{8}{3}}$

(6) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}}\right)^{-2}$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

（注）ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $(3^3 \times 5^2)^{\frac{1}{7}} \times (3^4 \times 5^5)^{\frac{1}{7}}$

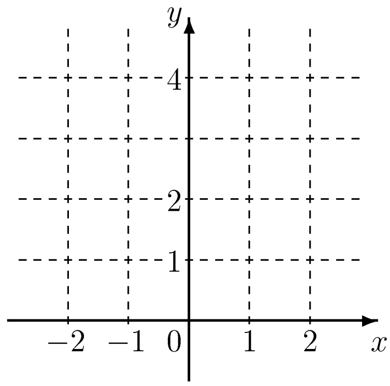
(2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{72}$

< 指数関数 >

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

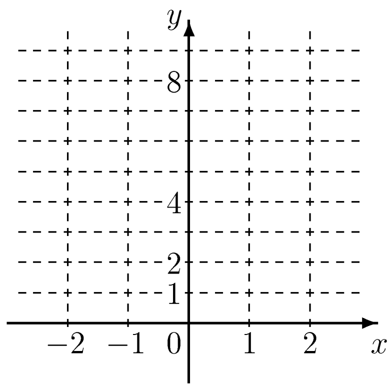
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



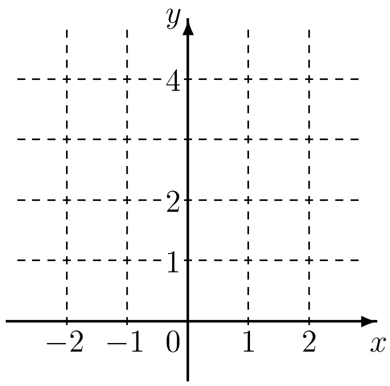
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



< 指数方程式 >

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$　　(2) $4^x = 0.5$　　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より (答) $x = \dfrac{7}{2}$

(2) $4^x = 0.5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1$ より (答) $x = -\dfrac{1}{2}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \dfrac{2}{3}$ より (答) $x = -\dfrac{2}{3}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$　　(2) $3^x = 3$　　(3) $3^x = 9$　　(4) $3^x = \dfrac{1}{3}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$　　(6) $10^x = 1$　　(7) $10^x = 100$　　(8) $10^x = \sqrt[3]{10}$

(9) $10^x = 0.1$　　(10) $10^x = 0.01$　　(11) $2^x = 1$　　(12) $2^x = 4$

(13) $2^x = 32$　　(14) $2^x = \sqrt[4]{2}$　　(15) $2^x = 2\sqrt{2}$　　(16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$　　(18) $2^x = \dfrac{1}{4}$　　(19) $2^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(20) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.5$　　(22) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.125$　　(23) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{4}$　　(24) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4$　　(26) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$　　(27) $4^x = 1$　　(28) $4^x = 16$

(29) $4^x = 2$　　(30) $4^x = 8$　　(31) $4^x = 0.25$　　(32) $4^x = \sqrt{2}$

＜ 対数１ ＞

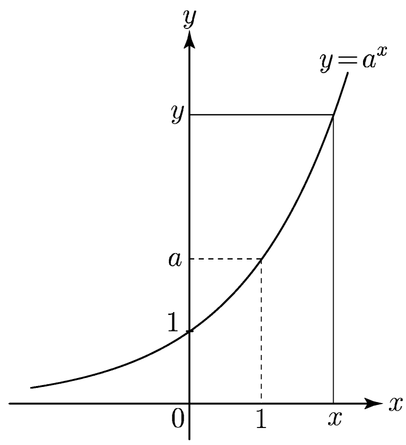
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例1　(1)　$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2)　$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問1　次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　　(2) $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$　　(3) $3 = \log_3 27$　　(4) $\dfrac{3}{2} = \log_9 27$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例2　(1)　$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2)　$\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問2　次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 64$　　(2)　$\log_3 243$

(3)　$\log_{10} 1000$　　(4)　$\log_5 625$

< 対数 2 >

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\frac{25}{100}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$　(2) $\log_2 \sqrt{2}$　(3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$　(5) $\log_4 64$　(6) $\log_4 1$

(7) $\log_6 \sqrt[3]{6}$　(8) $\log_5 0.2$　(9) $\log_{10} 0.01$

(10) $\log_7 \sqrt[3]{49}$　(11) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(12) $\log_4 8$

例 2

$$\log_2(8\times 16) = \log_2\left(2^3\times 2^4\right) = \log_2\left(2^{3+4}\right) = 3+4 = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(2^4\right) = 3+4 = 7$$

より

$$\log_2(8\times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

がなりたつ。

問 2 $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ の場合に、例 2 を参考にして

$$\log_2(M\times N) = \log_2 M + \log_2 N$$

を示せ。

(証明)

＜ 対数３ ＞

例 1 $\log_2\left(\dfrac{128}{8}\right) = \log_2\left(\dfrac{2^7}{2^3}\right) = \log_2\left(2^{7-3}\right) = 7-3=4$

$\log_2 128 - \log_2 8 = \log_2\left(2^7\right) - \log_2\left(2^3\right) = 7-3=4$

より

$$\log_2\left(\frac{128}{8}\right) = \log_2 128 - \log_2 8$$

が成り立つ。

問 1 $M=2^\alpha,\ \ N=2^\beta$ の場合に、例 1 を参考にして

$$\log_2\left(\frac{M}{N}\right) = \log_2 M - \log_2 N$$

を示せ。

(証明)

例 2 $\log_2 8^5 = \log_2\left(\left(2^3\right)^5\right) = \log_2\left(2^{3\times5}\right) = 3\times5 = 15$

$5\times\log_2 8 = 5\times\log_2\left(2^3\right) = 5\times3 = 15$

より

$$\log_2\left(8^5\right) = 5\times\log_2 8$$

が成り立つ。

問 2 $M=2^\alpha$ の場合に、例 2 を参考にして

$$\log_2(M^r) = r\times\log_2 M$$

を示せ。

(証明)

＜ 対数 4 ＞

7 ページと同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(\, M \times N \,) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問 1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) =$$

問 2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$$\log_a (\, M^r \,) =$$

例　(1)　$\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(\, 54 \times 1.5\,) = \log_3 81 = 4$

(2)　$\log_{10}(\, 50\,) + \log_{10}(\, 20\,) = \log_{10}(\, 50 \times 20\,) = \log_{10} 1000 = 3$

(3)　$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 \left(6^2 \right) - \log_3 4 = \log_3 \left(\dfrac{6^2}{4} \right) = \log_3 9 = 2$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1)　$\log_2 12 + \log_2 \left(\dfrac{1}{3} \right)$

(2)　$\log_3 108 - \log_3 4$

(3)　$\log_6 12 + \log_6 2 + 2\log_6 3$

(4)　$\log_{10} 4 + \log_{10} 25 - \log_{10} 0.1$

< 底の変換 >

対数には次の性質がある。

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \text{ (底の変換)}$$

ただし a, b, c は正の数であり $a \neq 1,\quad c \neq 1$ である。

[証明] $\log_a b = x$ とおくと $a^x = b$

c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c(a^x) = \log_c b$$

従って

$$x \log_c a = \log_c b$$

よって

$$\log_a b = x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(証明終)}$$

例 $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

問 1　等式 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ を証明せよ。

問 2　次式の値を求めよ。

(1) $\log_4 32 + \log_{16} 64$　　　　(2) $(\log_3 4) \times (\log_4 9)$

(3) $(\log_2 3) \times (\log_3 4) \times (\log_4 2)$

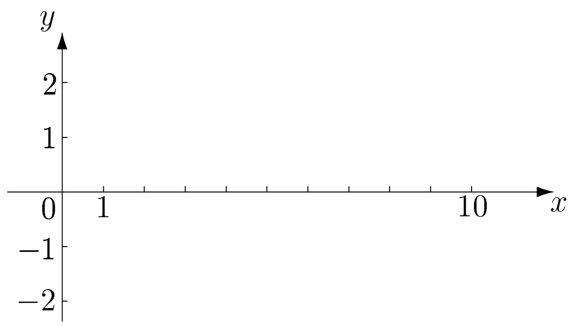
＜対数関数＞

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域(括弧内の x の範囲)内で、グラフの概形を書け。

(1)　$y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

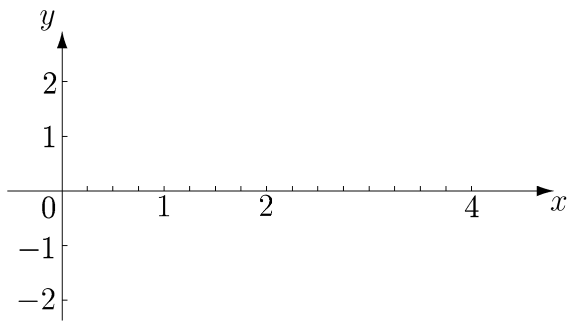
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



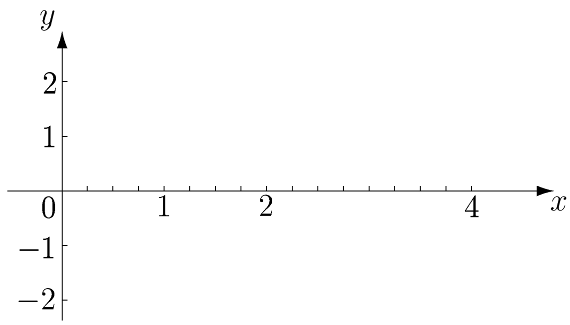
(2)　$y = \log_2 x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

