高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

秋期入学者用

VI

内容

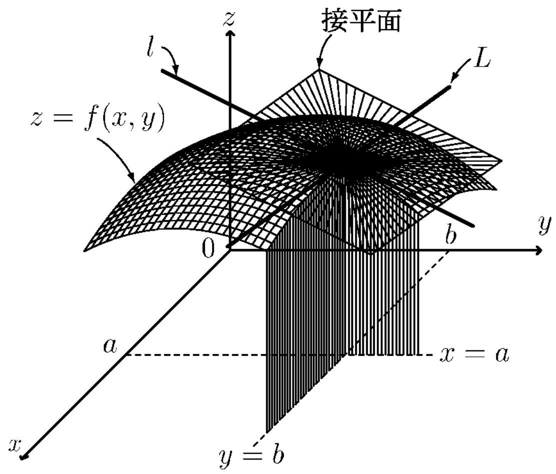
◎　2変数関数の一次近似

◎　ラプラシアン

◎　体積

◎　重積分

◎　広義積分

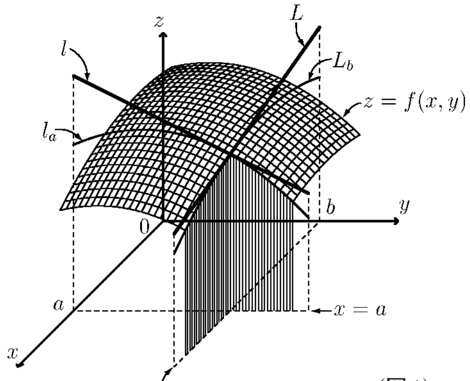


電子・光システム工学科

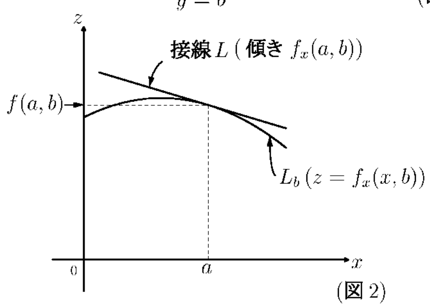
井上　昌昭　著

< 偏微分係数の幾何学的意味 >

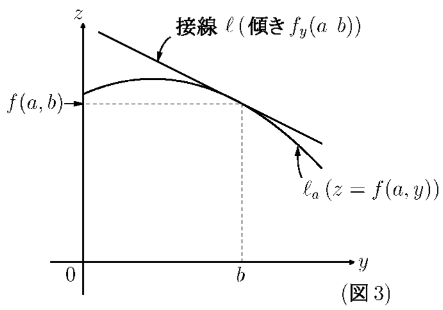
2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面と平面 $y = b$ との共通部分を曲線 L_b とする (図 1)。
曲線 L_b を xz 平面の方から見ると、図 2 のような曲面になる。このとき、この曲線 $z = f(x, b)$ の $x = a$ における接線 L の傾きが $f_x(a, b)$ である。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

$f_x(a, b) =$ 接線 L の傾き

接線 L の方程式
$y = b, \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$

つまり $f_z(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における $\boldsymbol{x}$ **軸方向の傾き** を意味する。

同様にして、この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 ℓ_a とする (図 1)。ℓ_a のグラフは図 3 のような曲線である。この曲線 $z = f(a, y)$ の $y = b$ における接線 ℓ の傾きが $f_y(a, b)$ である。

$f_y(a, b) =$ 接線 ℓ の傾き

接線 ℓ の方程式
$x = a, \quad z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$

つまり $f_y(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における $\boldsymbol{y}$ **軸方向の傾き** を意味する。

問　$f(x, y) = x^2 - 3x + xy - y^2 + 2y - 6$, $(a, b) = (3, 2)$ のとき、$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f(a, b)$, $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ を求め、接線 L と ℓ の方程式を求めよ。

$f_x(x, y) =$　　　　　　　　　　$f_y(x, y) =$

$f(3, 2) =$　　　　　　　　$f_x(3, 2) =$　　　　　　　　$f_y(3, 2) =$

接線 L の方程式
$y = 2$
$z =$

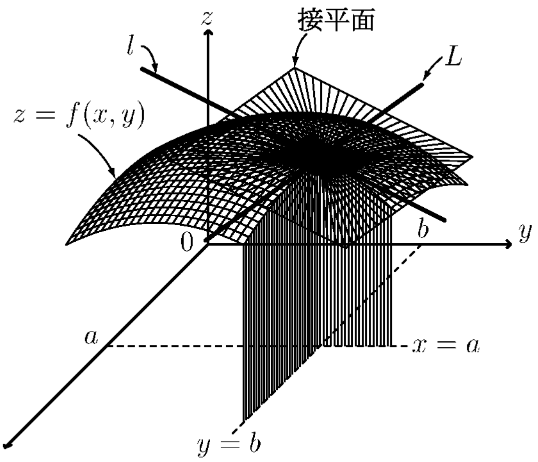
接線 ℓ の方程式
$x = 3$
$z =$

＜ 接平面 ＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面に接する平面を**接平面**という。
接点が $(a, b, f(a, b))$ であるとき、この接平面は x 軸方向の接線 L と y 軸方向の接線 ℓ を含む。それぞれの方程式は

$L:\ y = b,\quad z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$

$\ell\ :\ x = a,\quad z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$



である。今接平面の方程式を

$$z = mx + ny + k$$

とおくと、

(1)　　　x 軸方向の傾き $= m = f_x(a, b)$

(2)　　　y 軸方向の傾き $= n\ = f_y(a, b)$

であり、$(x, y) = (a, b)$ のとき $z = f(a, b)$ より

$$f(a, b) = ma + nb + k$$

であるから

(3)　　　z 切片 $= k = f(a, b) - ma - nb$

となる。(1), (2), (3) より接平面の方程式は

$$\boxed{z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)}$$ (接平面の方程式)

となる。

例題　$f(x, y) = x^2 - xy$ のとき $(x, y) = (3, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

(解)　$f_x(x, y) = 2x - y,\quad f_y(x, y) = -x$　より

$f_x(3, 1) = 5,\qquad f_y(3, 1) = -3,\qquad f(3, 1) = 6$

だから接平面の方程式は

$z = 5(x - 3) - 3(y - 1) + 6$　より　　<u>(答) $z = 5x - 3y - 6$</u>

問　$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ のとき、$(x, y) = (1, 2)$ における接平面の方程式を求めよ。

＜ 2 変数関数の一次近似 ＞

1 変数関数の一次近似式は曲線を接線で近似した。この考え方を 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合にも適応する。2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面の $(x, y) = (a, b)$ における接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

である。曲面 $z = f(x, y)$ は、$(x, y) = (a, b)$ の近くでは接平面によって近似できるから、

$$\boxed{(x, y) \fallingdotseq (a, b) \text{ のとき } \quad f(x, y) \fallingdotseq f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)} \qquad (*)$$

がなりたつ。この式を $f(x, y)$ の **一次近似式** という。

$$x - a = \Delta x \ , \ y - b = \Delta y$$

とおくと、この近似式は

$$\boxed{\begin{matrix} \Delta x \fallingdotseq 0 \\ \Delta y \fallingdotseq 0 \end{matrix} \ \text{ のとき } \quad f(a + \Delta x\ , b + \Delta y) \fallingdotseq f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + f(a, b)} \qquad (**)$$

となる。この式も一次近似式という。

例題　$f(x, y) = \sin x \log y$ のとき $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(解)　$f_x(x, y) = \cos x \log y \quad , \quad f_y(x, y) = \dfrac{\sin x}{y}$　より $(**)$ 式は

(答)　$\sin(a + \Delta x)\log(b + \Delta y) \fallingdotseq (\cos a \log b)\Delta x + \left(\dfrac{\sin a}{b}\right)\Delta y + \sin a \log b$

問　$f(x, y)$ が以下の場合に $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(1)　$f(x, y) = x^3 y^{-2}$　　,　$(a + \Delta x)^3 (b + \Delta y)^{-2} \fallingdotseq$

(2)　$f(x, y) = (\cos x)\sqrt{y}$　,　$\cos(a + \Delta x)\sqrt{b + \Delta y} \fallingdotseq$

(3)　$f(x, y) = \dfrac{x}{y}$　　,　$\dfrac{a + \Delta x}{b + \Delta y} \fallingdotseq$

＜ 2 変数合成関数の微分 1 ＞

2 変数関数 $z=f(x,y)$ に対し、x と y が t の関数

$$x=x(t) \quad , \quad y=y(t)$$

である場合は

$$z=f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$$

は t の関数である。そこで t に関する導関数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{f\bigl(x(t+\varDelta t),\ y(t+\varDelta t)\bigr)-f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)}{\varDelta t}$$

を求めたい。そこで

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \varDelta x=x(t+\varDelta t)-x(t),\ \varDelta y=y(t+\varDelta t)-y(t)$$

とおくと

$$x(t+\varDelta)=x+\varDelta x, \quad y(t+\varDelta t)=y+\varDelta y$$

となるから

$$\frac{f\bigl(x(t+\varDelta t),\ y(t+\varDelta t)\bigr)-f(x,y)}{\varDelta t}=\frac{f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)-f(x,y)}{\varDelta t}$$

となる。ここで前ページの一次近似式 $(**)$ で $(a,b)=(x,y)$ とおくと

$$\frac{f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)-f(x,y)}{\varDelta t}\fallingdotseq f_x(x,\ y)\frac{\varDelta x}{\varDelta t}+f_y(x,\ y)\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$$

で近似できる。よって

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)=\lim_{\varDelta t\to 0}\left\{f_x(x,\ y)\frac{\varDelta x}{\varDelta t}+f_y(x,\ y)\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right\}$$

が成り立つ。

問　$\varDelta t\to 0$ のとき $\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}=\dfrac{x(t+\varDelta t)-x(t)}{\varDelta t}\to\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}=\dfrac{y(t+\varDelta t)-y(t)}{\varDelta t}\to\dfrac{dy}{dt}$

を利用して，$\dfrac{d}{dt}f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ を $f_x(x,\ y),\ f_y(x,\ y),\ \dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}$ で表せ。

＜２変数合成関数の微分２＞

2 変数合成関数 $z = f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ の変数 t に関する導関数は前ページの結果より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f\bigl(x(t), y(t)\bigr) = f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

となる。ここで

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \ f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

より

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}}$$

が成り立つ。

例題　2 変数関数 $f(x,y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(1+2t,\ 4+3t)$　　　(2) $\dfrac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

(解)　(1) $x = 1+2t,\ y = 4+3t,\ z = f(x,y)$ とおくと

$$\frac{d}{dt}f(1+2t,\ 4+3t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$
$$= f_x(x,y)\times 2 + f_y(x,y)\times 3$$
$$= 2f_x(1+2t, 4+3t) + 3f_y(1+2t, 4+3t)$$

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = f(x,y)$ とおくと、θ に関する微分だから、r を定数とみて

$$\frac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{d\theta}$$
$$= f_x(x,y)\times(-r\sin\theta) + f_y(x,y)\times(r\cos\theta)$$
$$= -r\sin\theta f_x(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + r\cos\theta f_y(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

問　2 変数関数 $f(x,y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(1+2t,\ 3-t)$　　　(2) $\dfrac{d}{dr}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$=$　　　$=$

＜ 全微分 ＞

x と y の 2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し、x と y が t の関数のときは、前ページより

