高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

秋期入学者用

V

内容

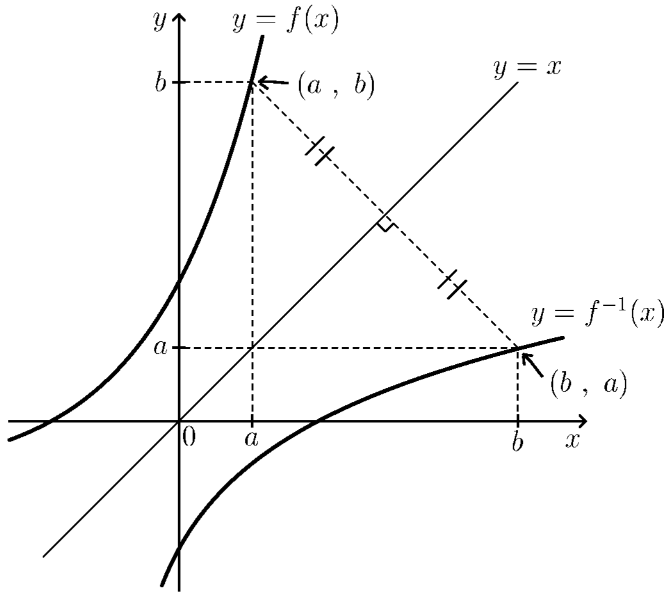
◎ 逆関数

◎ 高階導関数

◎ ロピタルの定理

◎ テーラー展開

◎ 偏微分

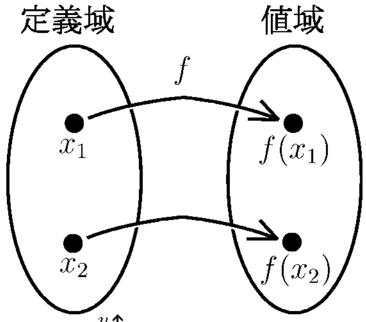


電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜１対１関数＞

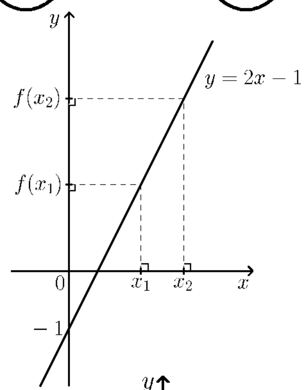
関数 $y = f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり



$(*)$　$\underline{x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)}$

が成り立つとき、関数 $y = f(x)$ は **１対１** であるという。

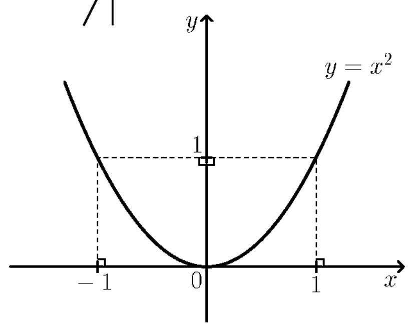
例１　$f(x) = 2x - 1$ のとき、
関数 $y = f(x)$ は１対１である。



例２　$f(x) = x^2$ のとき、
定義域を実数全体とすれば、関数
$y = f(x)$ は１対１ではない。
なぜなら、$x_1 = -1$，$x_2 = 1$ のとき

$$f(x_1) = f(x_2) = 1$$

となり $(*)$ 式が成立しないから。

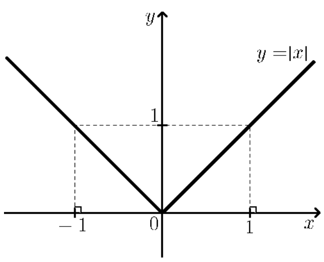


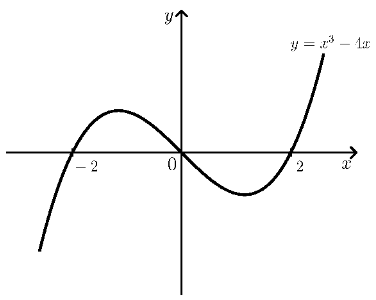
（注）　このような x_1，x_2 が１組でもあれば１対１ではない。

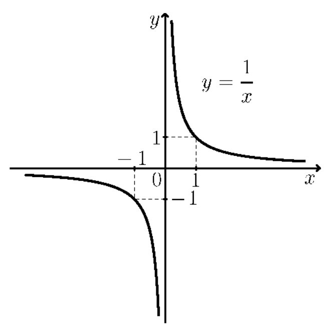
問　次の関数が１対１であるかどうか判定せよ。

(1) $y = |x|$　　(2) $y = x^3 - 4x$　　(3) $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

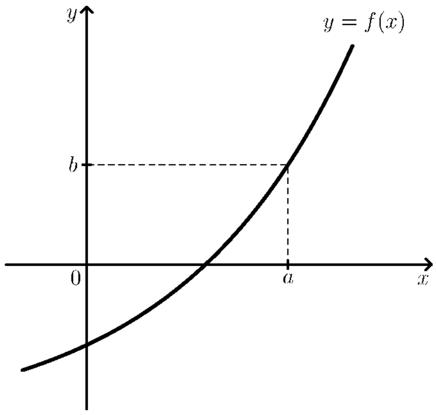
(答)＿＿＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿＿＿