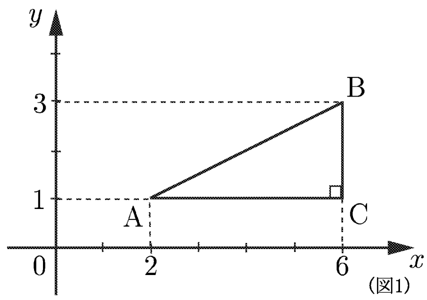
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



＜平面上の距離＞

例 1　平面上の 2 点 A$(2,1)$, B$(6,3)$ の間の距離 AB を求めたい。

図 1 より三角形 ACB は直角三角形だからピタゴラスの定理より

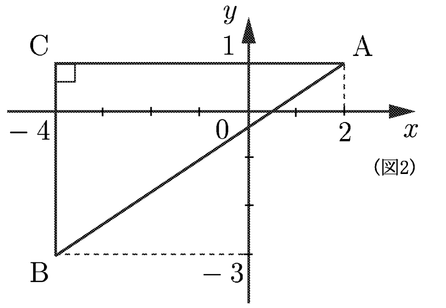


(図1)

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (6-2)^2 + (3-1)^2 \ = \ 4^2 + 2^2 = 20 \end{aligned}$$

よって　　(答) $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

例 2　平面上の 2 点 A$(2,1)$, B$(-4,-3)$ の間の距離 AB を求めたい。図 2 より



(図2)

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= \big(2-(-4)\big)^2 + \big(1-(-3)\big)^2 \ = \ 6^2 + 4^2 \\ &= 52 \end{aligned}$$

よって　(答) $AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

(注)　例 2 で　$AC^2 = (-4-2)^2 = (-6)^2 = 36$,
$BC^2 = (-3-1)^2 = (-4)^2 = 16$　と計算しても良い。

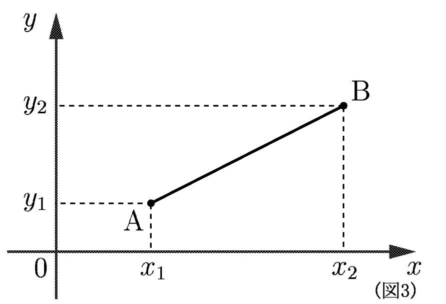
問 1　平面上の 2 点 A,B が以下のような座標のとき、2 点間の距離 AB を求めよ。

(1) A$(2,3)$, B$(6,1)$　　(2) A$(1,2)$, B$(-1,0)$　　(3) A$(2,-1)$, B$(-1,-3)$

AB=　　AB=　　AB=

問 2　平面上の 2 点 A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) の間の距離 AB を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ。

(注) $\sqrt{\ }$ の中の 2 乗の式は展開しないほうがよい。



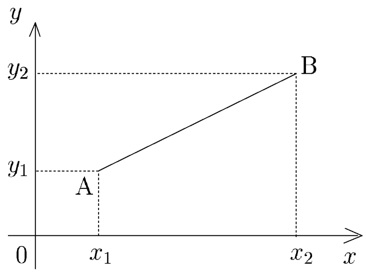
(図3)

AB=

＜円の方程式＞

平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$
間の距離 AB は、前ページより

$$(*)\quad \boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

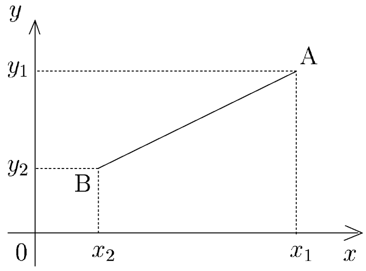


(図1)

であることがわかった。これは 2 点 A,B が
図 1 のような位置関係だけでなく、図 2
のような位置関係でも成立する。それは

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 \ , \ (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

が成り立つからである。公式 $(*)$ は 2 点 A,B が
平面上のどんな位置にあっても成立する。



(図2)

例　点 (6,4) を中心として半径 3 の
円周上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ があるとする。

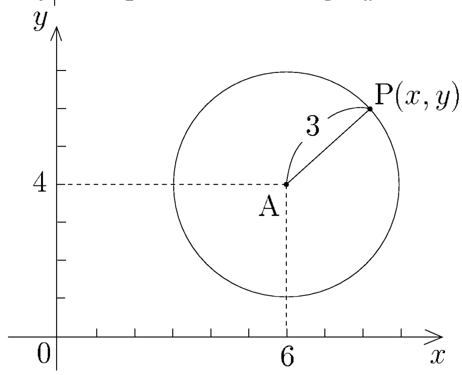
$$\mathrm{AP} = 3$$

より

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = 3$$

であるから両辺を 2 乗すれば

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 9 \quad \cdots \quad (1)$$



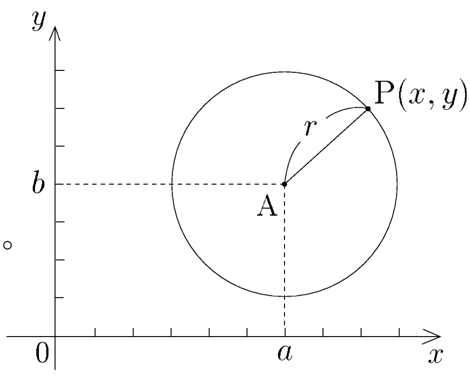
(図3)

となる。この式は円周上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ の x 座標と y 座標が満足する関係式である。(1) 式をこの**円の方程式**という。

問 1　点 $\mathrm{A}(a, b)$ を中心として半径 r の
円周上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ があるとき、式

$$\left(x - \boxed{}\right)^2 + \left(y - \boxed{}\right)^2 = \boxed{} \qquad \cdots (**)$$

が成り立つ。$\boxed{}$ に適当な文字を入れよ。
$(**)$ 式を 中心 (a, b)、半径 r の円の方程式という。



(図4)

問 2　次の円の方程式が表す円の中心と半径を求めよ。

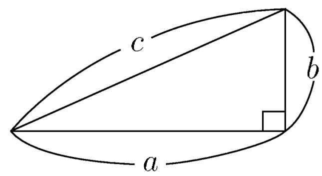
(1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ ： 中心 (　　,　　), 半径=

(2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ： 中心 (　　,　　), 半径=

(3) $x^2 + y^2 = 1$ ： 中心 (　　,　　), 半径=

< 直角三角形 >

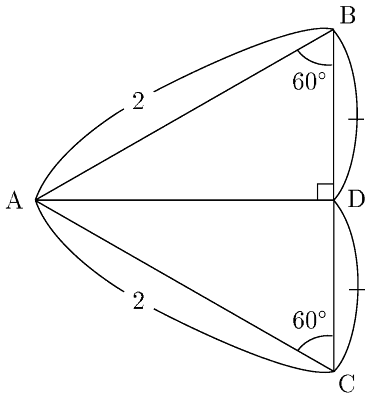
問 1 右辺 a, 高さ b, 斜辺 c, の直角三角形に対し，ピタゴラスの定理を用いて斜辺の長さ c を a と b で表せ。



（図１）

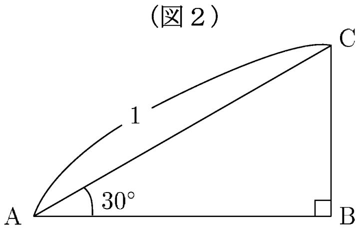
(注) $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$ であるが $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
たとえば $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$

問 2 図 2 のように一辺の長さが 2 である正三角形ABC に対し，BC の中点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



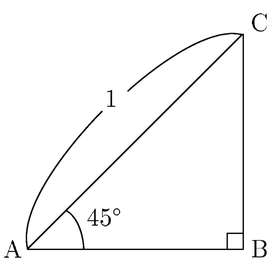
（図２）

問 3 図 3 の直角三角形ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図３）

問 4 図 4 の直角三角形ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図４）

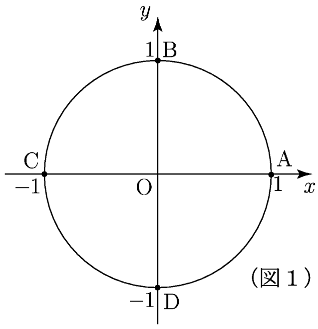
< 円周上の点 >

原点 O を中心として半径 1 の円周上の点の座標を
求める練習をする。前ページの結果を使ってもよい。

問 1 図 1 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (,) , B (,)

C (,) , D (,)

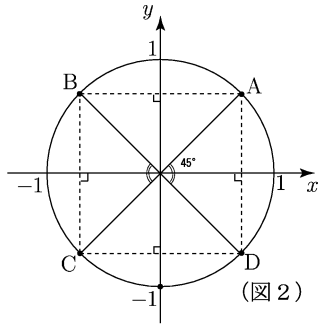


（図 1）

問 2 図 2 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (,) , B (,)

C (,) , D (,)

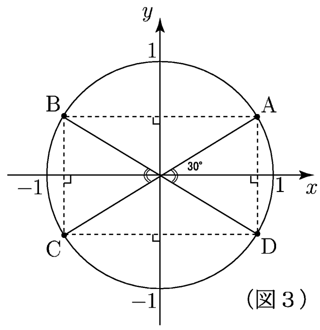


（図 2）

問 3 図 3 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (,) , B (,)

C (,) , D (,)

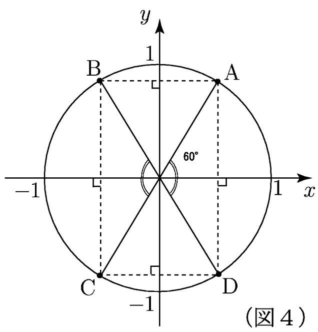


（図 3）

問 4 図 4 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (,) , B (,)