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

がなりたつ。ここで形式的に両辺に dt をかけると

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy} \quad \cdots\cdots (*)$$

となる。$(*)$ 式の右辺を、x と y の 2 変数関数 z の**全微分**という。Δz を z の増分というのに対し、dz を z の**微小増分**又は**無限小増分**という。

例 1　$z = x^2y^3$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$$

より z の全微分は

$$\underline{dz = 2xy^3\ dx\ +\ 3x^2y^2\ dy}$$

問 1　z が以下の場合に、z の全微分を求めよ。

(1) $z = (3x + 2y^2)^3$

$dz =$

(2) $z = x\sin(2y)$

$dz =$

x が変数 u と v の 2 変数関数 $x = x(u,v)$ である場合は $(*)$ と同様に

$$\boxed{dx = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv} \quad \cdots\cdots (**)$$

を、u と v の 2 変数関数 x の全微分という。

例 2　$x = u^5(2 + v^3)$ のとき

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 5u^4(2+v^3) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3u^5v^2$$

より x の全微分は

$$\underline{dx = 5u^4(2+v^3)\ du\ +\ 3u^5v^2\ dv}$$

問 2　x と y が以下の場合、変数 u と v に関する全微分を 求めよ。

(1) $x = u - v$

$dx =$

(2) $y = e^u + \log v$

$dy =$

＜ヤコビアン＞

x と y がともに変数 u と v の 2 変数関数

$$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

である場合、x と y の全微分は、前ページより

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \end{aligned}$$

となる。これを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

となる。(2) は u と v の微小増分の組 (du, dv) を x と y の微小増分の組 (dx, dy) に移す変換と考えられる。この変換行列を**ヤコビ行列** ($Jacob$ 行列) といい、その行列式を

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

で表し、関数 (1) の**関数行列式**または**ヤコビアン** ($Jacobian$) という。

例　u と v の関数 x, y が

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 4u + 5v \end{cases}$$

のときヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$$

問　x と y が以下の場合にヤコビアンを求めよ。

(1) $\begin{cases} x = u - v \\ y = 3u + 5v \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

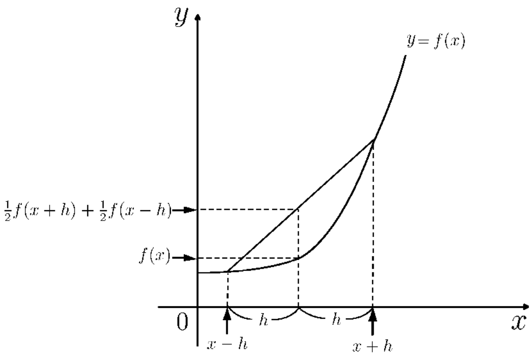
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

＜ラプラシアン１＞

１変数関数 $f(x)$ と正の定数 h に対し

$$\frac{2}{h^2}\left\{\frac{1}{2}f(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h)-f(x)\right\}$$

の値は $f(x)$ が凹ならばプラスであり、凸ならばマイナスである。$h \to 0$ の極限はロピタルの定理より



$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}\left\{\frac{1}{2}f(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h)-f(x)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(h^2)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\{f'(x+h)-f'(x-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(2h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=f''(x)$$

となる。よって２階導関数 $f''(x)$ がプラスならば $f(x)$ は凹であり、$f''(x)$ がマイナスならば $f(x)$ は凸である。

２変数関数 $f(x,y)$ に対しても同様な極限

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)+f(x-\Delta x,y)-2f(x,y)}{(\Delta x)^2}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)+f(x,y-\Delta y)-2f(x,y)}{(\Delta y)^2}\\&\quad=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)\end{aligned}}$$

が成立する。この極限の関数を　$f(x,y)$ の**ラプラシアン**といい

$$\boxed{\Delta f(x,y)=\ f_{xx}\ +\ f_{yy}\ =\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)\ +\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)}\qquad \text{(ラプラシアン)}$$

という記号で表す。

例　$f(x,y)=x^3+xy^2$ のとき

$$f_x=3x^2+y^2\ ,\ f_{xx}=6x\ ,\ f_y=2xy\ ,\ f_{yy}=2x$$

より $\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=6x+2x=8x$

問　２変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合にラプラシアン $\Delta f(x,y)$ を求めよ。

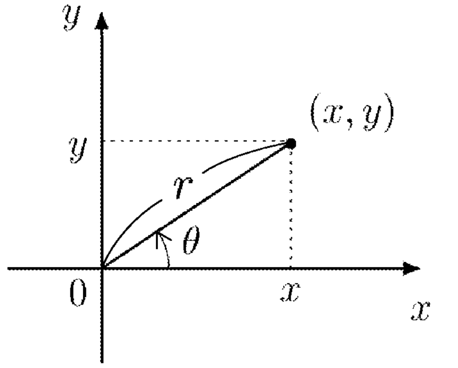
(1) $f(x,y)=3x^2y-2y^2$

　$\Delta f(x,y)=$

(2) $f(x,y)=\sin(2x-y)$

　$\Delta f(x,y)$

＜ラプラシアン２＞



座標平面上の点 (x, y) を極座標で表すと

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta}$$

となる。ここで

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

である。２変数関数 $z = f(x, y)$ を極座標で表すと

$$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

となる。５ページの結果より

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -(r\sin\theta)f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\cos\theta)f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (\cos\theta)f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) + (\sin\theta)f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -(r\cos\theta)f_x + (r^2\sin^2\theta)f_{xx} - (r^2\sin\theta\cos\theta)f_{xy} \\ &\quad -(r\sin\theta)f_y - (r^2\cos\theta\sin\theta)f_{yx} + (r^2\cos^2\theta)f_{yy} \\ &= r^2\Big((\sin^2\theta)f_{xx} - 2(\sin\theta\cos\theta)f_{xy} + (\cos^2\theta)f_{yy}\Big) - r\Big((\cos\theta)f_x + (\sin\theta)f_y\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= (\cos^2\theta)f_{xx} + (\cos\theta\sin\theta)f_{xy} + (\sin\theta\cos\theta)f_{yx} + (\sin^2\theta)f_{yy} \\ &= (\cos^2\theta)f_{xx} + 2(\sin\theta\cos\theta)f_{xy} + (\sin^2\theta)f_{yy}\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

となる。従って $z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ のラプラシアンは

$$\boxed{\Delta z\,(= f_{xx} + f_{yy}) = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}} \quad \text{（ラプラシアンの極座標表示）}$$

と表される。これを**ラプラシアンの極座標表示**という。

＜ラプラシアン３＞

２変数関数 $z=f(x,y)$ が $\sqrt{x^2+y^2}$ や $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
などの関数になっている場合は

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad (*)$$

とおくと

$$x=r\cos\theta\ ,\quad y=r\sin\theta$$

の極座標で表せるので, 前のページの公式

$$\boxed{\varDelta z\ =\ z_{rr}\ +\ \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}\ +\ \frac{1}{r}z_r}$$

を使う。

例１　$z=\log(x^2+y^2)$　のとき　$\sqrt{x^2+y^2}=r$ とおくと

$$z=\log(r^2)=2\log r$$

となる。　このとき

$$z_r=\frac{2}{r}\ ,\quad z_{rr}=-\frac{2}{r^2}\ ,\quad z_\theta=0\ ,\quad z_{\theta\theta}=0$$

より

$$\varDelta z=z_{rr}\ +\ \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}+\ \frac{1}{r}z_r=-\frac{2}{r^2}+0+\frac{1}{r}\times\left(\frac{2}{r}\right)=0$$

例２　$z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　のとき　$(*)$　の変換により

$$z=\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

となる。　このとき

$$z_r=0,\quad z_{rr}=0,\quad z_\theta=-4\sin\theta\cos\theta,\quad z_{\theta\theta}=-4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$$

より

$$\varDelta z=\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}(-4\cos^2\theta+4\sin^2\theta)=\frac{-4x^2+4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

問　２変数関数 z が以下の場合に、ラプラシアン $\varDelta z$ を求めよ。

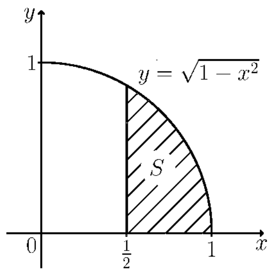
(1) $z=\sin\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)$　　　(2) $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

＜面積１＞

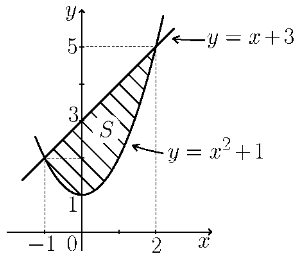
$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

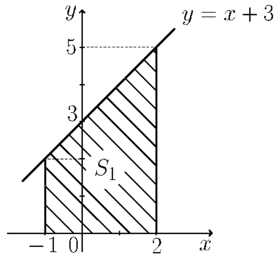
例１　半径 1 の円の一部分である右図のような斜線部分の面積 S は、ワークブック秋期 V 13 ページより

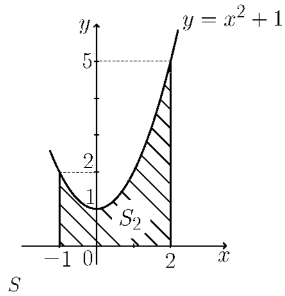
$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$



例２　直線 $y = x + 3$ と曲線 $y = x^2 + 1$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。
右図のような斜線部分の面積 S_1 , S_2 を考えると、以下のように計算できる。







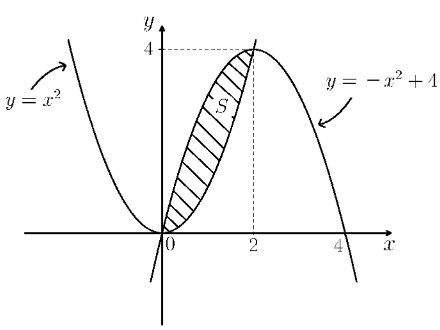
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx = \int_{-1}^{2}\left\{-x^2+x+2\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

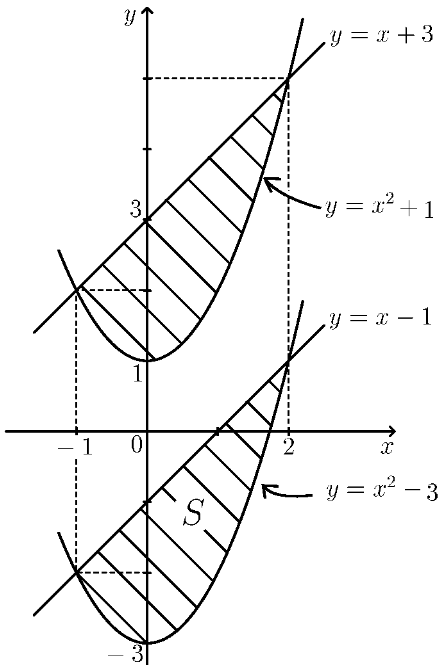
問　曲線 $y = -x^2 + 4x$ と $y = x^2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜ 面積２ ＞