＜ 逆関数１ ＞



関数 $f(x)$ が 1 対 1 であるとき、y の値 b に対して、

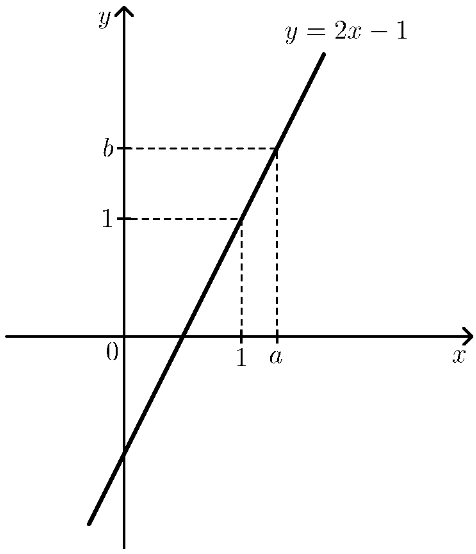
$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。

例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、



関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 である。

$b = f(a)$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$b = 2a - 1$

である。これを a について解くと

$a = \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

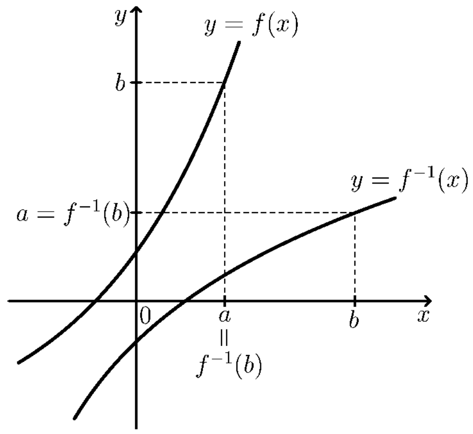
となる。

問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて 1 対 1 である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 1 - 3x$　　(2) $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$　　(3) $f(x) = \sqrt{x}$

（解）　　（解）　　（解）

＜ 逆関数 2 ＞



関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 のとき、y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。

例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

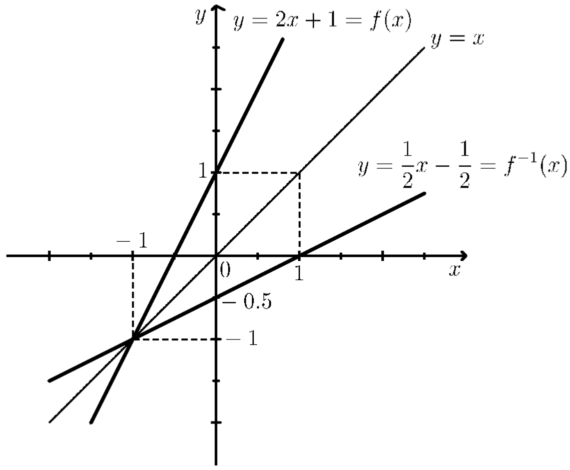
$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に書くと、右図のように直線 $y = x$ に関して対称になる。



(注) 例の場合、逆関数 $f^{-1}(x)$ は次のようにしても求まる。

$$\left.\begin{array}{lll} y = 2x + 1 & \iff & x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = f(x) & \iff & x = f^{-1}(y) \end{array}\right) \implies f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \implies f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

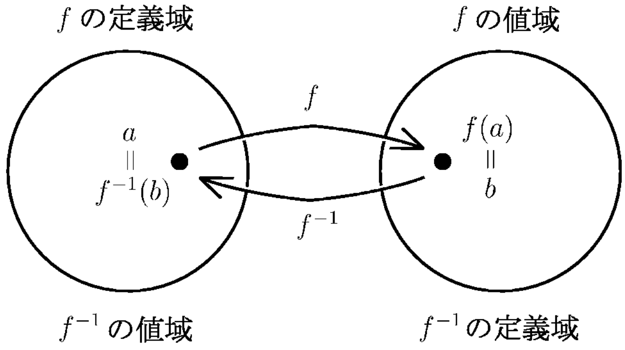
問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$　　(2) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1-x}$　　(3) $f(x) = \sqrt{1-x}$

（解）　　（解）　　（解）

＜ 逆関数3 ＞

関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。

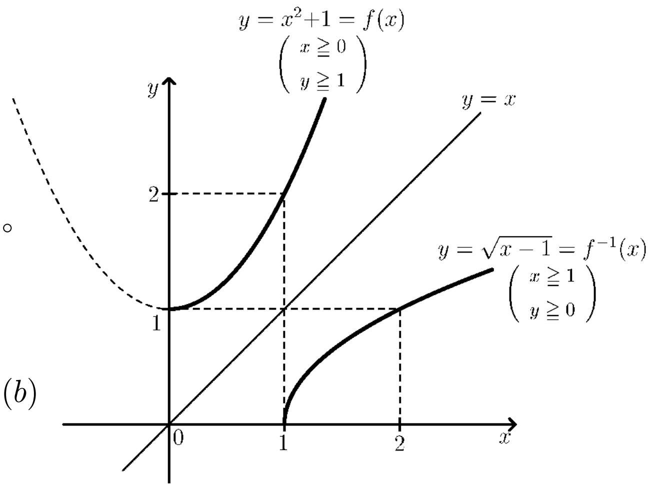


例 $f(x)=x^2+1$ のとき、f の定義域を $x \geqq 0$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 にある。この逆関数を以下のようにして求める。

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より

$$b=a^2+1 \iff a=\sqrt{b-1}=f^{-1}(b)$$
$$(a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1) \qquad (a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1)$$



となる。b を x でおきかえると、逆関数

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1} \quad (\text{定義域}\, x \geqq 1)$$