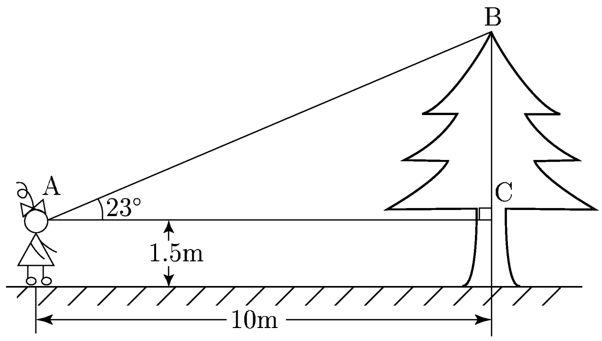
C (,) , D (,)



（図 4）

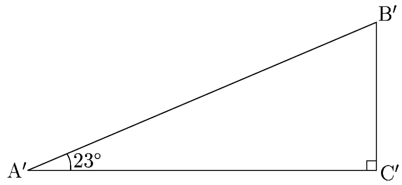
＜三角法＞

例 昔の人は三角形の相似を利用して、ピラミッドとか山の高さを測った。ここでは最も簡単な場合を考える。
右図のような木の高さを測りたい。ある人が木から 10m 離れた場所から木の頂点 B を見上げたら、水平から 23° であった。人の目の位置を A(目の高さは地上 1.5m とする)、木の中心線上で地上 1.5m の位置を C とする。三角形 ABC と相似な三角形を右下図のように紙に正確に描く。A′C′ と B′C′ の長さを実際に測ると



$$\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$

であった。一方 $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$ より



$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$

であるから

$$\mathrm{BC} = 0.4245 \times \mathrm{AC} = 4.245 \ \text{(m)}$$

よって木の高さはこれに 1.5(m) をたして (答) 5.745 (m)

このような直角三角形の比 (高さ/底辺) を**正接** (*tangent*) という。この場合は

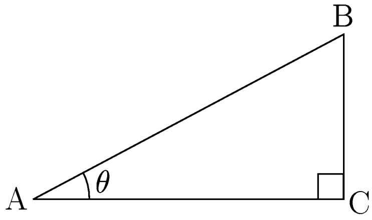
$$\tan 23^\circ = 0.4245$$

である。

問 例と同じ問題で見上げる角度が 30° のとき、木の高さを求めよ。
(ただし $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$ とする。)

＜三角比 1＞

右図のような直角三角形 ABC に対し、角 A が θ であるとき、辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を角 θ の**正接** ($tangent$) といい



$$\boxed{\tan\theta \;=\; \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\left(=\frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}\right)}$$

と書く。同様に辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦** ($sine$) といい

$$\boxed{\sin\theta \;=\; \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\left(=\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。又、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦** ($cosine$) といい

$$\boxed{\cos\theta \;=\; \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\left(=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。これらをまとめて**三角比**という。

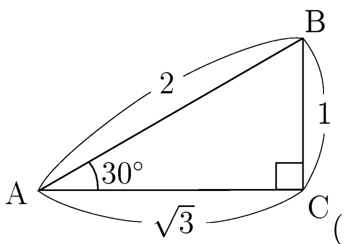
例　図 1 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。



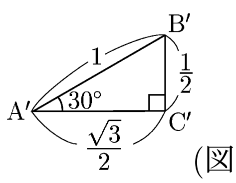
(図 1)

問　図 2 の直角三角形 A′B′C′ をもとに 30° の三角比を求めよ。

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} =$$



(図 2)

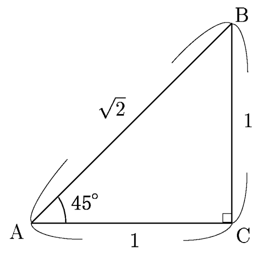
＜三角比２＞

前ページを見て、以下の問に答えよ。

問 1

(1) 図 1 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{BC}{AB} =$, $\dfrac{AC}{AB} =$, $\dfrac{BC}{AC} =$



（図 1）

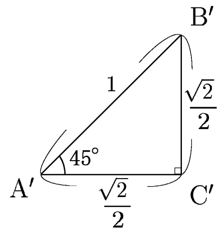
(2) 図 2 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{B'C'}{A'B'} =$, $\dfrac{A'C'}{A'B'} =$, $\dfrac{B'C'}{A'C'} =$

(3) 次の値を求めよ。

$\sin 45^\circ =$, $\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$, $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} =$



（図 2）

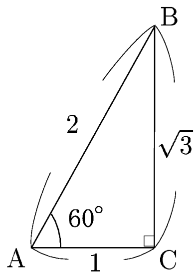
問 2

(1) 図 3 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{BC}{AB} =$, $\dfrac{AC}{AB} =$, $\dfrac{BC}{AC} =$

(2) 図 4 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{B'C'}{A'B'} =$, $\dfrac{A'C'}{A'B'} =$, $\dfrac{B'C'}{A'C'} =$

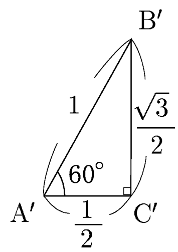


（図 3）

(3) 次の値を求めよ。

$\sin 60^\circ =$, $\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$, $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$



（図 4）

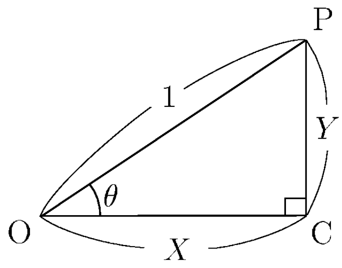
< 三角関数の定義 >

図 1 のように斜辺の長さが 1 の直角三角形 OPC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{OP}} = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OP}} = \frac{X}{1} = X$$

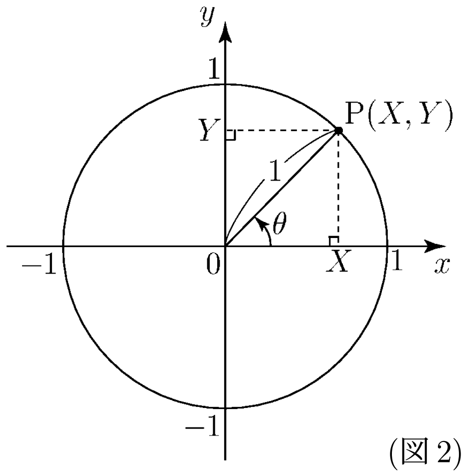
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OC}} = \frac{Y}{X}$$



(図 1)

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径 1 の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は $(1, 0)$ から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で

$$\boxed{\sin\theta = Y\ ,\quad \cos\theta = X\ ,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$



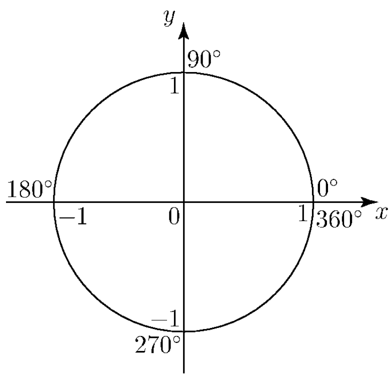
(図 2)

と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。角度 θ は図 2 のように x 軸を基準に反時計まわりにはかる。

(注) $X = 0$ のときだけ $\tan\theta$ の値は定義されない。

例 1 $\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから、このときは $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0\ ,\quad \cos 0^\circ = 1\ ,\quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$



例 2 $\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0$, $Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1\ ,\quad \cos 90^\circ = 0$$

であるが、このとき $\tan 90^\circ$ は求まらない。(分母に 0 がくるので計算できない。)

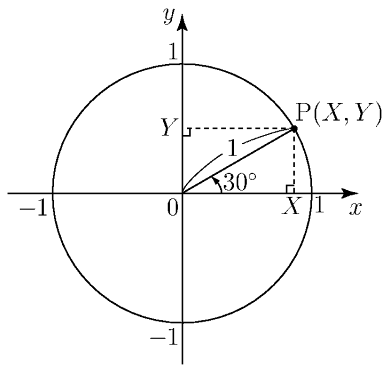
問 次の値を求めよ。

(1) $\sin 180^\circ =$ ，$\cos 180^\circ =$ ，$\tan 180^\circ =$

(2) $\sin 270^\circ =$ ，$\cos 270^\circ =$

＜三角関数の値１＞

問 1 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

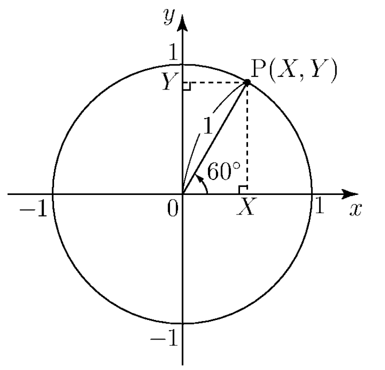


(1) $\cos 30° =$

(2) $\sin 30° =$

(3) $\tan 30° =$

問 2 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

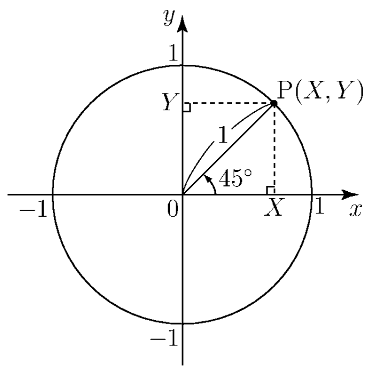


(1) $\cos 60° =$

(2) $\sin 60° =$

(3) $\tan 60° =$

問 3 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

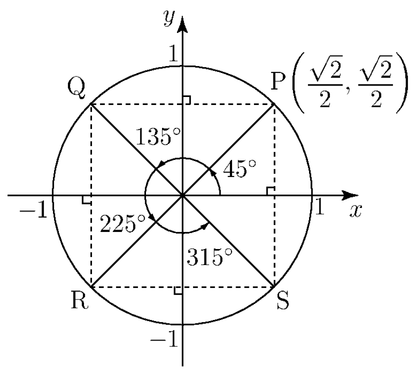


(1) $\cos 45° =$

(2) $\sin 45° =$

(3) $\tan 45° =$

問 4 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



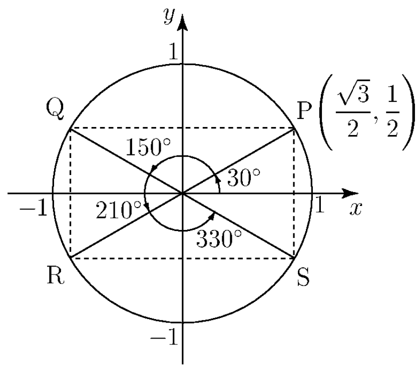
(1) $\cos 135° =$ $\quad$, $\sin 135° =$ $\quad$, $\tan 135° =$