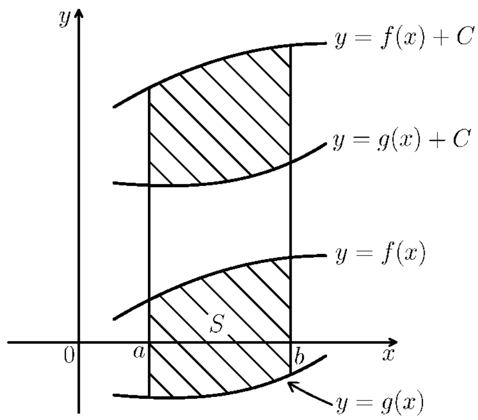
例　直線 $y=x-1$ と曲線 $y=x^2-3$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。
直線と曲線を共に y 軸方向に 4 だけ平行移動させると、
$y=x-1$ は $y=x+3$ に
$y=x^2-3$ は $y=x^2+1$ に移る。
S は $y=x+3$ と $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積と等しいから
前ページの例より

$$S=\int_{-1}^{2}\Big\{(x+3)-(x^2+1)\Big\}dx=\frac{9}{2}$$

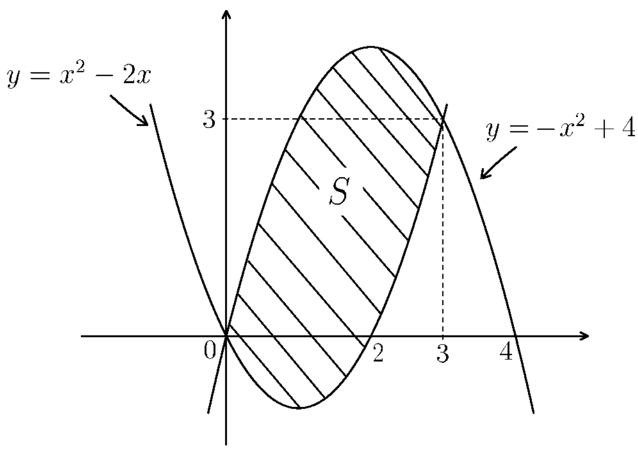


（注）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\Big\{(x-1)-(x^2-3)\Big\}dx$ としても求まる。

問１　右図のように曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と曲線 $x=a$, $x=b$ とで囲まれた部分の面積 S を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
（ただし $g(x)<f(x)$ とする）

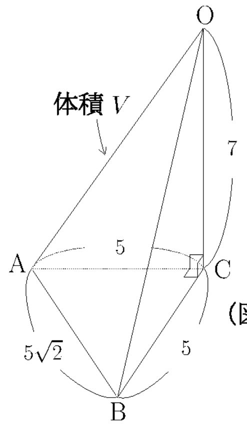


問２　曲線 $y=-x^2+4x$ と $y=x^2-2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜体積１＞

例 図１のような底面が（斜辺 $5\sqrt{2}$ の）直角二等辺三角形で高さが７の三角錐ＯＡＢＣの体積 V を求めたい。ＯＣを n 等分し、図２のような階段状の立体の体積 V_n で近似する。



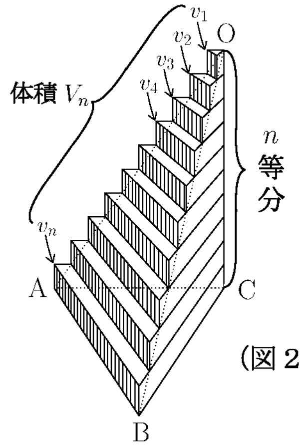
（図１）

この階段状の立体は厚さ $\dfrac{7}{n}$ の三角柱の集まりであり、その体積を上から順に

$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ \cdots\ ,\ v_n$$

とおくと、

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ \cdots\ + v_n$$



（図２）

となる。第 k 番目の三角柱の体積を v_k とする。図３のようにＯからの距離を x_k , 二等辺三角形の一辺の長さを y_k とおくと、

$$y_k = x_k \times \frac{5}{7} \quad , \quad x_k = \frac{7}{n} \times k$$

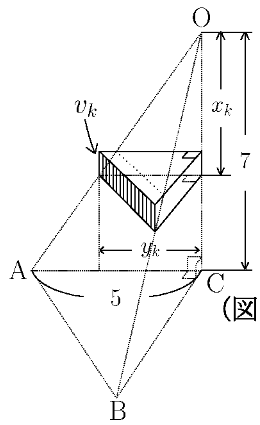
であるから、図４より

$$v_k = \frac{1}{2} \times y_k \times y_k \times \frac{7}{n} = \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times k^2$$

となる。よって

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 1^2 + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 2^2 + \cdots + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times n^2 \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \left\{1^2 + 2^2 + \ \cdots\ + n^2\right\} \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{5^2 \times 7}{12} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

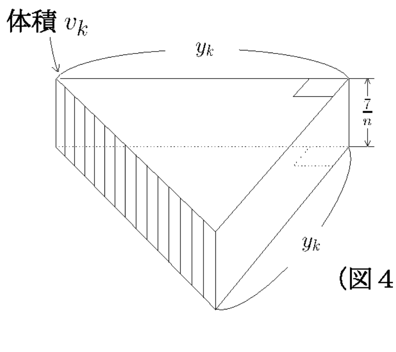
となる。



（図３）

問 $n \to \infty$ として三角錐の体積 V を求めよ。

$V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n =$



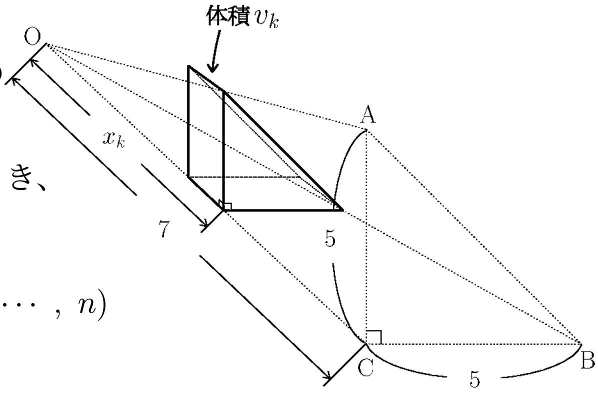
（図４）

＜ 体積２ ＞

例 前ページの三角錐の体積 V を以下のように求める。前ページの図３でＯＢＣを下にすると右の図１のようになる。ＯＣを n 等分したとき、小区間の幅を h とすると、

$$h = \frac{7}{n}\ ,\ x_k = kh \quad (k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n)$$

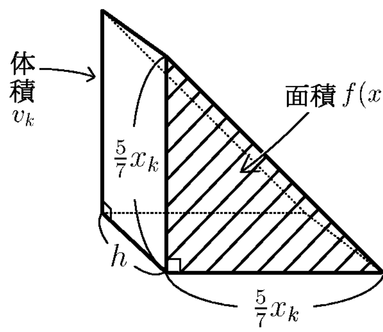
となる。そこで k 番目の三角柱の底面積を $f(x_k)$ とすると、図２より



（図１）

$$f(x_k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{7}x_k\right)^2 = \frac{25}{98}(x_k)^2$$

であり、小三角形の体積 v_k は



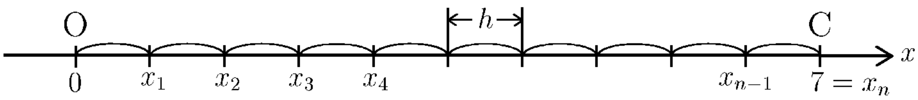
（図２）

$$v_k = f(x_k) \times h \qquad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n)$$

となる。従って前ページの図２の階段状の立体の体積 V_n は

$$\begin{aligned} V_n &= v_1 + v_2 + \ \cdots\ + v_n \\ &= \left\{f(x_1) + f(x_2) + \ \cdots\ + f(x_n)\right\}h \end{aligned}$$

である。ここで $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_n$ は区間 $[0 \leqq x \leqq 7]$ を n 等分した分点



である。h は小区間の幅であるから、$n \to \infty$ とした極限は、定積分の定義より

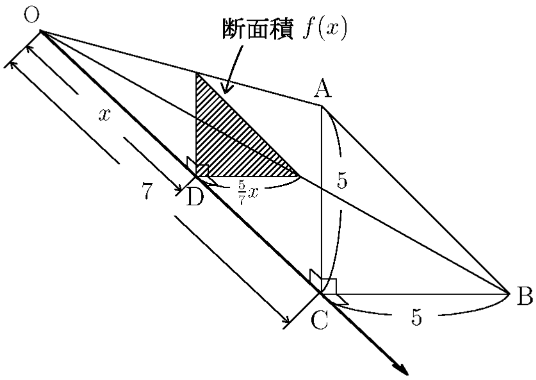
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \left\{f(x_1) + f(x_2) + \ \cdots\ + f(x_n)\right\}h = \int_0^7 f(x)dx$$

となる。

問 $f(x_k) = \dfrac{25}{98}(x_k)^2$ より $f(x) = \dfrac{25}{98}x^2$ である。次の定積分を計算することにより、V を求めよ。

$$V = \int_0^7 f(x)dx =$$

＜体積３＞



例１ 前ページの計算を簡単にまとめると以下のようになる。
三角錐の頂点 O からの距離が x である（OC 上の）点を D とする。

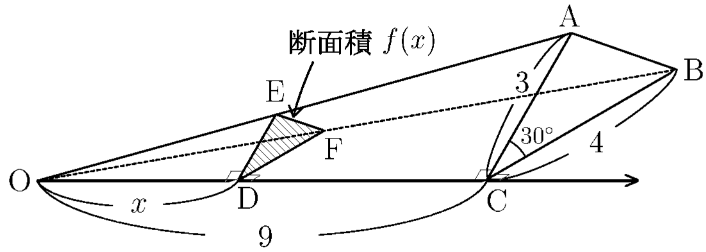
点 D を通り、直線 OC に垂直な平面で切った断面の面積を $f(x)$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{7}x\right)^2 = \frac{25}{98}x^2$$

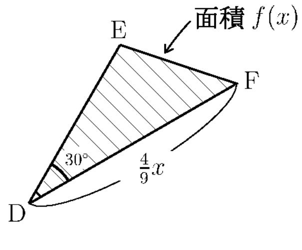
となる。三角錐 OABC の体積 V は断面積 $f(x)$ の $x = 0$ から $x = 7$ までの定積分

$$V = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx$$

で求まる。



例２ 底面が右図のような三角形 ABC で高さが 9 である三角錐 OABC の体積 V を求めたい。
O からの距離が x である（OC 上の）点を D とし、点 D を通り直線 OC に垂直な平面で切った断面積 DEF の面積を $f(x)$ とする。



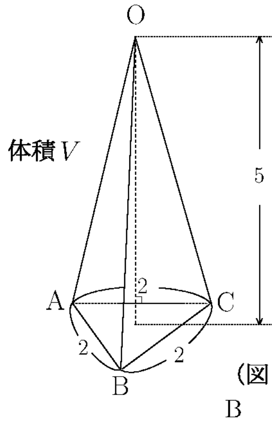
問 例 2 の場合に次の問に答えよ。

(1) 断面積 $f(x)$ を x で表せ。（ヒント　x : DE = 9 : 3）

(2) 次の定積分を計算することにより、体積 V を求めよ

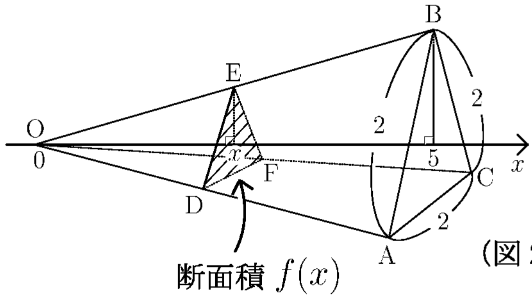
$$V = \int_0^9 f(x)dx =$$

＜体積４＞



（図１）

例 一辺の長さが２の正三角形が底面で、高さが５の三角錐 OABC の体積 V を求めたい。
図２のように三角錐を横にし、頂点 O から底面への垂線を x 軸とする。頂点からの距離が x である平面で切りとった断面 DEF の面積を $f(x)$ とおく。三角形 DEF は一辺が $\dfrac{2}{5}x$ の正三角形であるから、その面積 $f(x)$ は