が求まる。$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y=x$ に関し、対称になる。

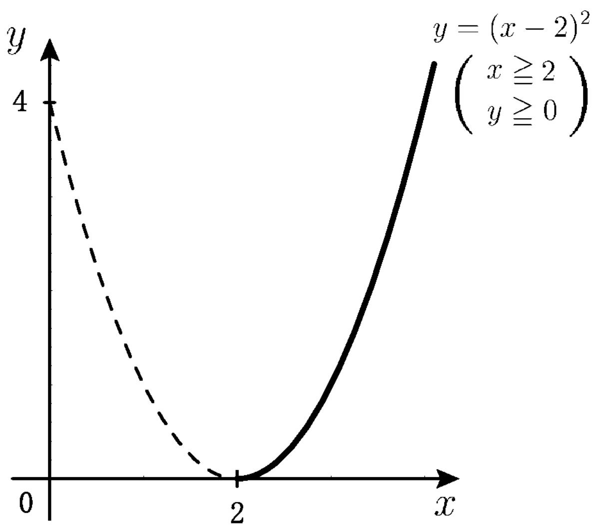
(注) 例の逆関数は以下のようにしても求まる。

$$\left.\begin{array}{lcl} y=f(x) & \iff & x=f^{-1}(y) \\ y=x^2+1 & \iff & x=\sqrt{y-1} \\ \begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \implies f^{-1}(y)=\sqrt{y-1} \ \ (y \geqq 1)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1} \ \ (x \geqq 1)$$

問 $f(x)=(x-2)^2$ のとき f の定義域を $x \geqq 2$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を求め、グラフを右図に書け。



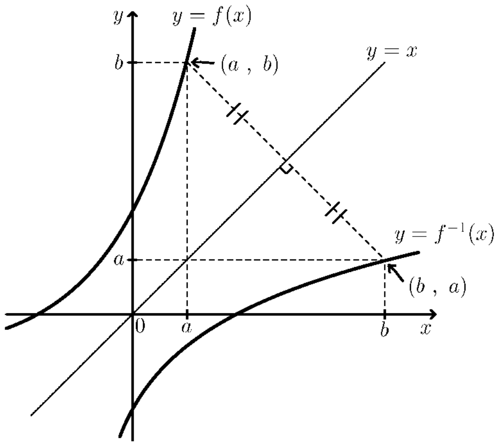
（解）

＜ 逆関数 4 ＞

関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 であるとき、$y=f(x)$ のグラフ上の点の座標を $(a\ ,\ b)$ とすると

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より、点 $(b\ ,\ a)$ は逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。



このことから、逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y=f(x)$ のグラフを、直線 $y=x$ に関して、対称に折り返したものになっている。

例 $f(x)=3^x$ のとき、

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

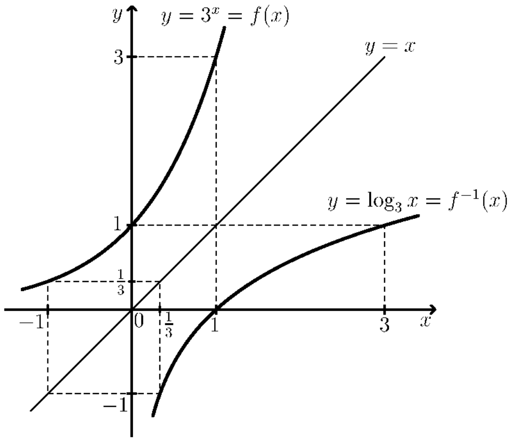
より

$$b=3^a \iff a=\log_3 b=f^{-1}(b)$$

であるから、逆関数は

$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

である。対数関数 $y=\log_3 x$ は指数関数 $y=3^x$ の逆関数である。



$y=\log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y=3^x$ のグラフを直線 $y=x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。

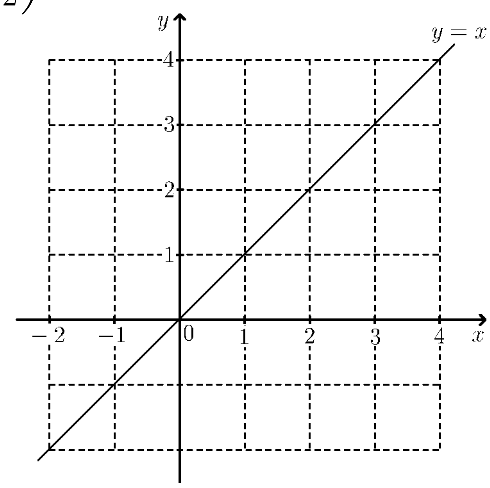
(注) 例の逆関数は以下のようにしても求まる。

$$\left.\begin{array}{lcl} y=f(x) & \iff & x=f^{-1}(y) \\ y=3^x & \iff & x=\log_3 y \end{array}\right\} \implies f^{-1}(y)=\log_3 y$$

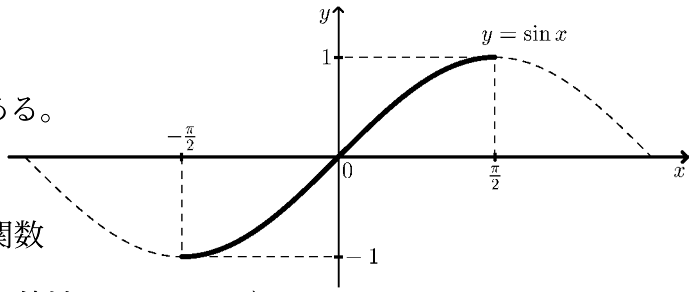
$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

問 指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ と対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを同じ座標平面上に書け。