(2) $\cos 225° =$ $\quad$, $\sin 225° =$ $\quad$, $\tan 225° =$

(3) $\cos 315° =$ $\quad$, $\sin 315° =$ $\quad$, $\tan 315° =$

＜三角関数の値２＞

問 1　右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。

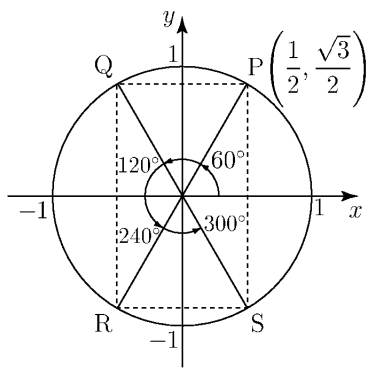


(1) $\cos 150^\circ =$ 　　　, $\sin 150^\circ =$ 　　　, $\tan 150^\circ =$

(2) $\cos 210^\circ =$ 　　　, $\sin 210^\circ =$ 　　　, $\tan 210^\circ =$

(3) $\cos 330^\circ =$ 　　　, $\sin 330^\circ =$ 　　　, $\tan 330^\circ =$

問 2　右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



(1) $\cos 120^\circ =$ 　　　, $\sin 120^\circ =$ 　　　, $\tan 120^\circ =$

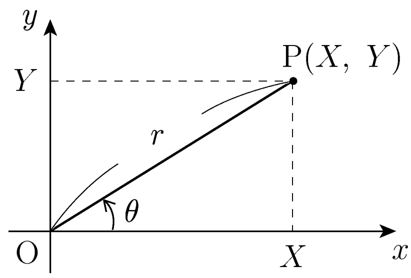
(2) $\cos 240^\circ =$ 　　　, $\sin 240^\circ =$ 　　　, $\tan 240^\circ =$

(3) $\cos 300^\circ =$ 　　　, $\sin 300^\circ =$ 　　　, $\tan 300^\circ =$

問 3　次の表を完成せよ。

角度 θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0				1					$-\frac{1}{2}$							
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$										0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan\theta$								$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			1						0

＜極座標表示＞



(図1)

座標平面上の点 P$(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

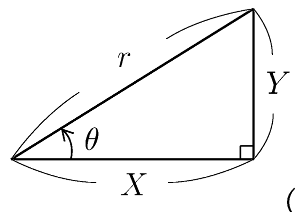
$$\frac{X}{r}=\cos\theta\ ,\ \frac{Y}{r}=\sin\theta$$

だから

$$X=r\cos\theta\ ,\ Y=r\sin\theta$$

より

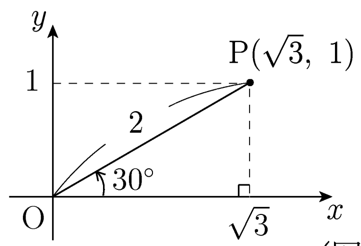
$$\boxed{(X,\ Y)=(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}\quad \text{(極座標表示)}$$



(図2)

と表される。$(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ を点 P$(X,\ Y)$ の**極座標表示**という。

(注) $r=\sqrt{X^2+Y^2}$ は原点からの距離である。



(図3)

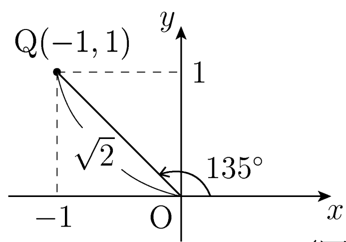
例 (1) 点 P$(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1)=(2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ)$$

となる。

(2) 点 Q$(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1)=(\sqrt{2}\cos 135^\circ\ ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)$$



(図4)

＜検算＞ 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $(2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ)=\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\times\frac{1}{2}\right)=(\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)=\left(\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\frac{2}{2},\ \frac{2}{2}\right)=(-1,\ 1)$

問 次の座標を極座標表示になおし、検算を実行せよ。

(1) $(1,\ \sqrt{3})=$

検算

(2) $(-2,\ 2)$

検算

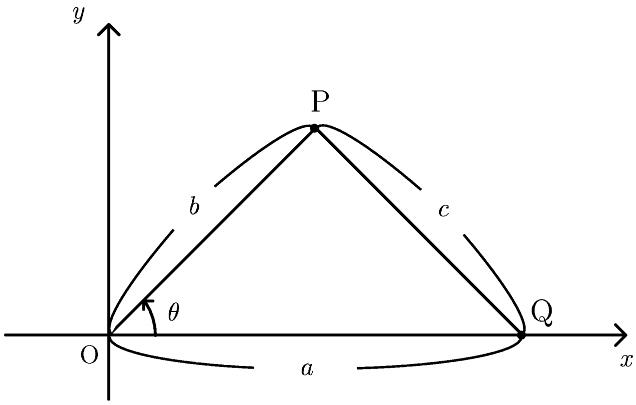
(3) $(-3,\ -\sqrt{3})=$

検算

(4) $(3,\ -3)$

検算

＜余弦定理１＞



問 (1) 右図の点 P と Q の座標を

a と b および角度 θ で表せ。

P(　　　,　　　)

Q(　　　,　　　)

P は極座標表示を使う。

(2) 平面上の２点間の距離の公式（13 ページ）を使って、

PQ^2 を a と b と θ を用いて表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いることによって PQ^2 を簡単にせよ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) の結果を用いて、c^2 を a と b と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

$c^2 =$

< 余弦定理２ >

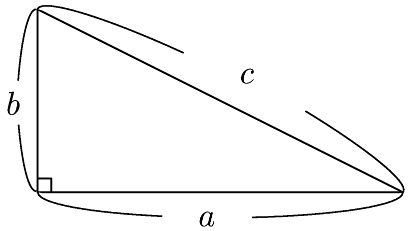
図１のように直角三角形の場合はピタゴラスの定理より

$c^2 = a^2 + b^2$

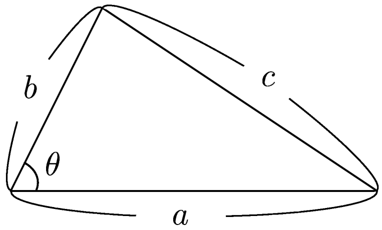
によって斜辺の長さ c を

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

として求まるが、図２のように θ が 90° 以外の場合はそうはならない。



（図１）



（図２）

問１ 前ページの結果を用いて、図２の c^2 を a と b と θ で表せ。

$c^2 =$

（注）この式を**余弦定理**という

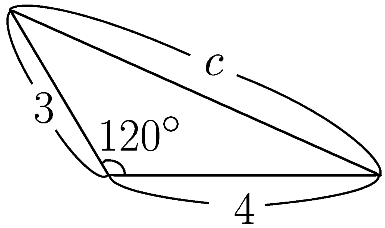
例 右図の場合に

$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120°$

が成り立つ。ここで $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ より

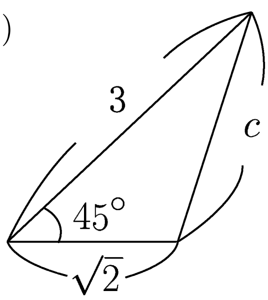
$$c^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 12 = 37$$

であるから $c = \sqrt{37}$。

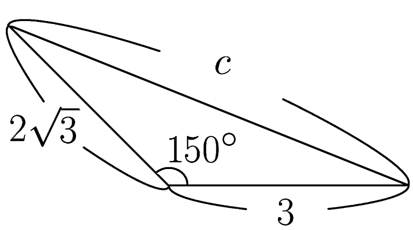


問２ 三角形が以下の場合に c を求めよ。

(1)

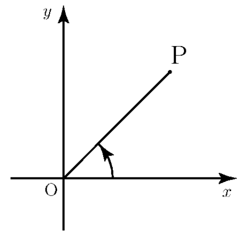


(2)