（図２）

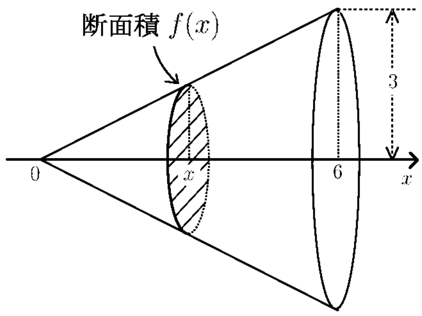
$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{25}x^2$$

となる。よって三角錐の体積 V は

$$V = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 \frac{\sqrt{3}}{25}x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{75}x^3\right]_0^5 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

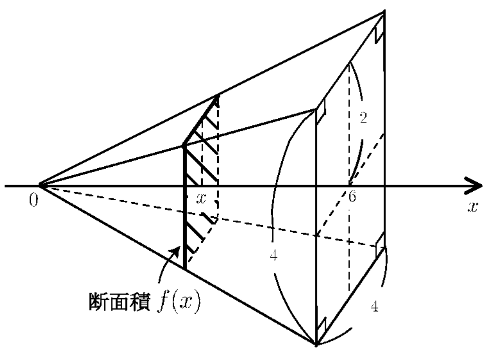
問１ 底面が半径３の円で、高さが６の円錐の体積 V を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 V を求めよ。

$f(x) =$　　　　　　　, $V =$



問２ 底面が一辺４の正方形で、高さが６の四角錐の体積 V を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 V を求めよ。

$f(x) =$　　　　　　　, $V =$

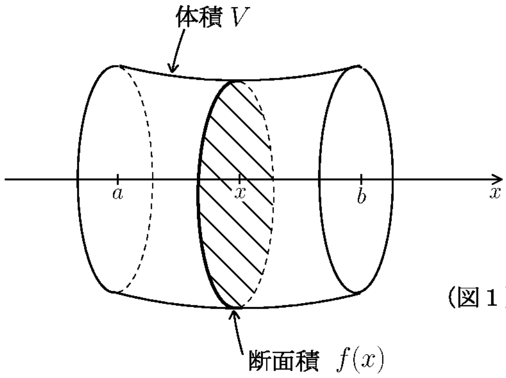


＜体積５＞

前ページの例からわかるように、ある立体が図１のように基準線（x 軸）に垂直な断面の集まりと見なされるとき、断面積 $f(x)$ がわかっていれば図１の立体の体積 V は

$$\boxed{V=\int_a^b f(x)dx}$$

で求められる。



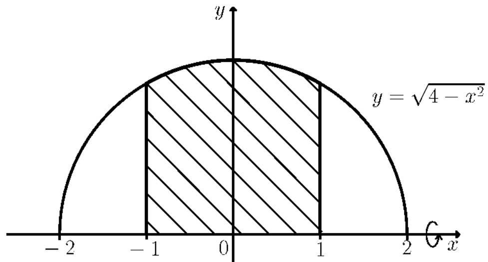
（図１）

例　図２の斜線部分を x 軸のまわりに一回転してできた立体図は図３のような立体である。図３の斜線部分の断面は半径 $\sqrt{4-x^2}$ の円であるから、その断面積 $f(x)$ は

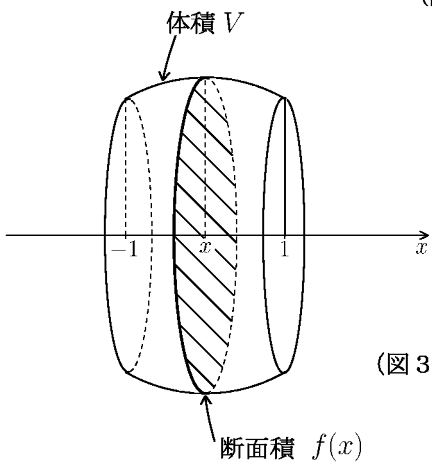
$f(x)=\pi(\sqrt{4-x^2})^2=\pi(4-x^2)$

となる。よって図３の立体の体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(4-x^2)dx=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{22}{3}\pi$$

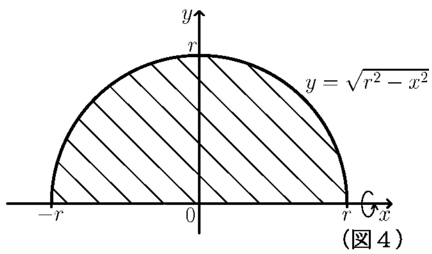


（図２）



（図３）

問　半径 r の球は図４の斜線部分を x 軸のまわりに一回転してできた立体と考えられる。例を参考にして半径 r の球の体積 V を求めよ。



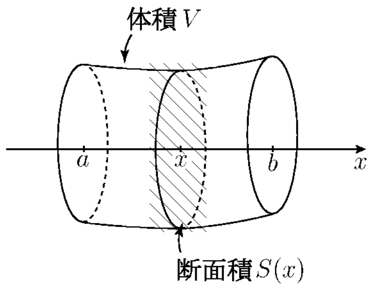
（図４）

＜ 体積６ ＞

ある立体が図１のように基準線 (x 軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき断面積 $S(x)$ がわかっていれば、図１の立体の体積 V は

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



(図 1)

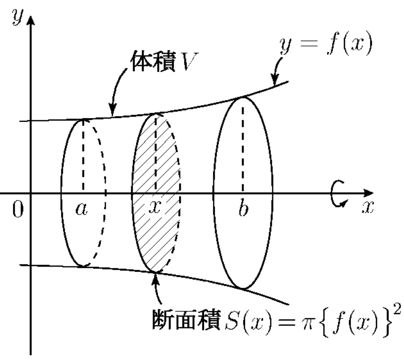
図２のように、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V は、断面が半径 $f(x)$ の円であるから

$$S(x) = \pi\{f(x)\}^2$$

より

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx}$$

となる。

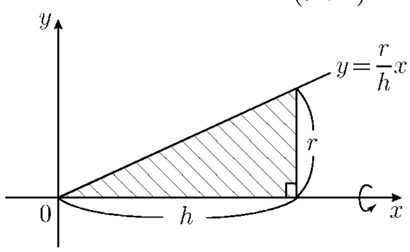


(図 2)

例　底面が半径 r の円で高さ h の円錐の体積 V を求めたい。この円錐は図３の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体であるから

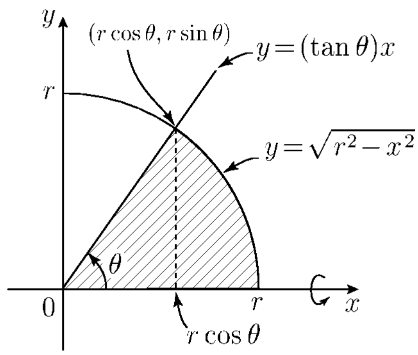
$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \;=\; \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{\pi r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{\pi}{3}r^2 h$$



(図 3)

問　図４の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体の体積 V を θ を用いて (出来るだけ簡単に) 表せ。(ヒント $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$)



(図 4)

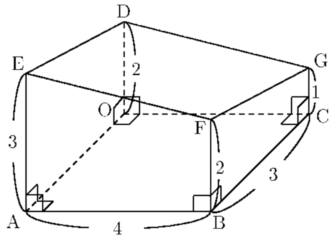
＜ 体積7 ＞

例　図1のの立体は底面が 4×3 の長方形 ABCO である四角柱を平面 DEFG で切り取った立体である。各辺の長さは

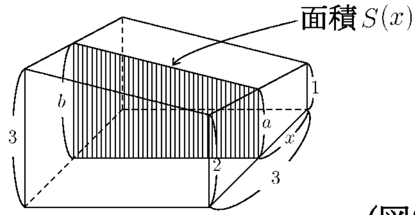
　$\mathrm{AB} = \mathrm{OC} = 4$，$\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = 3$

　$\mathrm{BF} = \mathrm{DO} = 2$，$\mathrm{AE} = 3$，$\mathrm{CG} = 1$

である。この立体の体積 V を求めたい。図2のように平面 CGDO からの距離が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とする。この断面は図3のような台形である



(図1)



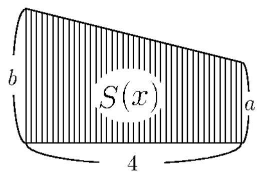
(図2)

問1　図4を参考にして a の長さを x で表せ。

$a =$

問2　図5を参考にして b の長さを x で表せ。

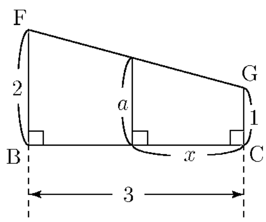
$b =$



(図3)

問3　図3の面積 $S(x)$ を求めよ。

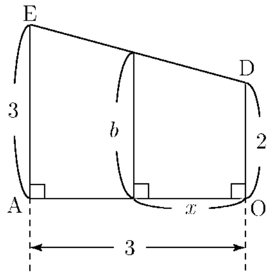
$S(x) =$



(図4)

問4　$S(x)$ を積分することによって図1の立体の体積 V を求めよ。

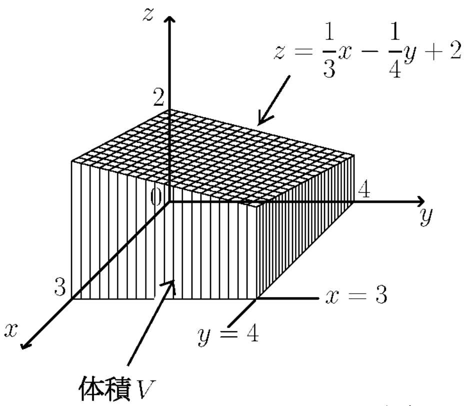
$$V = \int_0^3 S(x)dx$$



(図5)

＜ 体積8 ＞

例　平面 $z = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y + 2$ と xy 平面、 yz 平面、xz 平面及び平面 $x = 3$ と平面 $y = 4$ で囲まれた立体の体積 V を求めたい。



(図 1)

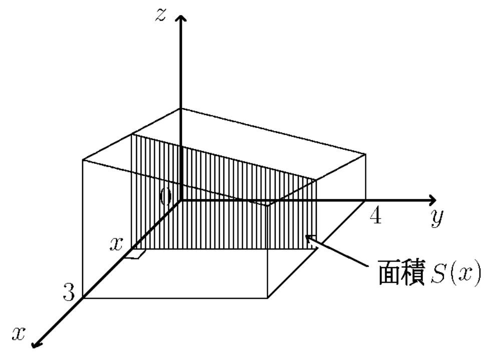
　図 2 のように、x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とすると、$S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積であるから、x を定数と考えて、y で積分すれば

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + 2\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 + 2y\right]_{y=0}^{y=4} \\ &= \frac{4}{3}x - \frac{4^2}{8} + 2 \times 4 - 0 = \frac{4}{3}x + 6 \end{aligned}$$