＜ 逆三角関数１ ＞



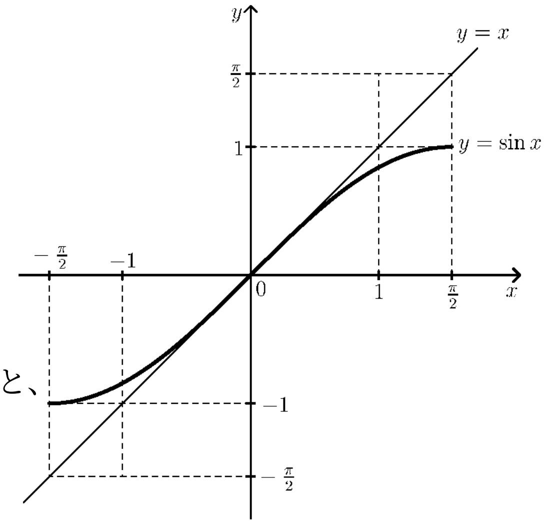
正弦関数 $y=\sin x$ の通常の定義域は
実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。
この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に
制限すると、1 対 1 になる。このとき、関数

$$y=\sin x \quad （定義域\ -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}，値域\ -1 \leqq y \leqq 1）$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y=\sin^{-1} x \qquad 又は \qquad y=\arcsin x \quad （定義域\ -1 \leqq x \leqq 1，値域\ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}）$$

（インバースサイン）　　（アークサイン）



と表す。$y=\sin^{-1} x$ のグラフは、$y=\sin x$ のグラフを
直線 $y=x$ に関して対称におり返したものである。

問 1　右の座標平面上に $y=\sin^{-1} x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a=\sin^{-1} b \iff b=\sin a$$

である。たとえば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で sin が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。表より $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから、

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

（答）$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

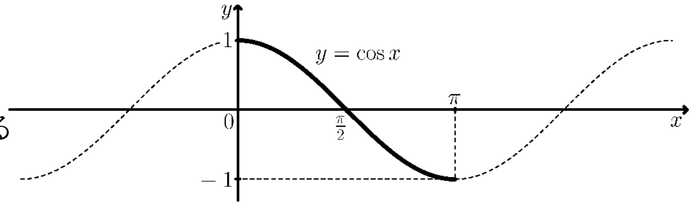
問 2　表を完成せよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=$　　　　(2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　　　(3) $\sin^{-1}(-1)=$

＜逆三角関数2＞

余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数



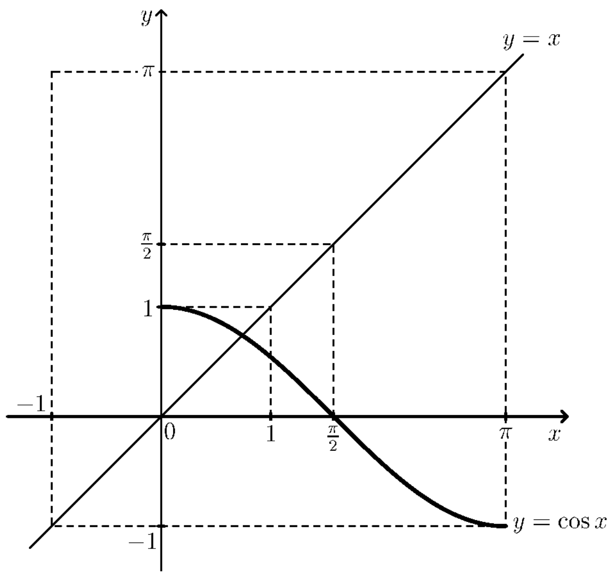
$y=\cos x$　（定義域 $0 \leqq x \leqq \pi$，値域 $-1 \leqq y \leqq 1$）

の逆関数が存在し、これを

$y=\cos^{-1} x$　又は　$y=\arccos x$　（定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$，値域 $0 \leqq y \leqq \pi$）
（インバースコサイン）（アークコサイン）

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称におり返したものである。

問 1　右図の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを書け。



例　逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。たとえば $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で、$\cos\theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\frac{\pi}{3}$ であるから（答）$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

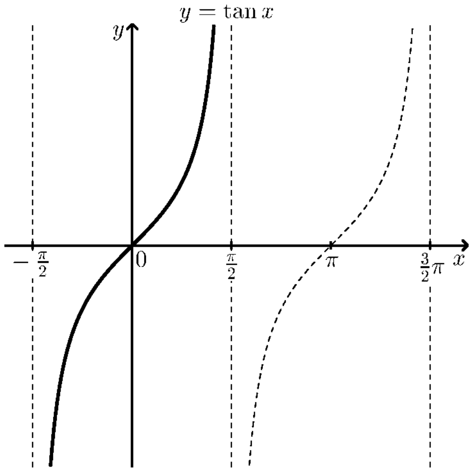
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2　表を完成せよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　　(2) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　　(3) $\cos^{-1}(0)=$

＜ 逆三角関数3 ＞



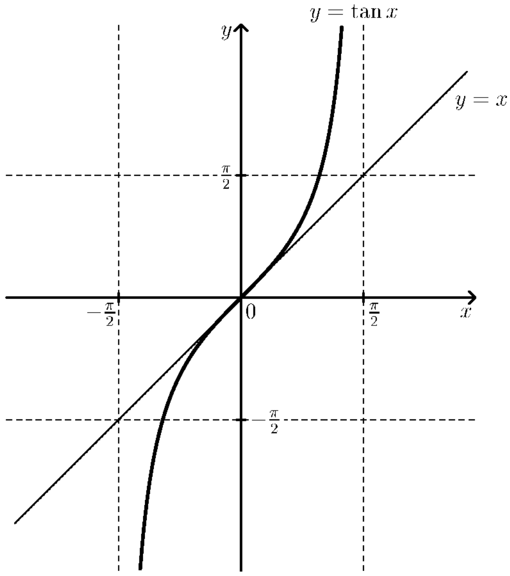
正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は
$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$（n は整数）以外の実数であり、
値域は実数全体である。この関数の
定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、
１対１になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad （定義域 : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ 値域 : 実数全体）$$

の逆関数が存在し、これを、

$y = \tan^{-1} x$　　又は　　$y = \arctan x$　（定義域 : 実数全体 ，値域 : $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$）
（インバースタンジェント）（アークタンジェント）

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは $y = \tan x$ のグラフを
直線 $y = x$ に関して対称におり返したものである。