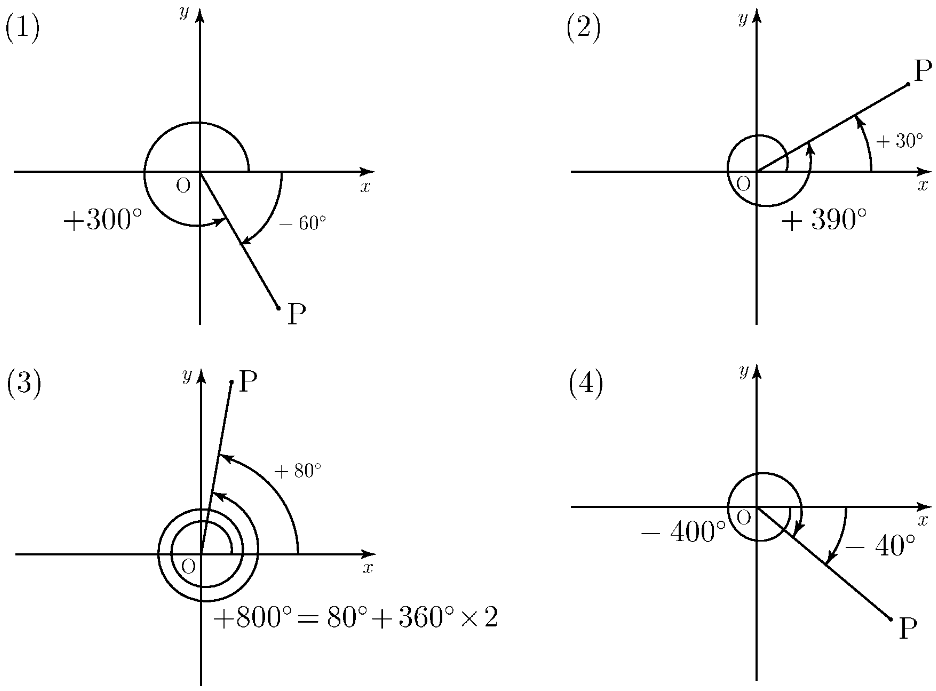


< 一般角 >

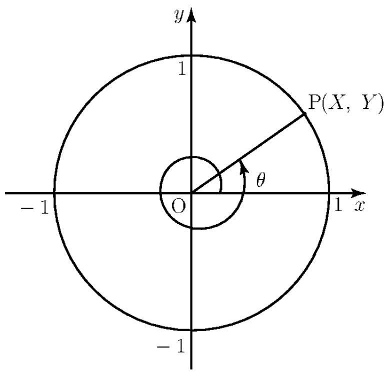
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を**始線**といい、OP を**動径**という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



例 1



< 一般角の三角関数 >



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき、一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に、点 P の座標 (X, Y) で

$$\cos\theta = X, \qquad \sin\theta = Y, \qquad \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

(注) $X = 0$ のとき $\tan\theta$ の値は定義されない。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 460^\circ$ 　(2) $\cos(-70^\circ)$ 　(3) $\tan 500^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ)$ 　(5) $\cos 650^\circ$ 　(3) $\tan 860^\circ$

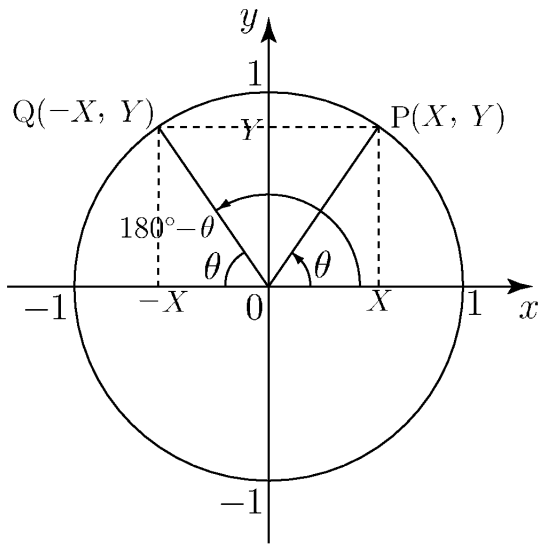
＜三角関数の性質１＞

例　$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ のとき、点 $\mathrm{P}(X, Y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-X, Y)$ は角 $180^\circ - \theta$ を表す点である。従って

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -X \\ \sin(180^\circ - \theta) &= Y \\ \tan(180^\circ - \theta) &= \frac{Y}{-X} \end{aligned}$$

となる。これを $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ で表すと

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos\theta \\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin\theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan\theta \end{aligned}$$

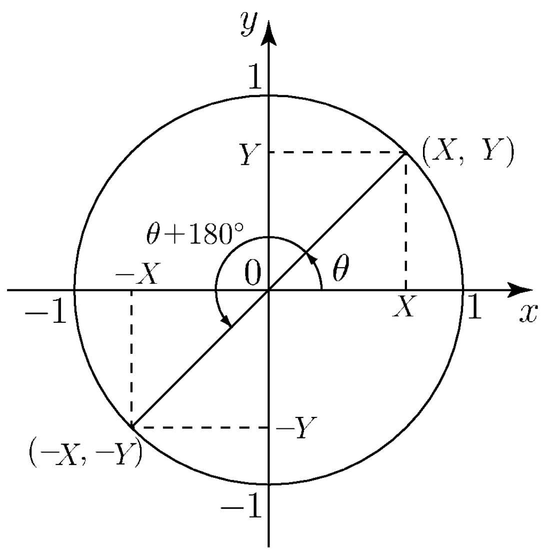


問１　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 180^\circ)\ =$

(2) $\cos(\theta + 180^\circ)\ =$

(3) $\tan(\theta + 180^\circ)\ =$

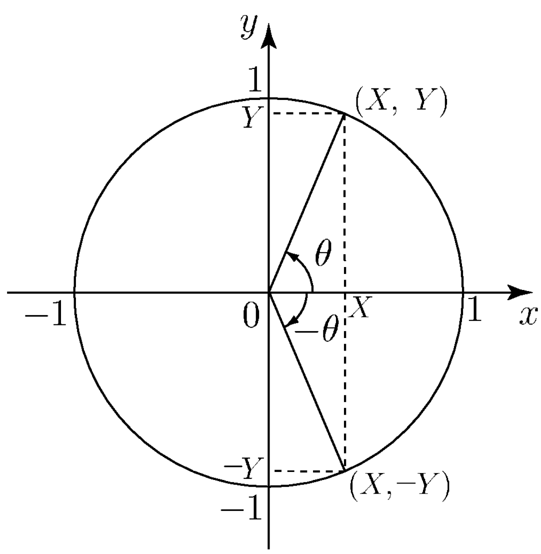


問２　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(-\theta) =$

(2) $\cos(-\theta) =$

(3) $\tan(-\theta) =$

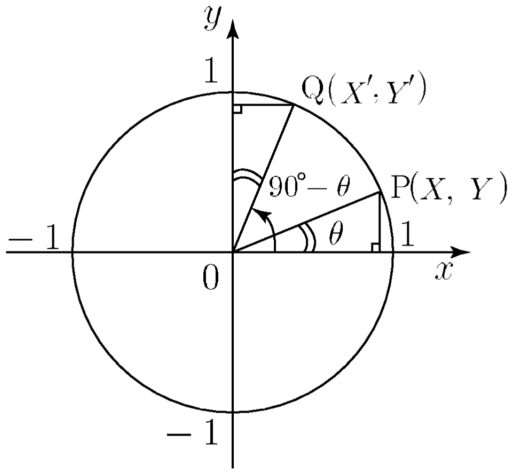


＜ 三角関数の性質 2 ＞

問 1　右図のように角度 θ を表す点を P $(X,\ Y)$, 角度 $90^\circ - \theta$ を表す点を
Q $(X',\ Y')$ とすると

$$X' = Y \quad , \quad Y' = X$$

の関係がある。これを参考にして次の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。



(1)　$\sin(90^\circ - \theta) =$　　　　(2)　$\cos(90^\circ - \theta) =$

例　$\sin 20^\circ =\ 0.342,\quad \cos 20^\circ =\ 0.9397,\quad \tan 20^\circ =\ 0.364$　である。
これは三角比の表で調べるわけだが，この表には 0° から 90° までしか書いていない。前ページの例を参考にすると

$$\sin(160^\circ) = \quad \sin(180^\circ - 20^\circ) = \qquad \sin 20^\circ = \ 0.342$$
$$\cos(160^\circ) = \quad \cos(180^\circ - 20^\circ) = \quad -\cos 20^\circ = \ -0.9397$$
$$\tan(160^\circ) = \quad \tan(180^\circ - 20^\circ) = \quad -\tan 20^\circ = \ -0.364$$

がわかる。

問 2　上の例と前のページの問等を参考にして、次の値を求めよ。

(1)　$\sin 200^\circ =$　　　　$\cos 200^\circ =$　　　　$\tan 200^\circ =$

(2)　$\sin(-20^\circ) =$　　　　$\cos(-20^\circ) =$　　　　$\tan(-20^\circ) =$

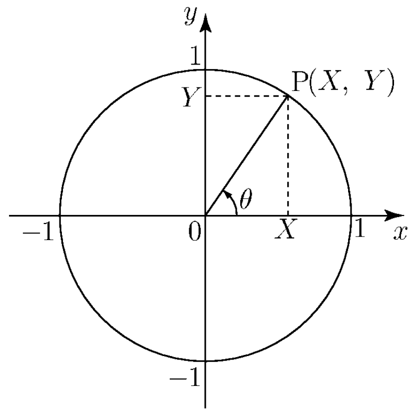
(3)　$\sin 70^\circ =$　　　　$\cos 70^\circ =$

＜三角関数の性質３＞

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とすると、三角関数の定義から

$$\sin\theta = Y\ ,\quad \cos\theta = X\ ,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。ここで点 P は原点を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の点だから



$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

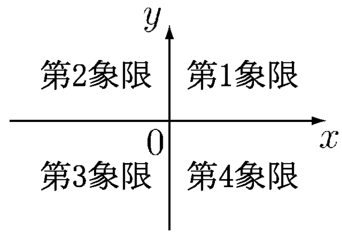
が成り立つ。

注) 記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta) \times (\cos\theta)$ の意味であり、$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)\ ,\quad \sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$$