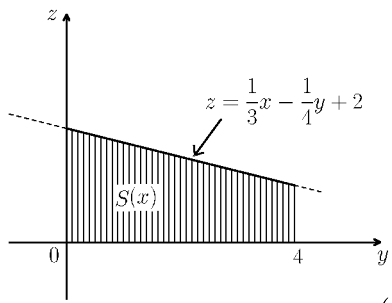
となる。よって体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(x)\ dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{4}{3}x + 6\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^2 + 6x\right]_0^3 = 24 \end{aligned}$$

(注) 図 1 の立体は前ページと同じ立体である。

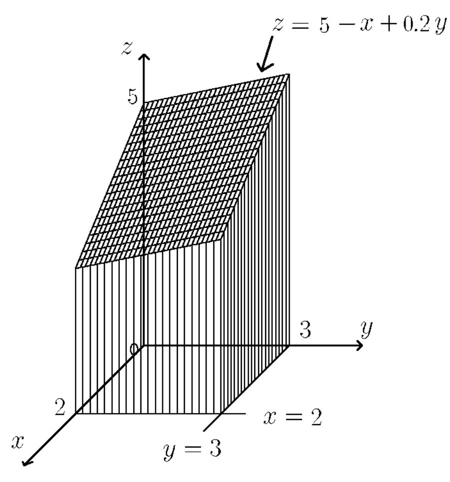


(図 2)



(図 3)

問　平面 $z = 5 - x + 0.2y$ と xy 平面、yz 平面、xz 平面及び平面 $x = 2$ と平面 $y = 3$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ。



＜体積 9 ＞

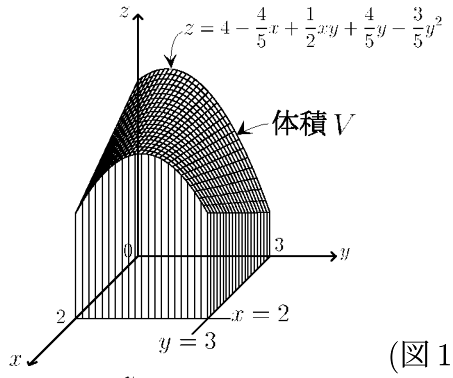
例　曲面 $z=4-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{2}xy+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{3}{5}y^2$ と xy 平面、yz 平面、xz 平面および平面 $x=2$ と平面 $y=3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めたい。

図２のように、x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とおくと、$S(x)$ は図３の斜線部分の面積であるから、x を定数と考えると、

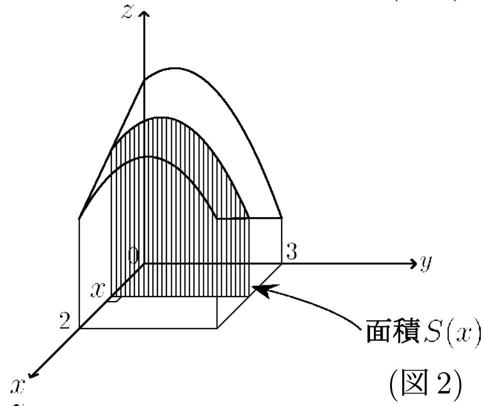
$$
\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^3 \left(4-\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}xy+\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}y^2\right)dy \\
&= \left[4y-\frac{4}{5}xy+\frac{1}{4}xy^2+\frac{2}{5}y^2-\frac{1}{5}y^3\right]_{y=0}^{y=3} \\
&= 12-\frac{12}{5}x+\frac{9}{4}x+\frac{18}{5}-\frac{27}{5}-0 \\
&= \frac{51}{5}-\frac{3}{20}x
\end{aligned}
$$

である。よって体積 V は

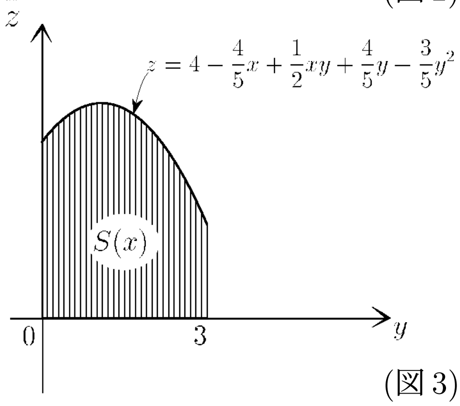
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 S(x)dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{51}{5}-\frac{3}{20}x\right)dx = \left[\frac{51}{5}x-\frac{3}{40}x^2\right]_0^2 = \frac{201}{10}
\end{aligned}
$$



(図 1)

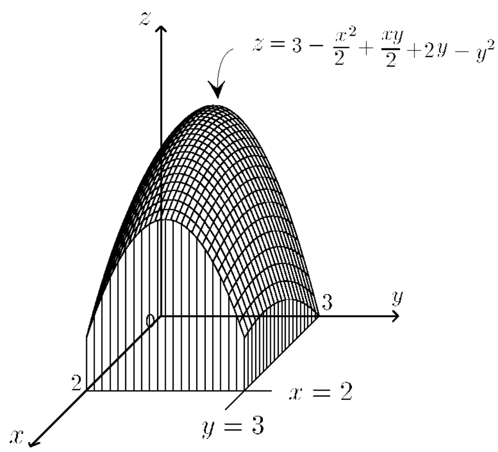


(図 2)



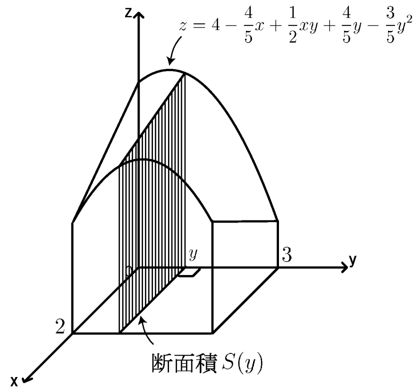
(図 3)

問　曲面 $z=3-\frac{x^2}{2}+\frac{xy}{2}+2y-y^2$ と xy 平面、yz 平面、xz 平面および平面 $x=2$ と平面 $y=3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めよ。

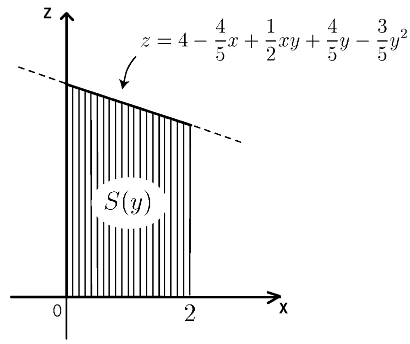


＜体積 10 ＞

例　立体の体積 V を求めるのに、前ページでは、x 軸に垂直な平面で切りとった断面積を x について積分して、V を求めた。
前ページと同じ立体の体積 V を求めるのに、今度は y 軸に垂直な平面で切りとった断面積を使う。



y 軸の座標が y である平面で切りとった断面の面積を $S(y)$ とすると、$S(y)$ は右図のような斜線部分の面積だから、y を定数と考えて、x で積分すれば、



$$S(y) = \int_0^2 \left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2\right) dx$$

$$= \left[4x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{4}{5}yx - \frac{3}{5}y^2x\right]_{x=0}^{x=2}$$

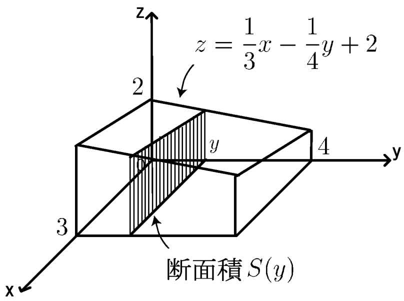
$$= 8 - \frac{8}{5} + y + \frac{8}{5}y - \frac{6}{5}y^2 - 0 = \frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2$$

となる。よって体積 V は

$$V = \int_0^3 S(y)dy = \int_0^3 \left(\frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{32}{5}y + \frac{13}{10}y^2 - \frac{2}{5}y^3\right]_0^3 = \frac{96}{5} + \frac{117}{10} - \frac{54}{5} - 0 = \frac{201}{10}$$

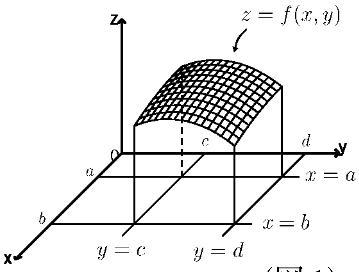
問　19 ページの例と同じ立体の体積 V を求めたい。y 軸に垂直な平面で切りとった断面の面積 $S(y)$ を求め、V を $S(y)$ を積分することによって求めよ。



$S(y) =$

$V =$

< 累次積分 1 >



(図 1)

2 変数関数 $f(x,y)$ が

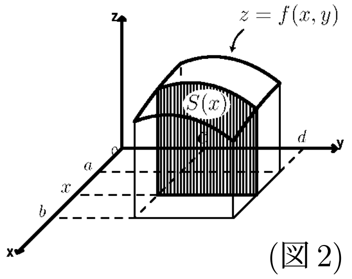
$$a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$$

の範囲で正 (プラス) であるとき、曲面 $z = f(x,y)$ と xy 平面、および平面 $x = a, x = b, y = c, y = d$ で囲まれた部分の体積を V とする。図 2 より

$$V = \int_a^b S(x)dx, \quad S(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

だから

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx$$



(図 2)

となる。この種の積分を **累次積分**(るいじ) または **逐次積分**(ちくじ) という。
この積分を計算するには、まず x を定数と思って y に関する定積分を計算して、x の関数 $S(x)$ が得られたら、この関数を x で積分すればよい。

例

$$\int_1^2 \left\{ \int_2^3 (4 - x + xy + y^2)dy \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[(4-x)y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \right\} dx$$

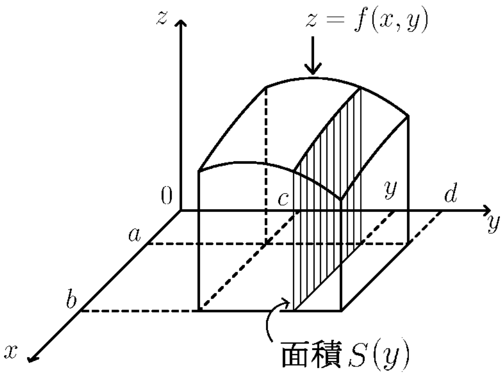
$$= \int_1^2 \left\{ \left((4-x) \times 3 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{3} \right) - \left((4-x) \times 2 + \frac{4}{2}x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \frac{31}{3} + \frac{3}{2}x \right\} dx = \left[\frac{31}{3}x + \frac{3}{4}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{151}{12}$$

問　次の累次積分を計算せよ。

$$\int_1^2 \left\{ \int_1^3 \left(x^2 - xy - 1 \right) dy \right\} dx$$

＜累次積分 2 ＞



$f(x,y)>0$ のとき、曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面及び平面 $x=a$、$x=b$、$y=c$、$y=d$ で囲まれた部分の体積 V は、前ページより

$$V=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

であった。一方、右図より

$$V=\int_c^b S(y)dy、S(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

だから、

$$V=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$$

である。よって

$$\boxed{\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy}$$

が成り立つ。これを累次積分の**順序交換可能性**という。

例　$\displaystyle\int_2^3\left\{\int_1^2\left(4-x+xy+y^2\right)dx\right\}dy=\int_2^3\left\{\int_1^2\left(4+y^2+(y-1)x\right)dx\right\}dy$

$$=\int_2^3\left\{\left[\left(4+y^2\right)x+(y-1)\times\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=2}\right\}dy$$

$$=\int_2^3\left\{\left(\left(4+y^2\right)\times 2+(y-1)\times\frac{4}{2}\right)-\left(\left(4+y^2\right)+(y-1)\times\frac{1}{2}\right)\right\}dy$$

$$=\int_2^3\left\{y^2+\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}\right\}dy=\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4}y^2+\frac{5}{2}y\right]_{y=2}^{y=3}=\frac{151}{12}$$