問 1　右の座標平面上に $\tan^{-1} x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。たとえば、$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を
求めようとすると、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、$\tan\theta$ が
$\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから　（答）$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2　表を完成せよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$　　　(2) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) =$　　　(3) $\tan^{-1}(-1) =$

＜ 逆関数の微分 ＞

$f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y=f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f(y)$$

$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta y\to 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y=\sin^{-1}x$ の導関数を求めたい。

$$y=\sin^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad x=\sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(注) $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ より $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$

問 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\cos^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx}=$$

(2) $y=\tan^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx}=$$

（ヒント） $\dfrac{1}{\cos^2 y}=\dfrac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y$ を使う

＜逆三角関数の積分＞

前のページの結果より

$$\boxed{(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad , \quad \boxed{(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

である。従って不定積分の形にすると

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}(x) + C} \quad , \quad \boxed{\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x) + C}$$

となる。

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ を求めたい。

$\boxed{x = 2u}$ とおくと $\boxed{dx = 2du}$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}} \times 2du = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sin^{-1}(u) + C = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

問 1 正の数 a に対し $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ を求めよ。

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}dx$ を求めたい。

$\boxed{x = 3u}$ とおくと $\boxed{dx = 3du}$ より

$$\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9+9u^2} \times 3du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

問 2 正の数 a に対し $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ を求めよ。

＜不定積分の特例1＞

　三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2},\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$$

2. 積を和に直す公式

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\end{aligned}}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(5x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \cos(-x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx =$

＜不定積分の特例2＞

例1 $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}dx$ を求めたい。

$$\boxed{x=\sin\theta}\text{ とおくと }\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta \implies \boxed{dx=(\cos\theta)d\theta}$$

より

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\theta$$

ここで前のページの例 (1) より

$$\int\cos^2\theta d\theta=\int\frac{1}{2}\big(1+\cos(2\theta)\big)d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C$$

となる。一方

$$x=\sin\theta \iff \theta=\sin^{-1}x$$

$$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=2x\sqrt{1-x^2}$$

より

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{4}\times2x\sqrt{1-x^2}+C$$

であるから

$$\boxed{\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\sin^{-1}(x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C}$$

例2 $\displaystyle\int\sqrt{9-x^2}dx$ を求めたい。

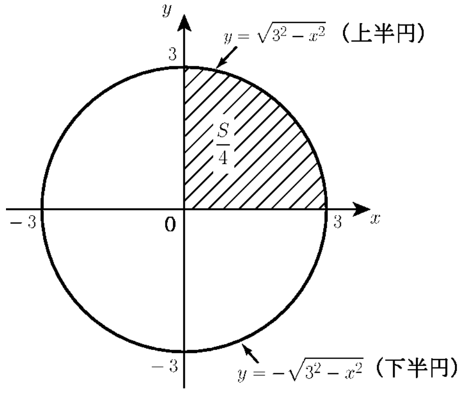
$$\boxed{x=3u}\text{ とおくと }\boxed{dx=3du}\text{ より}$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}dx&=\int\sqrt{9-9u^2}3du=9\int\sqrt{1-u^2}du\\&=9\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}(u)+\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}\right)+C\\&=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{9}{2}\times\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}+C\\&=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C\end{aligned}$$

問 正の数 a に対し $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ を求めよ。

＜円の面積＞

例　半径 3 の円の面積 S を求めたい。



原点を中心として半径 3 の円の方程式は

$$x^2+y^2=3^2$$

である。従って上半円の方程式は

$$y=\sqrt{3^2-x^2}\quad (\text{上半円})$$

である。四分の 1 円の面積は右図の斜線部分より

$$\frac{S}{4}=\int_0^3\sqrt{3^2-x^2}dx=\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$$

となる。前のページの結果より

$$\begin{aligned}\frac{S}{4}&=\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\left[\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}\right]_0^3\\&=\left(\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)+\frac{3}{2}\sqrt{9-3^2}\right)-\left(\frac{9}{2}\sin^{-1}(0)+\frac{0}{2}\sqrt{9-0^2}\right)\\&=\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)-\frac{9}{2}\sin^{-1}(0)\end{aligned}$$

となる。6 ページより

$$\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}\ ,\quad \sin^{-1}(0)=0$$

だから

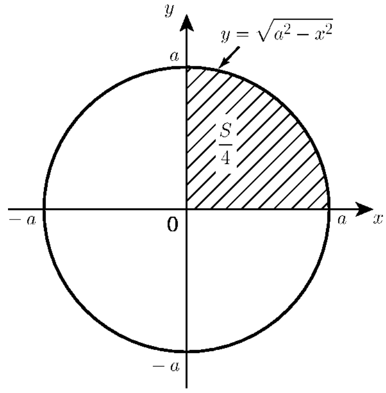
$$\frac{S}{4}=\frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{9}{2}\times 0=\frac{9\pi}{4}$$

よって

$$\underline{S=9\pi\quad (\text{半径 3 の円の面積})}$$

問　右図から $\dfrac{S}{4}=\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ である。

(1) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ の値を逆三角関数 $\sin^{-1}x$ を用いて表せ。



(2) S を求めよ。

＜ 高階導関数 ＞

関数 $f(x)$ について、導関数 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ の導関数を $f(x)$ の

2 階導関数といい、$f''(x)$ または $f^{(2)}(x)$ 等で表す。

例 1　$f(x) = x^3$ に対し、$f'(x) = 3x^2$ より

$$f''(x) = \bigl(f'(x)\bigr)' = (3x^2)' = 6x$$

$y = f(x)$ の 2 階導関数を $y'' = f''(x)$ の他に次のように書く。

$$\boxed{y'' = f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)} \quad (2\text{ 階導関数})$$