問 1 $\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2 三角関数の定義から、sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



θ	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ である。このとき

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ だから $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

よって $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

＜三角関数表＞

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1,0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

三角関数表は 0° から 90° までしかないが、25,26 ページの性質を用いると 27 ページ (例, 問 2) のようにその他の角度の場合も求められる。

例 $\cos 155^\circ = -\cos 25^\circ = -0.9063$, $\sin 190^\circ = -\sin 10^\circ = -0.1736$

$\tan 310^\circ = \tan(-50^\circ) = -\tan 50^\circ = -1.1918$, $\cos 400^\circ = \cos 40^\circ = 0.7660$

問 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 100^\circ$ (2) $\tan 220^\circ$ (3) $\cos 320^\circ$

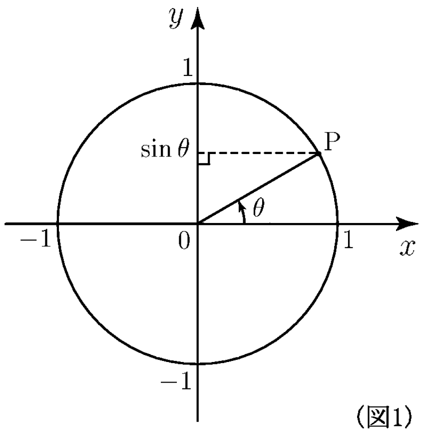
(4) $\sin(-40^\circ)$ (5) $\cos(-160^\circ)$ (6) $\tan 500^\circ$

＜三角方程式 1 ＞

25 ページで学んだように、単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると、

$$\boxed{\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

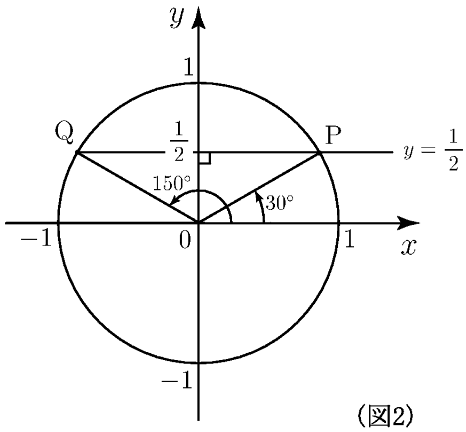
例題 1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き、y 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , Q とする。x 軸からの角度は 21 ページ (問 1) より図 2 のようになる。

<u>(答)　$\theta = 30^\circ$ または $\theta = 150^\circ$</u>



(図2)

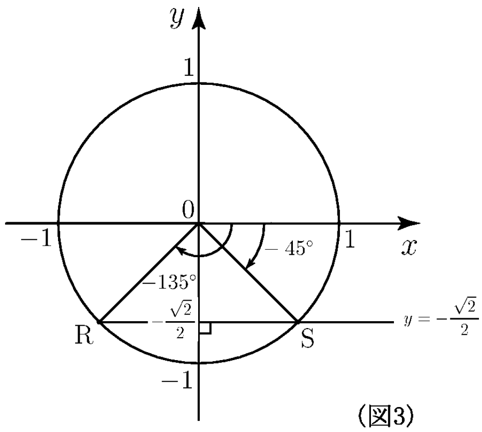
例題 2　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　例題 1 と同様に単位円に直線 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き、単位円との交点を R , S とすると 20 ページ (問 4) より図 3 のようになる。

<u>(答)　$\theta = -45^\circ$ または $\theta = -135^\circ$</u>



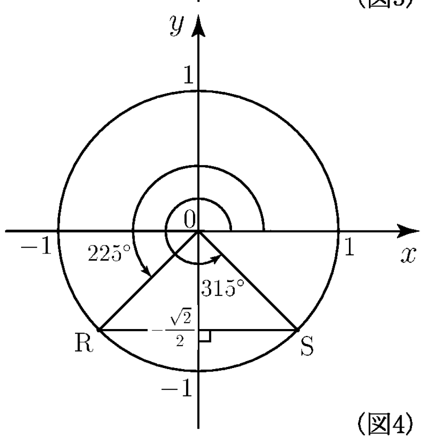
(図3)

例題 3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 より <u>(答)　$\theta = 225^\circ$ または $\theta = 315^\circ$</u>



(図4)

問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

(2)　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

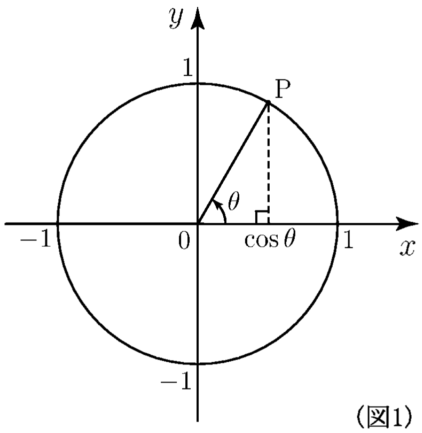
(3)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

＜三角方程式 2 ＞

25 ページで学んだように、単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると、

$$\boxed{\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

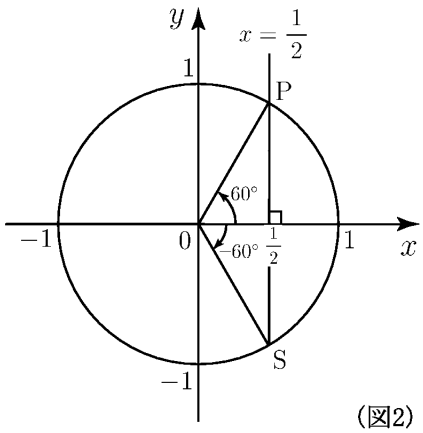
例題 1 $-180° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き、x 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , S とする。x 軸からの角度は 21 ページ (問 2) より図 2 のようになる。

(答) $\theta = 60°$ または $\theta = -60°$



(図2)

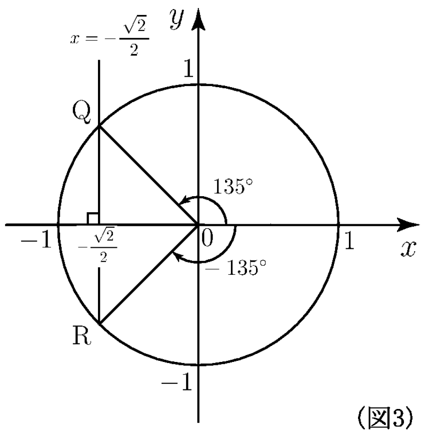
例題 2 $-180° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 単位円に直線 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き、単位円との交点を Q , R とすると 20 ページ (問 4) より図 3 のようになる。

(答) $\theta = 135°$ または $\theta = -135°$



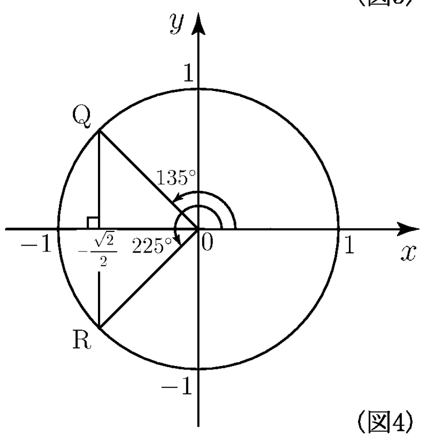
(図3)

例題 3 $0° \leqq \theta \leqq 360°$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解) 図 4 より (答) $\theta = 135°$ または $\theta = 225°$



(図4)

問 次式を満たす角度 θ を ( ) 内の範囲で求めよ。

(1) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(-180° \leqq \theta \leqq 180°)$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(-180° \leqq \theta \leqq 180°)$

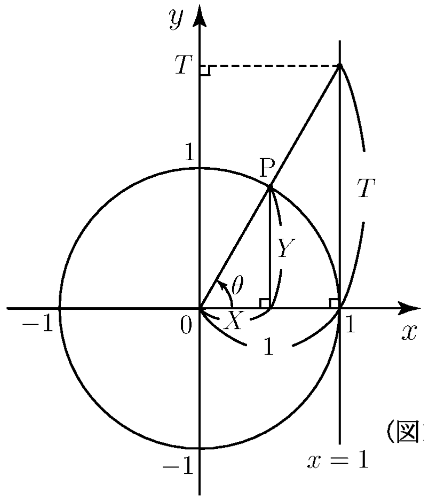
(3) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 360°)$

＜三角方程式 3＞

単位円と角 θ を表す動径との交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とすると

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。



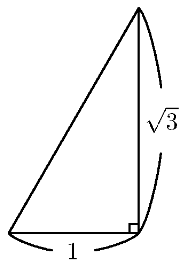
(図1)

問 1　図 1 の場合に

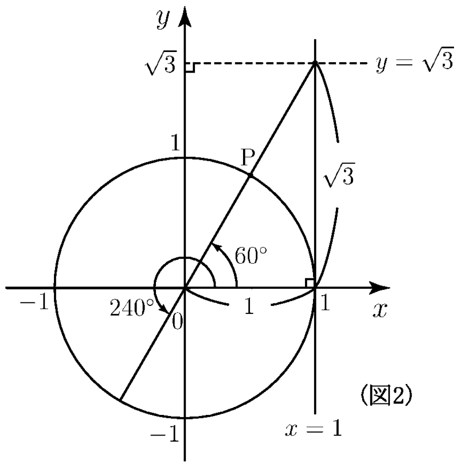
$$\boxed{\tan\theta = T}$$

であることを示せ。

(証明)