問　次の累次積分を計算せよ。

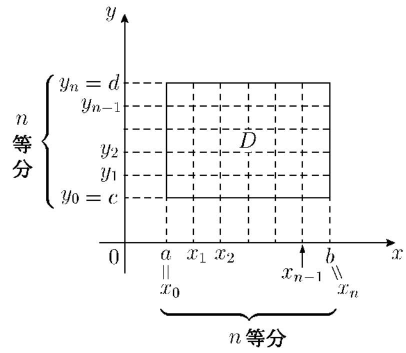
$$\int_1^3\left\{\int_1^2\left(x^2-xy-1\right)dx\right\}dy$$

＜ 長方形領域の 2 重積分 1 ＞

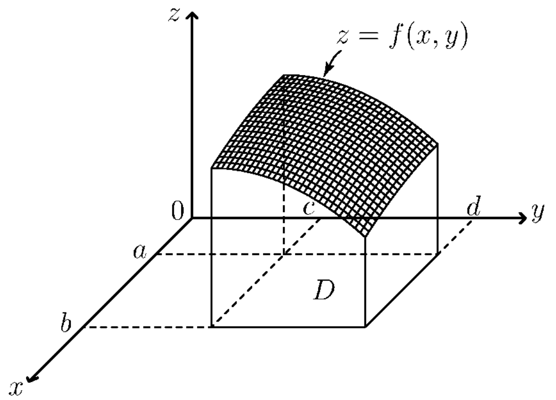
xy 平面上の長方形領域 $D=\{(x,y): a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ における 2 変数関数 $z=f(x,y)$ の 2 重積分を

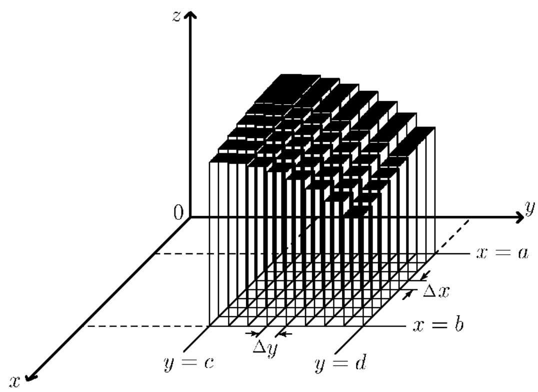
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta x\Delta y}$$

$$\left(\text{ただし } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ \Delta y=\frac{d-c}{n}\right)$$



で定義する。$f>0$ ならば左図の立体の体積を意味し、それを右図の小長方体の和で近似している。





体積を累次積分で求めたように、$D=\{(x,y): a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ ならば

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx = \int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy}$$

が成立する。

例　$D=\{(x,y): 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3\}$ のとき

$$\iint_D (1+2xy)\,dxdy = \int_1^2\left\{\int_0^3 (1+2xy)\,dy\right\}dx = \int_1^2\left\{\Big[y+xy^2\Big]_{y=0}^{y=3}\right\}dx$$

$$=\int_1^2\Big\{(3+9x)-0\Big\}dx = \left[3x+\frac{9}{2}x^2\right]_1^2 = (6+18)-\left(3+\frac{9}{2}\right)=\frac{33}{2}$$

問　$D=\{(x,y): -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ のとき、次の 2 重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \left(2x-3y^2\right)dxdy$$

< 長方形領域の2重積分 2 >

例　$D = \left\{(x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 4\ ,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ のとき

$$\iint_D x^2 \cos y\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_1^4 x^2 \cos y\, dx\right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left[\frac{x^3}{3}\cos y\right]_{x=1}^{x=4}\right\} dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{64}{3}\cos y - \frac{1}{3}\cos y\right\} dy \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{21 \cos y\} dy \ = \ \Big[21 \sin y\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \ = \ 21$$

（別解）

$$\iint_D x^2 \times \cos y\, dy \ = \ \int_1^4 x^2\, dx \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy \ = \ \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^{x=4} \times \Big[\sin y\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \ = \ 21 \ \times \ 1 \ = \ 21$$

この例のように２変数関数 $f(x,y)$ が x の関数 $g(x)$ と y の関数 $k(y)$ との積 $f(x,y) \ = \ g(x) \ \times \ k(y)$ となっているとき、長方形領域における２重積分は、（ x に関する定積分）×（ y に関する定積分）になる。すなわち

$$\iint_D g(x)k(y)\, dxdy \ = \ \left(\int_a^b g(x)dx\right) \ \times \ \left(\int_c^d k(y)dy\right)$$

ただし　　$D \ = \ \{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ c \leqq y \leqq d\}$

となる。

問　次の重積分の値を求めよ。

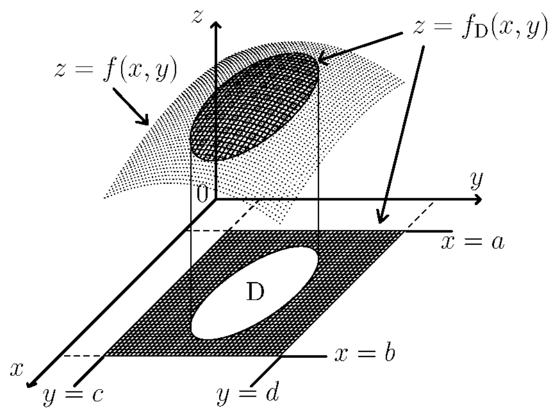
(1) $\displaystyle\iint_D x^3 \sin(2y)\, dxdy \ =$

$D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 2\ ,\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{2x-y}\, dxdy \ =$

$D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$

＜一般領域の2重積分1＞



xy 平面上の有界領域 D に対し、D が領域 $\{(x,y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ に含まれる様に定数 a、b、c、d をとる。

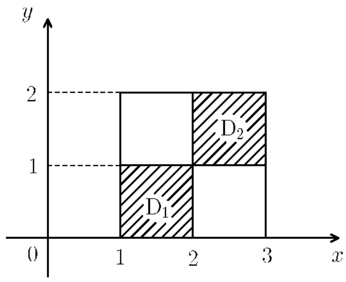
一般の2変数関数 $f(x,y)$ に対して、領域 D における2重積分を次式で定義する。

$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_c^d f_{\mathrm{D}}(x,y)dy\right\} dx = \int_c^d \left\{\int_a^b f_{\mathrm{D}}(x,y)dx\right\} dy}$$

ただし、

$$f_{\mathrm{D}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & : \ (x,y) \text{ が D の点} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases}$$

である。右上図では、上部の曲面が $z = f(x,y)$ を表し、D 以外で0になっている濃い曲面が $z = f_{\mathrm{D}}(x,y)$ である。$f > 0$ のとき、D における2重積分の値は、底面が D である柱上の立体の体積を意味する。



例　右図の斜線部分を領域 D とする。今、

$\mathrm{D}_1 = \{\ (x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 2\ ,\ 0 \leqq y \leqq 1\ \}$

$\mathrm{D}_2 = \{\ (x,y)\ :\ 2 \leqq x \leqq 3\ ,\ 1 \leqq y \leqq 2\ \}$

と置くと、D は D_1 と D_2 の和集合であるから、2重積分の定義より、

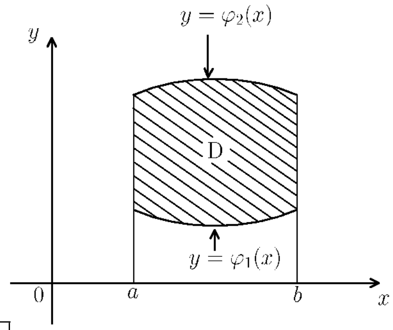
$$\iint_{\mathrm{D}} (x+y)dxdy = \iint_{\mathrm{D}_1} (x+y)dxdy + \iint_{\mathrm{D}_2} (x+y)dxdy$$

が成り立つ。

問　例の計算を完成せよ。

$$\iint_{\mathrm{D}} (x+y)dxdy =$$

＜一般領域の2重積分 2＞



xy 平面上の領域 D が、2つの曲線 $y=\varphi_1(x)$、$y=\varphi_2(x)$ と2つの直線 $x=a$、$x=b$ とで囲まれているとき、すなわち

$\mathrm{D}=\{\,(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$

となっているとき、2変数関数 $f(x,y)$ の D における重積分は、累次積分

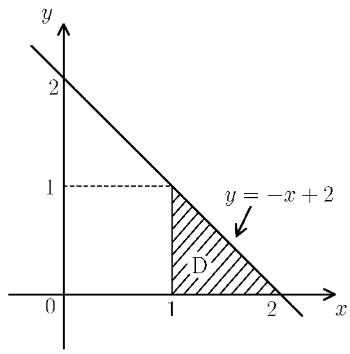
$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right\}dx}$$

によって計算される。

例　領域 D が、右図の斜線部分であるとき、
D は、

$\mathrm{D}=\{\,(x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 2\ ,\ 0 \leqq y \leqq -x+2\}$

と表されるから、

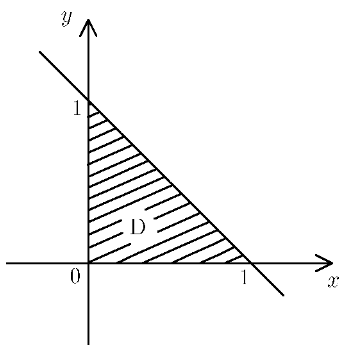


$$\iint_{\mathrm{D}}(x+y)dxdy=\int_1^2\left\{\int_0^{-x+2}(x+y)dy\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left\{\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=-x+2}\right\}dx=\int_1^2\left\{x(-x+2)+\frac{1}{2}(-x+2)^2-0\right\}dx$$

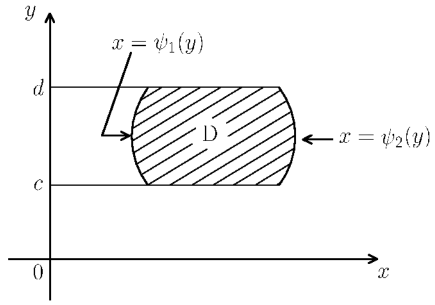
$$=\int_1^2\left\{-\frac{1}{2}x^2+2\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{5}{6}$$

問　D が右図の斜線部分であるとき、2重積分
$\iint_{\mathrm{D}}\left(6xy^2-1\right)dxdy$　の値を求めよ。



< 一般領域の 2 重積分 3 >

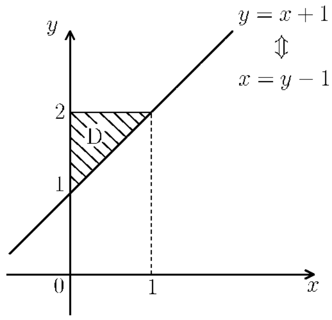
xy 平面上の領域 D が
$\mathrm{D} = \{\ (x, y)\ :\ c \leqq y \leqq d\ ,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$
と表されているとき、２変数関数 $f(x, y)$ の
D における重積分は、累次積分