すべて同じ意味である。

問 1　次の関数 $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ および 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(3) $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

関数 $f(x)$ について 2 階導関数 $f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の **3 階導関数**といい、

$$\boxed{f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 f(x)} \quad (3\text{ 階導関数})$$

という記号で表す。全て同じ意味である。

例 2　$f(x) = x^3$ のとき $f''(x) = 6x$ より

$$f'''(x) = \bigl(f''(x)\bigr)' = (6x)' = 6$$

問 2　次の関数の 1 階から 3 階までの導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 13$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(3) $f(x) = e^{1-x}$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(4) $f(x) = x^3 \log x$

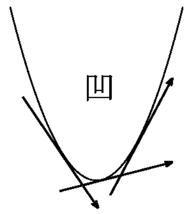
$f'(x) =$

$f''(x) =$

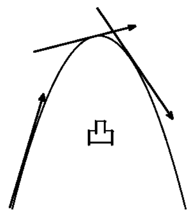
$f'''(x) =$

＜グラフの凹凸１＞

[1] 関数 $f(x)$ の 2 階導関数が、ある x 範囲内で常に $\underline{f''(x) > 0}$ のとき、
$f'(x)$ の値は、この範囲内で増加する。
したがって、グラフは、右の図のように
接線の傾きが増加していく。
このようなとき、グラフは**凹**であるという。



[2] これに対し、$\underline{f''(x) < 0}$ である範囲内では、
$f'(x)$ の値は減少し、グラフでは、
右の図のように接線の傾きが減少していく。
このようなとき、グラフは**凸**であるという。



例 関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だから、グラフの凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)

問 次の関数の 2 階導関数 y'' を求め、凹凸を表にせよ。

(1) $y = x^3 - 9x^2 + 20x$

$y'' =$

x	
y''	
y	

(2) $y = x^4 - 6x^2 + 15$

$y'' =$

x	
y''	
y	

＜グラフの凹凸2＞

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。
これを組み合わせると、下の表

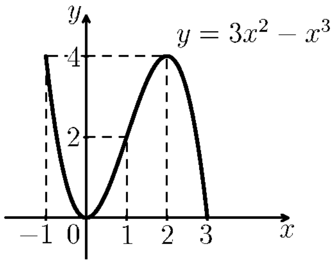
増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

凹凸表

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘



のようになる。実際のグラフは右のようになる。

以上の考察から、y' と y'' の $+, -$ によって y のグラフは
次のようになる。

y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$+$ ↗	$-$ ↘
y''	$+$ 凹	$+$ 凹	$-$ 凸	$-$ 凸
y	↘	↗	↗	↘

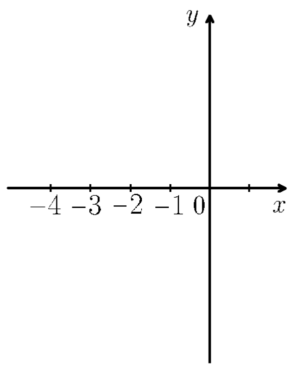
問 関数 $y = x^4 + 4x^3 + 16$ を 2 回微分し、
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$y' =$

$y'' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'							
y''							
y							



＜ 関数の一次近似 ＞

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数は $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ である。

$x=a+h$ とおけば、$h\to 0$ のとき $x\to a$ より

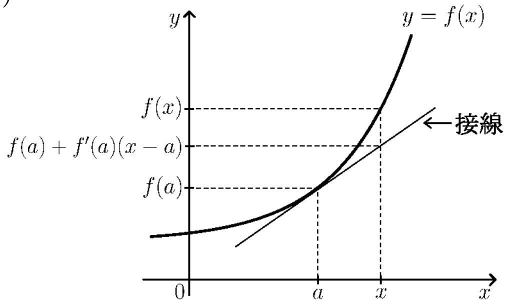
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき（$x\fallingdotseq a$ のとき）

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\fallingdotseq f'(a)$$

とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a\ \text{のとき}\ f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)}$$



が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、これを**一次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)}\quad\text{（接線）}$$

を表すが、これは曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。
すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例　$\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

より一次近似式は

$$x\fallingdotseq a\ \text{のとき}\ \sqrt[3]{x}\fallingdotseq\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)$$

となる。ここで $a=1$, $x=1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1}\fallingdotseq\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1-1)=1+\frac{1}{3}\times 0.1=1+\frac{1}{30}$$

問　例にならって、$\sqrt{1.1}$ を近似せよ。

< ロピタルの定理1 >

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分定数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

と書ける。ここで $f(a)=g(a)=0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

であるから、

$f(a)=g(a)=0$ のとき
$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(ロピタルの定理)

が成り立つ。

(注)　極限が $\dfrac{0}{0}$ の形になるときに、分母と分子を微分すればよい。
(実は極限が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になるときも同様な定理がなりたつ)

例　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=12$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{27x-81}=$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\log(x-4)}{x-5}=$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8-12(x-2)}{(x-2)^2}=$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}=$

＜ロピタルの定理２＞

例　極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$ を考える。

$x=a$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の形になるからロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\Big(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\Big)'}{\Big((x-a)^2\Big)'}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\Big(f'(x)-f'(a)\Big)'}{\Big(2(x-a)\Big)'}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

(注)　2 行目の式で $x=a$ を代入すると再び $\dfrac{0}{0}$ の形になるのでロピタルの定理をもう一度使っている。なお $f(a)$ や $f'(a)$ などの x のつかない項は全て定数と考える。すなわち $f(a)=C$, $f'(a)=K$ (C と K は定数) と考えて
$\big(f(a)\big)'=(C)'=0$
$\big(f'(a)(x-a)\big)'=\big(K(x-a)\big)'=K\times(x-a)'=K\times 1=K=f'(a)$