(図3)



(図2)

例題1　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

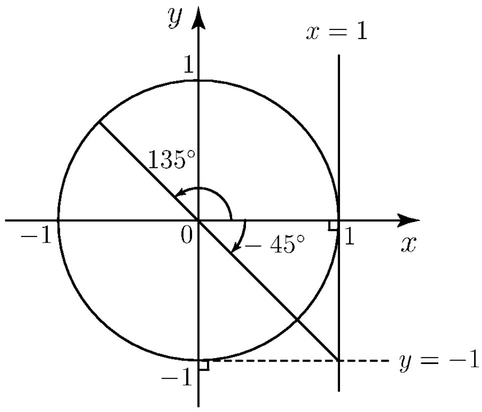
$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き、y 軸上に $\sqrt{3}$ をとる。$y = \sqrt{3}$ と $x = 1$ との交点から原点に直線を引くと図 3 の直角三角形ができる。この直角三角形は斜辺の長さが 2 になるので内角が 30°、60°、90° の直角三角形になる。図 2 より

(答) $\theta = 60^\circ$ または $\theta = 240^\circ$

(注)　26 ページ問 1 より $\tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$ であるから $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ である。



(図4)

例題2　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

$$\tan\theta = -1$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 のように直線 $x = 1$ と $y = -1$ の交点から原点に直線を引く。図 4 より

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = 135^\circ$

問 2　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で次式を満たす角度 θ を求めよ。

(1)　$\tan\theta = 1$　　，(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　，(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

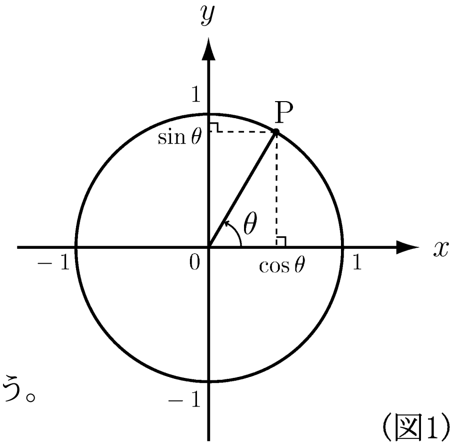
＜三角関数のグラフ 1＞

単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると

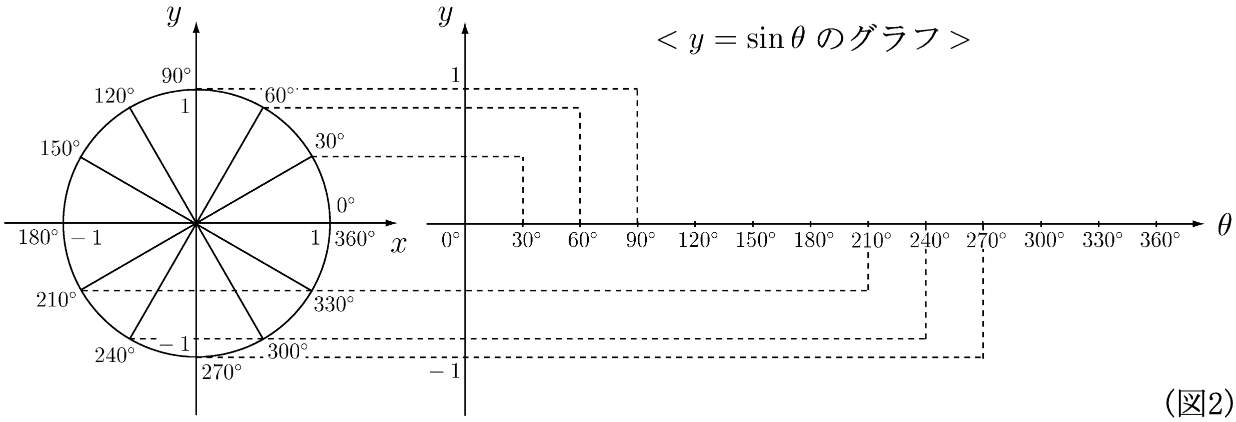
$$\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}$$

$$\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}$$

である。この性質を用いて $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のグラフを描こう。

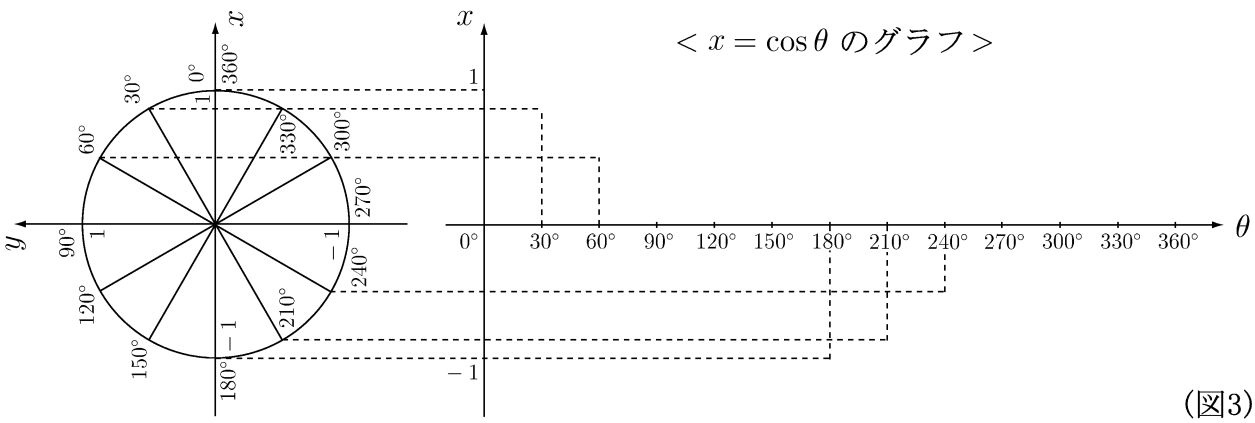


(図1)



(図2)

問 1 図 2 に 30°，60°，90°，210°，240°，270° のときの $y = \sin\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $y = \sin\theta$ の通る点を点線で作図し、0° から 360° までの範囲で $y = \sin\theta$ のグラフを (図 2 に) 実線で描け。



(図3)

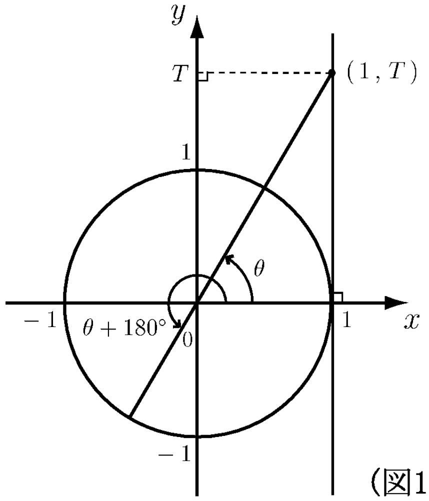
問 2 図 3 に 0°，30°，60°，180°，210°，240° のときの $x = \cos\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $x = \cos\theta$ の通る点を点線で作図し、0° から 360° までの範囲で $x = \cos\theta$ のグラフを (図 3 に) 実線で描け。

＜三角関数のグラフ 2＞

図 1 のように角 θ を表す動径と直線 $x=1$ との交点の座標を $(1\ ,\ T)$ とすると、32 ページより

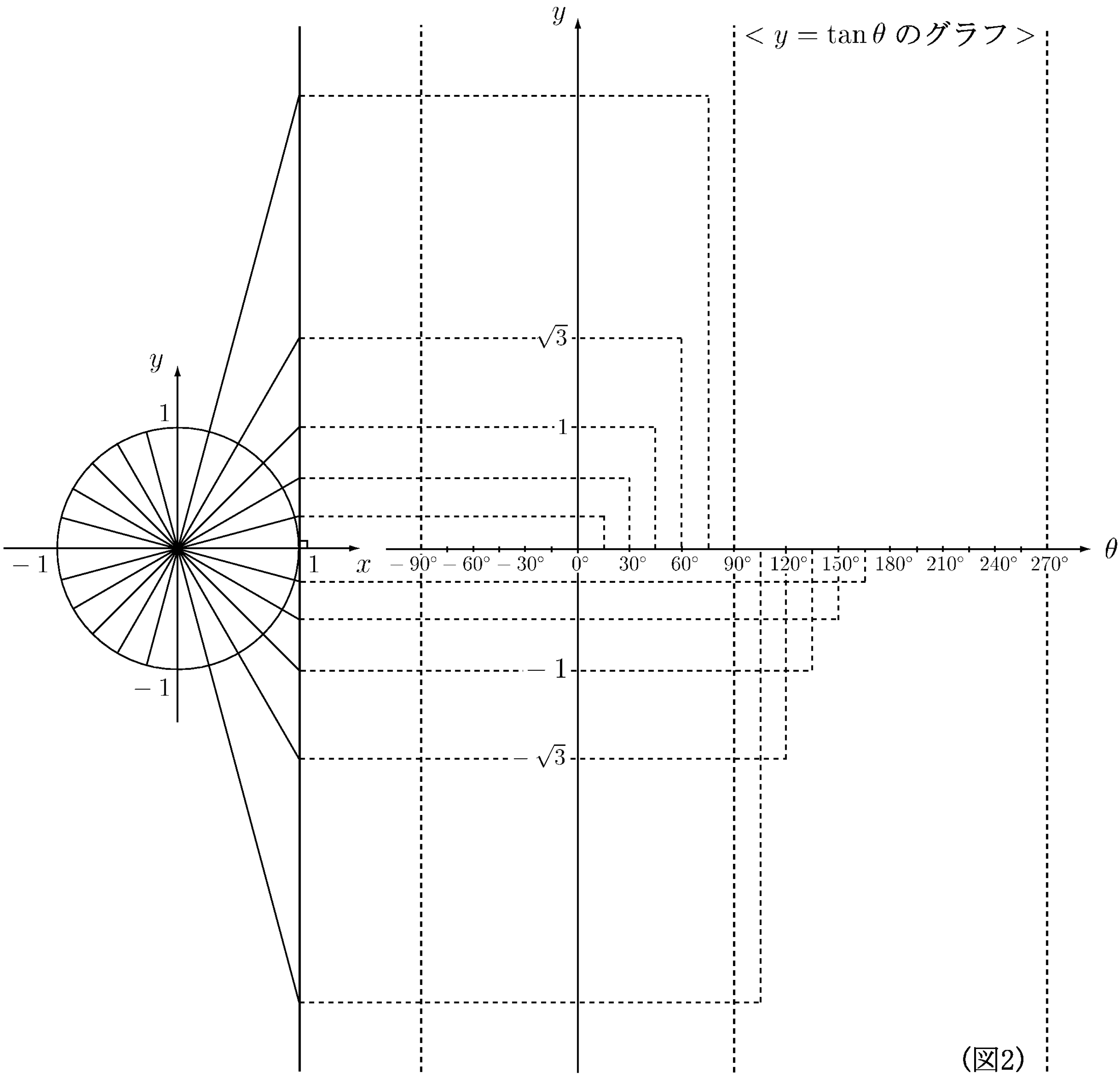
$$\boxed{T=\tan\theta=\tan(\theta+180^\circ)}$$