$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right\} dy}$$

によって計算される。

例 領域 D が右図の斜線の部分であるとき、 D は
$\mathrm{D} = \{(x, y)\ :\ 1 \leqq y \leqq 2\ ,\ 0 \leqq x \leqq y - 1\ \}$ と
表されるから、



$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2 + y\right) dxdy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{y-1} \left(x^2 + y\right) dx \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 + xy \right]_{x=0}^{x=y-1} \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \frac{1}{3}(y-1)^3 + y^2 - y \right\} dy$$

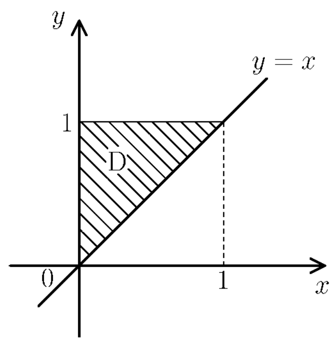
$$= \left[\frac{1}{12}(y-1)^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=2} = \left(\frac{1}{12} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{12}$$

(注)　$\mathrm{D} = \{\ (x, y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ x + 1 \leqq y \leqq 2\ \}$　と考えて

$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2 + y\right) dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x+1}^2 \left(x^2 + y\right) dy \right\} dx$$

を計算しても同じ答が出るが、この場合は例の様にやる方が累次積分の計算が
楽になる

問 D が右図の斜線部分であるとき、２重積分
$\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (xy - y)dxdy$　の値を求めよ。

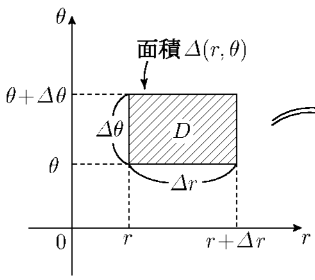


＜ 面積比 ＞

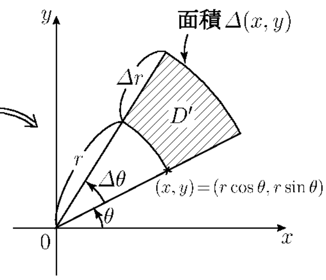
例　極座標変換

$$(1)\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$

は図 1 のような (r,θ) 平面上の長方形領域 D を図 2 のような (x,y) 平面上の領域 D' に移す。領域 D の面積を $\Delta(r,\theta)$、領域 D' の面積を $\Delta(x,y)$ とすると、D と D' の面積比は



(図 1)



(図 2)

$$\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(r,\theta)} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta\theta)(r+\Delta r)^2 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)r^2}{(\Delta r)(\Delta\theta)} = r + \frac{1}{2}(\Delta r) \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで $\Delta r \to 0, \Delta\theta \to 0$ の極限を $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ と書くことにすれば、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \frac{\Delta(x,y)}{\Delta(r,\theta)} = \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) = r \quad \cdots\cdots (3)$$

となる。一方IVの 37 ページの結果から、(1) のヤコビアンは $J = r$ だから

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

この例から一般に u と v の関数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ に対して、微小領域の面積比をヤコビアンの絶対値

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{の絶対値}} \cdots\cdots (4)$$

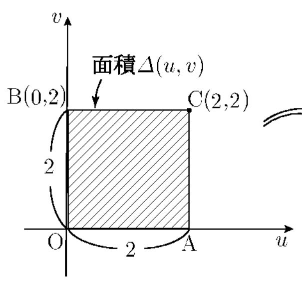
で定義する。

(注) ヤコビアンは負になる場合もあるので、面積比を表すために絶対値をつける。

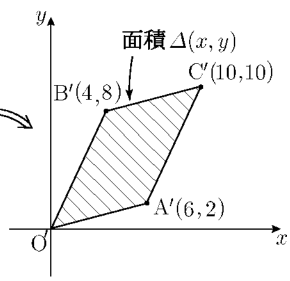
問　一次変換

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3u + 2v \\ y = u + 4v \end{array}\right.$$

によって uv 平面上の正方形領域 OABC(図 3) は、xy 平面上の平行四辺形領域 $\mathrm{O'A'B'C'}$ (図 4) に移る。



(図 3)



(図 4)

(1)　$\Delta(u,v)$ と $\Delta(x,y)$ を求め、その比を計算せよ。

$\Delta(u,v) =$　　　　　　　　,　$\Delta(x,y) =$　　　　　　　　,　$\dfrac{\Delta(x,y)}{\Delta(u,v)} =$

$$\left(\text{(ヒント)}\ \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{の作る平行四辺形の面積は} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値}\right)$$

(2)　x と y を u と v で偏微分して、ヤコビアン J を求めることによって面積比を求めよ。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$$

< 重積分の変数変換 1 >

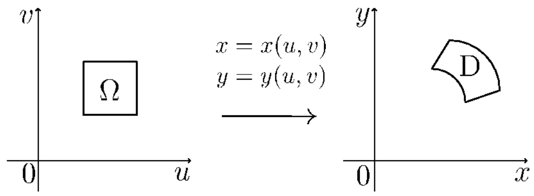
一変数関数の定積分の置換積分

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}du} \qquad \left(\begin{array}{l} x = x(u) \\ a = x(\alpha)\ ,\ b = x(\beta) \end{array}\right)$$

と同様に 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し、x と y が u と v の関数であり、

$$x = (u, v)\ ,\ y = y(u, v)$$

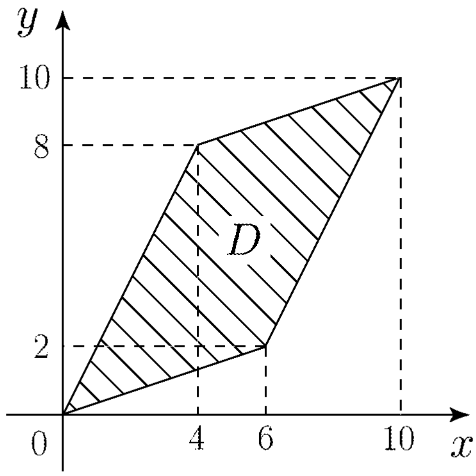
によって、uv 平面上の領域 Ω が
xy 平面上の領域 D に移されるとき、



$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Omega f\bigl(x(u, v)\ ,\ y(u, v)\bigr)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv}$$

が成り立つ。ここで $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ は前ページの面積比である。

例題 領域 D が右図の場合 $\displaystyle\iint_D (x + y)dxdy$ を求めよ。



解 前ページの問より一次変換

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = u + 4v \end{cases}$$

によって uv 平面上の正方形領域

$$\Omega = \{(u, v)\ :\ 0 \leqq u \leqq 2\ ,\ 0 \leqq v \leqq 2\}$$

は xy 平面上の領域 D に移る。

$$J = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

より $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 10$ だから

$$\iint_D (x + y)dxdy = \iint_\Omega \bigl((3u + 2v) + (u + 4v)\bigr)10dudv = 10 \times \int_0^2 \left\{\int_0^2 (4u + 6v)du\right\}dv$$

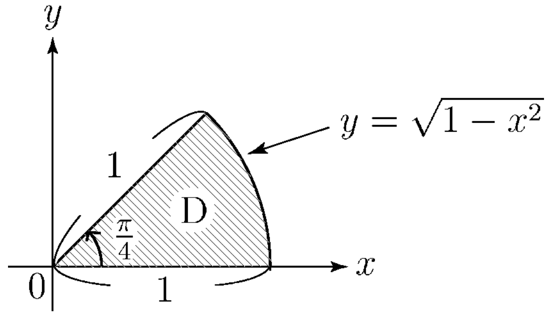
$$= 10\int_0^2 \left\{\bigl[2u^2 + 6uv\bigr]_{u=0}^{u=2}\right\}dv = 10\int_0^2 \{8 + 12v\}dv = 10 \times \bigl[8v + 6v^2\bigr]_{v=0}^{v=2} = 400$$

問 例題と同じ領域 D に対し $\displaystyle\iint_D (y - x)dxdy$ を求めよ。

＜重積分の変数変換 2＞

例題　領域 D が図 1 の場合に

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy \text{ を求めよ。}$$



（図 1）

解　極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって $r\theta$ 平面の長方形領域

$$\Omega = \left\{(r,\theta)\ :\ 0 \leqq r \leqq 1\ ,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right\} \left(\begin{array}{l} \text{半径 } r \text{ は 0 から 1 まで} \\ \text{角}\theta\text{は 0 から}\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right)$$

は xy 平面上の領域 D に移される。30 ページより極座標変換の面積比は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

であるから

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\Omega} e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}drd\theta$$

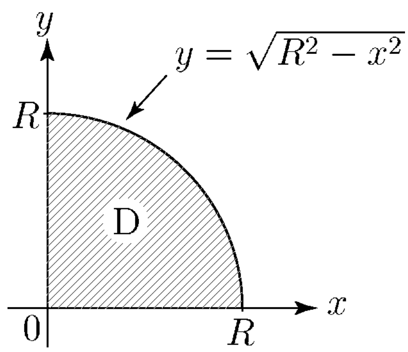
$$= \iint_{\Omega} e^{-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=1}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^0\right\}d\theta = \frac{1}{2}(-e^{-1}+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \frac{1}{2}(1-e^{-1})\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(1-e^{-1})$$

問　領域 D が図 2 の場合に

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

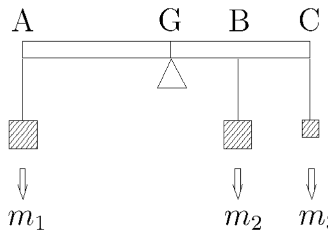
を求めよ。



（図 2）

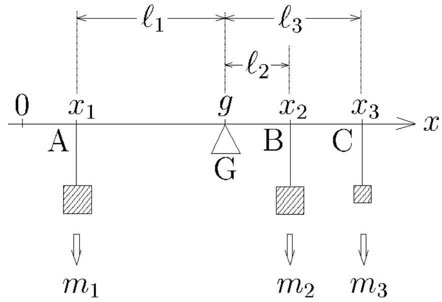
< 質量と重心１ >

例　細長い棒 AC に図１のように
おもり $m_1,\ m_2,\ m_3$ がかかっ
ているとする。棒自身のおもさ
を無視して重心 G の位置を
求めたい。



(図1)

この問題を図２のように
数直線上におもり $m_1,\ m_2,\ m_3$
がかかっていると考え、
各点の座標を $x_1,\ x_2,\ x_3$ として
重心の座標 g を求めたい。



(図2)

重心の意味から

(1)　$\ell_1 = g - x_1,$
　　$\ell_2 = x_2 - g,\quad \ell_3 = x_3 - g$

とおくと

(2)　$m_1 \times \ell_1 = m_2 \times \ell_2 + m_3 \times \ell_3$

が成り立つ。(2) 式に (1) を代入すると

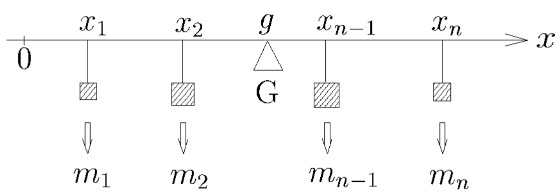
より
$$m_1 g - m_1 x_1 = (m_2 x_2 - m_2 g) + (m_3 x_3 - m_3 g)$$
$$(m_1 + m_2 + m_3) g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$$