問　例のように、ロピタルの定理を何回か使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

＜関数の高次近似＞

例１ 前ページの例より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の２次式であるから、これを**２次近似式**という。

例２ 前ページの問 (1) の結果より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき}\quad \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)$$

より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき}\quad f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

が成り立つ。これを３次近似式という。

問 前ページの問 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の４次近似式を求めよ。

(解)

４次近似式

$x\fallingdotseq a$ のとき $f(x)\fallingdotseq$

＜ 高階微分係数 ＞

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x), f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における
n階微分係数という。

例　(1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、$x = 2$ における４階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80,\ f^{(2)}(2) = 160,\ f^{(3)}(2) = 240, f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \sin x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = \cos x,\ f^{(2)}(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$$
$$f^{(5)}(x) = f^{(1)}(x),\ f^{(6)}(x) = f^{(2)}(x),\ f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x),\ f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x)$$

より $x = 0$ における８階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 1,\ f^{(2)}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(0) = 1,\ f^{(6)}(0) = 0,\ f^{(7)}(0) = -1,\ f^{(8)}(0) = 0$$

問　(1) $f(x) = e^{2x}$ の４階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、$x = 0$ における
４階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^{2x}$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、$x = 0$ おける
n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \cos x$ の８階までの導関数 $\bigl(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)\bigr)$ を求め、
$x = 0$ における８階までの微分係数 $\bigl(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)\bigr)$ を求めよ。

＜ 関数の n 次近似 ＞

20 ページの結果から、関数 $f(x)$ の 4 次近似式は

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は、順に

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{24}\ ,\ \cdots$$

となるが、この分母の数は、19 ページの計算から、ロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり

$$\Big((x-a)^4\Big)'''' = \Big(4(x-a)^3\Big)''' = \Big(12(x-a)^2\Big)'' = \Big(24(x-a)\Big)' = 24$$

である。つまり $24 = 4\times 3\times 2\times 1$ であり、上の列を

$$\frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{2\times 1}\ ,\ \frac{1}{3\times 2\times 1}\ ,\ \frac{1}{4\times 3\times 2\times 1}\ ,\ \cdots$$

と考え、階乗の記号 $\Big(n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\Big)$
を使うと、

$$\frac{1}{1!}\ ,\ \frac{1}{2!}\ ,\ \frac{1}{3!}\ ,\ \frac{1}{4!}\ ,\ \cdots$$

となる。これより、n 次近似式は

$x \fallingdotseq a$ のとき

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

となる。

例　$f(x)=e^x$ のとき、$f^{(n)}(x)=e^x$ より、$f^{(n)}(2)=e^2$ である
から、$x \fallingdotseq 2$ における n 次近似式は

$x \fallingdotseq 2$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

問　$f(x)=e^x$ に対し、$x \fallingdotseq a$ における n 次近似式を求めよ。

< テーラー展開 >

関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても、n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**テーラー展開**という。

例　$f(x) = e^x$ に対し、$f^{(n)}(x) = e^x$、$f^{(n)}(2) = e^2$

であるから、$x=2$ におけるテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

問　a が以下の場合に $f(x) = e^x$ の $x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

(1) $a = 3$

$e^x =$

(2) $a = 0$

$e^x =$

< マクローリン展開 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー展開

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots}$$

を**マクローリン展開**という。

例 $f(x)=\sin x$ のとき、21 ページの例より

$$f^{(1)}(0)=1、f^{(2)}(0)=0、f^{(3)}(0)=-1、f^{(4)}(0)=0$$
$$f^{(5)}(0)=1、f^{(6)}(0)=0、f^{(7)}(0)=-1、f^{(8)}(0)=0$$

で、数列 $\left\{f^{(n)}(0)\right\}$ は、$1,0,-1,0$ を 4 項おきに繰り返す。

又、$f(0)=\sin 0=0$ だから、$f(x)=\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots$$

となる。

問 21 ページの結果を使って、$f(x)=\cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

＜近似の練習１＞

問１　$f(x)$ が以下の場合に、$x=a$ における一次近似式

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

を求め、さらに x と a が以下の場合の $f(x)$ の近似値を求めよ。

(1)　$f(x)=\sqrt{x}$

一次近似式 $x \fallingdotseq a$ のとき $\sqrt{x} \fallingdotseq$

$x=9.1,\ a=9$ のときの近似値 $\sqrt{9.1} \fallingdotseq$

(2)　$f(x)=\log x$

一次近似式 $x \fallingdotseq a$ のとき $\log x \fallingdotseq$

$x=1.1,\ a=1$ のときの近似値 $\log 1.1 \fallingdotseq$

問２　$f(x)$ が以下の場合に、$x=a$ における二次近似式

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を求めよ。

(1)　$f(x)=\sqrt{x}$

二次近似式 $x \fallingdotseq a$ のとき $\sqrt{x} \fallingdotseq$

(2)　$f(x)=\log x$

二次近似式 $x \fallingdotseq a$ のとき $\log x \fallingdotseq$

(3)　$f(x)=\sin x$

二次近似式 $x \fallingdotseq a$ のとき $\sin x \fallingdotseq$

＜近似の練習2＞

例1　e^x のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

より、ネピアの数 e の値を近似したい。$x = 1$ とおいて3次の項までで近似すると

$$e = e^1 \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \fallingdotseq 2.66$$

問1　e をマクローリン展開の5次の項までで近似せよ。

例2　$\cos x$ のマクローリン展開

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \cdots$$

より、$\cos 1$（1は角度1ラジアン $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$）を近似したい。

$x = 1$ とおいて、4次の項までで近似すると

$$\cos 1 \fallingdotseq 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \fallingdotseq 0.54$$