となる。この性質を用いて $y=\tan\theta$ のグラフを描こう。



(図1)

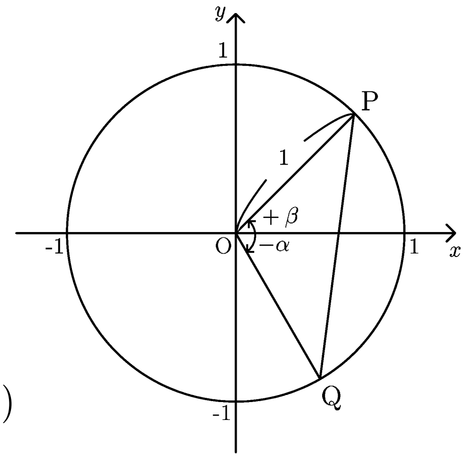
問 図 2 は 15° おきに角度を目もり、その一部について $y=\tan\theta$ の通る点を点線で作図してある。他の角度についても点線で作図し、-90° から 270° の範囲で $y=\tan\theta$ のグラフを実線で描け。



(図2)

(注) $\theta=\pm 90^\circ$, $\theta=270^\circ$ のときは $\tan\theta$ の値は定義されない。

＜加法定理１＞



問

(1) 右図において点 P の座標を極座標表示せよ。

P(　　　,　　　)

(2) 右図において点 Q の座標を極座標表示すると $Q\big(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\big)$

となるが、26 ページ問 2 の性質を用いて、Q の座標を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ で表せ。

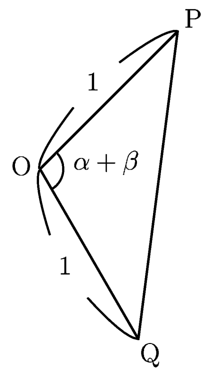
Q(　　　,　　　)

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式 (13 ページ) を使って、PQ^2 を α と β で表せ。

$PQ^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$PQ^2 =$



(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理を使って、PQ^2 を $\alpha+\beta$ で表せ。

$PQ^2 =$

(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha+\beta)$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

< 加法定理 2 >

前ページの結果より

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が成立することが分かった。これをコサインの**加法定理**という。

例 75° は 45° と 30° の和であるから、

(1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ$ は $\cos^2(75^\circ)+\sin^2(75^\circ)=1$ から計算してもできないことはないが 2 重根号 $\left(\sqrt{}\right.$ の中に $\sqrt{}$ がある$\left.\right)$ がでてくる。それをさけるために 26 ページ、27 ページで導いた三角関数の性質

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を使って、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned}
\sin 75^\circ &= \cos(90^\circ-75^\circ)=\cos\big((90^\circ-45^\circ)+(-30^\circ)\big)\\
&= \cos(90^\circ-45^\circ)\cos(-30^\circ)-\sin(90^\circ-45^\circ)\sin(-30^\circ)\\
&= \sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ(-\sin 30^\circ)\\
&= \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問 105° は 60° と 45° の和であることを利用して、次の値を求めよ。

$\cos 105^\circ =$

$\sin 105^\circ =$

＜加法定理３＞

問１ 前ページの例の (2) を参考にして、$\sin(\alpha+\beta)$ を
$\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

$\sin(\alpha+\beta) =$

注） この式をサインの加法定理という。

問２ $165° = 105° + 60°$ と考えて、前ページの問の結果を使って次の値を求めよ。

(1) $\cos 165° =$

(2) $\sin 165° =$

例 $15°$ は $45°$ から $30°$ を引いた角度である。三角関数の性質

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

とサイン、コサインの加法定理を使うと、次のように求まる。

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(45° - 30°) = \cos\bigl(45° + (-30°)\bigr)\\ &= \cos 45° \cos(-30°) - \sin 45° \sin(-30°)\\ &= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin(45° - 30°) = \sin\bigl(45° + (-30°)\bigr)\\ &= \sin 45° \cos(-30°) + \cos 45° \sin(-30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

問３ 例を参考にして、次式を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

(1) $\cos(\alpha-\beta) =$

(2) $\sin(\alpha-\beta) =$

＜加法定理４＞

例 36 ページの例より $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで分母の有理化をするために分母と分子に $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ をかけると

$$\tan 75^\circ = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

（別解） $\cos 75^\circ$ と $\sin 75^\circ$ の一方しかわかっていない場合は次のように考える。

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}}{\frac{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}{1 - \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

問１ $\tan 105^\circ$ を求めよ。

問２ 上の別解を参考にして $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha+\beta) =$

この式をタンジェントの加法定理という。

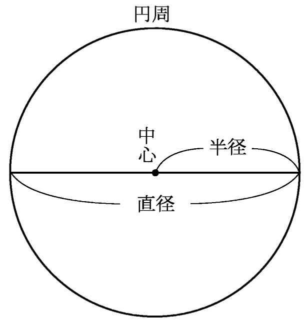
＜円周率＞

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから

$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}}=\frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率}=\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}}=\frac{\text{円周の長さ}}{2\times\text{半径の長さ}}$$



となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ∼ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ、現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (＝無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma$) の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率}\quad \pi=3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味、曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後、円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

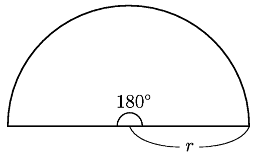
$$\pi=\frac{\ell}{2\times5}=\frac{\ell}{10}\qquad \text{より}\qquad \underline{(\text{答})\ \ \ell=10\pi\ (\text{cm})}$$

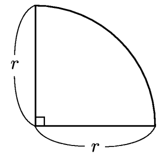
問 1　次の半径の円周を求めよ。

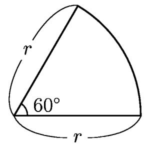
(1) 半径 2cm　　　　(2) 半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

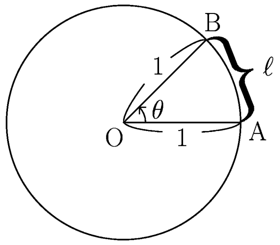
(1) 半径 r の半円の弧の長さ　　(2) 半径 r の $\frac{1}{4}$ 円の弧の長さ　　(3) 半径 r, 中心角 60° の弧の長さ







＜弧度法１＞



右図のように、角度θを、半径１の円の弧 AB の長さℓで表す方法を**弧度法**という。単位をラジアンで表し、

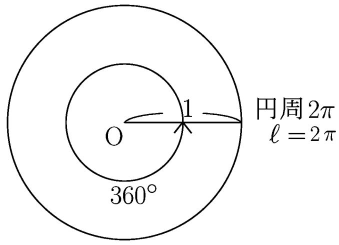
$\theta = \ell$（ラジアン）

と記す。

例 (1) $\theta = 360°$ のとき、半径１の円周の長さは2πだから

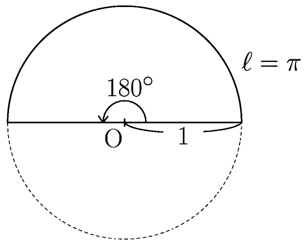
$360° = 2\pi$（ラジアン）

である。（πは円周率$\fallingdotseq 3.14$）



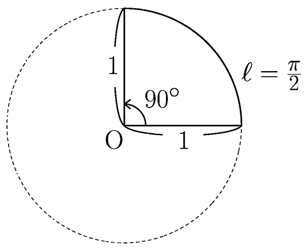
(2) $\theta = 180°$ のとき、半径１の半円の孤の長さはπだから

$180° = \pi$（ラジアン）



(3) $\theta = 90°$ のとき、半径１の円周の$\dfrac{1}{4}$の長さは$\dfrac{\pi}{2}$だから

$90° = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）



以上の例から、１（ラジアン）は弧の長さが１に対する角度θで、

$$1\text{（ラジアン）} = \frac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.3°$$

である。

（注） 360° , 180° , 90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π