ここで全質量を $M = m_1 + m_2 + m_3$ とおくと

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\}}$$

が成り立つ。

問　数直線上に n 個のおもり
　$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{n-1},\ m_n$
が図３のようにかかっているとき
重心 G の位置を全質量
　$M = m_1 + m_2 +\ \cdots + m_{n-1} + m_n$
と $m_1,\ \cdots,\ m_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ を使って
表せ。



(図3)

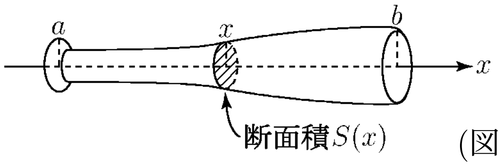
＜質量と重心 2＞

例 野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 (x 軸) に垂直な断面の断面積 $S(x)$ が分かっている場合、この立体の体積 V は

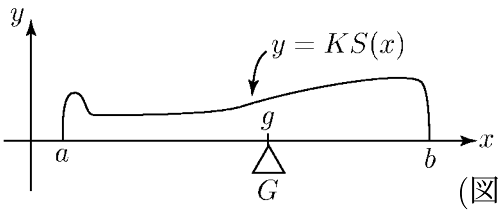
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

であった。もしこのバットの材質が均一であれば、その質量 M は体積の定数倍 (K 倍) になると考えられるので

$$M = KV = \int_a^b KS(x)dx$$



(図 1)



(図 2)

と表される。この場合被積分関数 $KS(x)$ をこの立体の**質量分布の密度関数**という。

この立体の重心 G の位置 g(図 2) を求めたい。

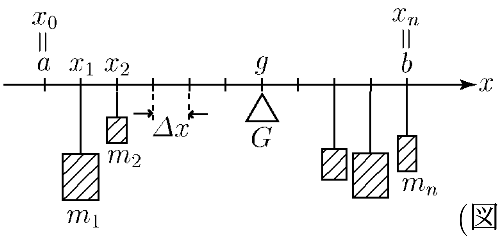
区間 $[a, b]$ を n 等分して、その分点を

$$a = x_0,\ x_1, \cdots, x_n = b$$

とおき、それぞれ

$$m_1,\ m_2,\ \cdots, m_n$$

のおもりがかかっているとする (図 3)。



(図 3)

このとき $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ とすると

$$m_k = \int_{x_k-1}^{x_k} KS(x)dx \fallingdotseq KS(x_k)\Delta x \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。前ページの結果より

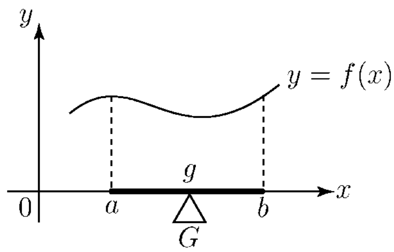
$$g = \frac{1}{M}\Big\{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\Big\} \fallingdotseq \frac{1}{M}\Big\{x_1KS(x_1) + \cdots + x_nKS(x_n)\Big\}\Delta x$$

である。$n \to \infty$ とすれば定積分の区分求積法による定義から

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\int_a^b xKS(x)dx \ = \ \frac{1}{\int_a^b KS(x)dx}\int_a^b xKS(x)dx}$$

となる。

< 質量と重心 3 >



数直線の区間 $[a,b]$ に質量があるとき、その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば、全質量 M と重心の座標 g は

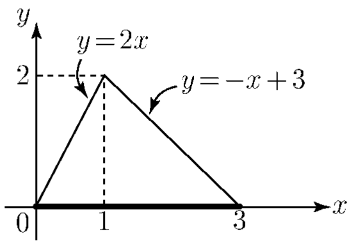
$$\boxed{M = \int_a^b f(x)dx \quad , \quad g = \frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx}$$

で表される。$f(x)$ を単に**密度関数**とか**重み関数**などという。

例 数直線上の区間 $[0,3]$ に質量があり、その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x+3 & : \quad 1 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

である場合、全質量 M と重心の座標 g は



$$M = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 (-x+3)dx = \Big[x^2\Big]_0^1 + \Big[-\frac{x^2}{2}+3x\Big]_1^3 = 3$$

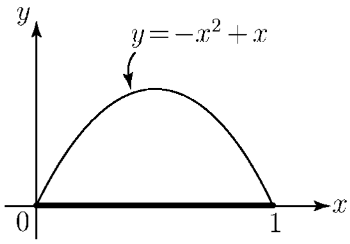
$$g = \frac{1}{M}\int_0^3 xf(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x \times 2x\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 x \times (-x+3)dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \frac{4}{3}$$

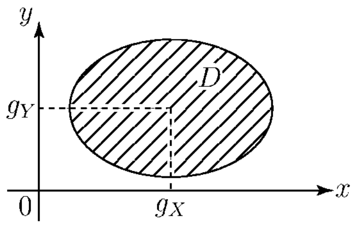
問 数直線上の区間 $[0,1]$ に質量があり、その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = -x^2 + x \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

である場合、全質量 M と重心の座標 g を求めよ。



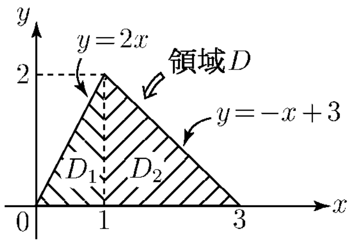
＜質量と重心 4＞



平面上の領域 D に質量がある場合、その質量分布の密度関数が $f(x,y)$ であれば、全質量 M と重心の座標 (g_X, g_Y) は

$$\boxed{M = \iint_D f(x,y)dxdy \ , \ g_X = \frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)dxdy \ , \ g_Y = \frac{1}{M}\iint_D yf(x,y)dxdy}$$

で表される。



例　平面上の領域 D が右図の斜線部分の三角形とする。この三角形の重心の位置 (g_X, g_Y) を求めたい。D にかかる質量は均一に 1 とする。(すなわち $f(x,y)=1$ である。) このとき全質量 M は

$$M = \iint_D 1dxdy = D\text{の面積} = \frac{1}{2}\times 3\times 2 = 3$$

である。ここで D を D_1 と D_2 に分けると、

$$D_1 = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leqq x \leqq 1 \ , \ 0 \leqq y \leqq 2x\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leqq x \leqq 3 \ , \ 0 \leqq y \leqq -x+3\right\}$$

より

$$g_X = \frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D_1} x\,dxdy + \frac{1}{3}\iint_{D_2} x\,dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{\int_0^{2x} x\,dy\right\}dx + \frac{1}{3}\int_1^3 \left\{\int_0^{-x+3} x\,dy\right\}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{\big[xy\big]_{y=0}^{y=2x}\right\}dx + \frac{1}{3}\int_1^3 \left\{\big[xy\big]_{y=0}^{y=-x+3}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 2x^2\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 (-x^2+3x)\,dx = \frac{4}{3}$$

問　例の場合に g_Y を求めよ。

＜広義積分 1＞

定数 a, b $(a < b)$ と関数 $f(x)$ に対し定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

を考える。今 $a \to -\infty$ ， $b \to +\infty$ のときの極限値が存在する場合に

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \quad , \quad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

と表し，**広義の定積分**または**広義積分**という。

例１ $$\int_0^\infty e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}e^0\right] = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2b}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

例２ $$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-4}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3}x^{-3}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}b^{-3} + \frac{1}{3}(1)^{-3}\right] = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

問　次の値を求めよ。(ただし $\lambda > 0$, $r > 1$)

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx =$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^r}dx =$

< 広義積分 2 >

重積分の広義積分も前のページと同様に考える。

例題　$D = \big\{(x,y)\ :\ x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\big\}$ に対して $\displaystyle\iint_D e^{-2x-3y}dxdy$ を求めよ。

(解)　$R>0$ に対し　$D_R = \big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq R\ ,\ 0 \leqq y \leqq R\big\}$ とする。

$$\iint_D e^{-2x-3y}dxdy = \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R} e^{-2x-3y}dxdy = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2x}dx \times \int_0^R e^{-3y}dy$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=R} \times \left[-\frac{1}{3}e^{-3y}\right]_{y=0}^{y=R} = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2R}+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3}e^{-3R}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2R}}+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3e^{3R}}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(注)　領域 D がこの例の場合

$$\iint_D e^{-2x-3y}dxdy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-2x-3y}dxdy$$

と略記する。

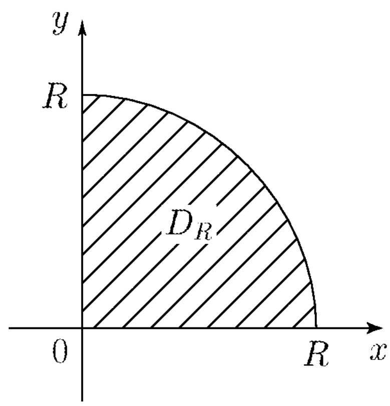
問　$\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めたい。 $R>0$ に対し

$$D_R = \big\{(x,y)\ :\ x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ x^2+y^2 \leqq R^2\big\}$$

とおいて 32 ページの結果を使い、

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

を計算せよ。



< 広義積分 3 >

< 広義積分 3 >

積分は微分よりも難しい。たとえば e^{-x^2} は微分できるが、不定積分が求まらない。正確に言うと $\int e^{-x^2}dx$ は初等関数（整関数、分数関数、指数、対数関数、三角関数等）では表されない。このような関数はたくさんある。たとえば $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\log x}$, $\frac{e^x}{x}$ などは不定積分が初等関数では表されない。（くわしくは岩波「数学公式 I 」を参照。）
しかし e^{-x^2} の広義積分は計算できる。実は

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \quad = \quad \sqrt{\pi}}$$

である。

< **証明** > 前ページの結果より

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

である。一方　左辺は 36 ページと同様に考えると

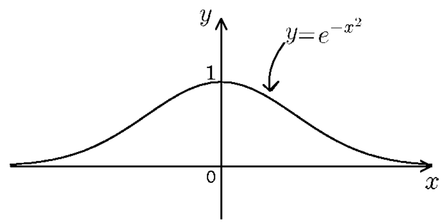
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2} \times e^{-y^2}\,dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right) \times \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

であるから

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

より

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



一方 $y = e^{-x^2}$ は、右図のように y 軸対称であるから

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$$

であるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \quad = \quad 2 \times \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \quad = \quad 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad = \quad \sqrt{\pi}$$

(証明終)

＜広義積分 4＞

前ページの結果から

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \;=\; \sqrt{\pi}} \quad (*)$$

である。

例題　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ を求めよ。

(解)　まず $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$　を求める。$(*)$ の結果を使いたい。$-\frac{x^2}{2} = -t^2$

となるように t をえらぶ。

$$\frac{x^2}{2} = t^2 \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}t$$

とおくと $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}$ より $dx = \sqrt{2}dt$ であるから置換積分で変数変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

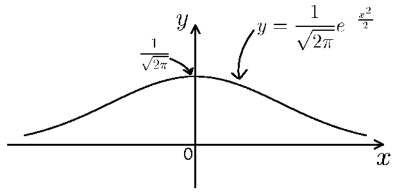
よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$$

(注)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ を **正規分布の密度関数**

または **誤差関数** (Error Function)

という。



問 次の積分値を求めよ。（ただし λ は正の定数とする）

(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} dx$