問2　$\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \cdots$$

より $\sin 1$ を近似したい。$x = 1$ とおいて3次の項までで近似せよ。

＜ 2変数関数 ＞

例 1. たて x_{cm}, よこ y_{cm} の長方形の面積を z_{cm^2} とすると、

$$z = x \times y$$

である。

2. 底面が半径 x_{cm} の円で、高さが y_{cm} の円柱の体積を z_{cm^3} とすると、

$$z = \pi x^2 y$$

である。

一般に 2 つの変数 x と y の値が与えられると、それに応じ、もう一つの変数 z の値が定まるとき、 z を x, y の関数と呼び、 1 変数の関数 $y = f(x)$ の場合にならって、

$$z = f(x, y)$$

のように書き表す。 x と y を**独立変数**、 z を**従属変数**という。

例 $f(x, y) = \pi x^2 y$ の場合、

$x = 1, y = 3$ のときの関数の値は $f(1, 3) = \pi \times 1^2 \times 3 = 3\pi$

$x = 2, y = 5$ のときの関数の値は $f(2, 5) = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$

問 $f(x, y)$ が以下の場合に、それぞれの関数の値を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $f(4, 3) =$

(2) $f(x, y) = \dfrac{x+2}{y-1}$, $f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) =$

(3) $f(x, y) = \sin x \log y$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}, e\right) =$

(4) $f(x, y) = x^y$, $f(2, -3) =$

＜ 偏導関数１ ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ と定数 b に対し、 $y = b$ のとき、 $F(x) = f(x,b)$ とおくと、 $F(x)$ は x の関数である。この導関数 $F'(x)$ を $f_x(x,b)$ と書く、すなわち

$$f_x(x,b) = F'(x) = \frac{d}{dx}f(x,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,b)-f(x,b)}{h}$$

である。

例　$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合

$y=0$ のとき　$f(x,0) = x^3$　より　$f_x(x,0) = (x^3)' = 3x^2$

$y=1$ のとき　$f(x,1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$　より

$$f_x(x,1) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)' = 3x^2 - 6x + 2$$

$y=2$ のとき　$f(x,2) = x^3 - 6x^2 + 8x - 32$　より

$$f_x(x,2) = (x^3 - 6x^2 + 8x - 32)' = 3x^2 - 12x + 8$$

一般に $y=b$ のとき　$f(x,b) = x^3 - 3bx^2 + 2b^2x - 4b^3$　より

$$f_x(x,b) = (x^3 - 3bx^2 + 2b^2x - 4b^3)' = 3x^2 - 6bx + 2b^2$$

問　2 変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合に $f(x,0), f(x,1), f(x,2), f(x,b)$ および $f_x(x,0), f_x(x,1), f_x(x,2), f_x(x,b)$ を求めよ。

(1) $f(x,y) = x + xy - y + 1$

$f(x,0) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,0) =$

$f(x,1) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,1) =$

$f(x,2) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,2) =$

$f(x,b) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,b) =$

(2) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^3 - 3y^4$

$f(x,0) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,0) =$

$f(x,1) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,1) =$

$f(x,2) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,2) =$

$f(x,b) =$　　　　　　　　　　$f_x(x,b) =$

＜ 偏導関数2 ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対して、 $y = b$ のとき、 x の関数 $f(x,b)$ の導関数は

$$f_x(x,b) = \frac{d}{dx}f(x,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,b)-f(x,b)}{h}$$

であった。この関数 $f_x(x,b)$ は定数 b によって変わる。すなわち、これを b の関数とみて、 b を変数 y に変えたもの、すなわち

$$\boxed{f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}$$

を $f(x,y)$ の**変数 x に関する偏導関数**という。

例 $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合、
$f(x,b) = x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3$ であるから、
$f_x(x,b) = (x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3)' = 3x^2 - 6xb + 2b^2$ より
$f_x(x,y) = 3x^2 - 6xy + 2y^2$ となる。

問 2 変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合に $f(x,b), f_x(x,b), f_x(x,y)$ を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^2 - 2x + 3xy + 4y^2 - 5y - 6$

$f(x,b) =$

$f_x(x,b) =$

$f_x(x,y) =$

(2) $f(x,y) = 7x^5 - 6x^4y + 5x^3y^3 + 4xy^5 - 3y^7$

$f(x,b) =$

$f_x(x,b) =$

$f_x(x,y) =$

＜ 偏導関数3 ＞

２変数関数　$z=f(x,y)$ と定数 a に対し, $x=a$ のとき,$G(y)=f(a,y)$ とおくと, $G(y)$ は y の関数である。この導関数 $G'(y)$ を $f_y(a,y)$ と書く。すなわち,

$$f_y(a,y)=G'(y)=\frac{d}{dy}f(a,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,y+h)-f(a,y)}{h}$$

である。

例　$f(x,y)=x^3-3x^2y+2xy^2-4y^3$　の場合

$x=0$ のとき　$f(0,y)=-4y^3$　より

$$f_y(0,y)=(-4y^3)'=-12y^2$$

$x=1$ のとき　$f(1,y)=1-3y+2y^2-4y^3$　より

$$f_y(1,y)=(1-3y+2y^2-4y^3)'=-3+4y-12y^2$$

$x=2$ のとき　$f(2,y)=8-12y+4y^2-4y^3$　より

$$f_y(2,y)=(8-12y+4y^2-4y^3)'=-12+8y-12y^2$$

$x=a$ のとき　$f(a,y)=a^3-3a^2y+2ay^2-4y^3$　より

$$f_y(a,y)=(a^3-3a^2y+2ay^2-4y^3)'=-3a^2+4ay-12y^2$$

問　2変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合に,$f(0,y), f(1,y), f(2,y), f(a,y)$ および $f_y(0,y), f_y(1,y), f_y(2,y), f_y(a,y)$ を求めよ。

(1) $f(x,y)=x+xy-y+1$

$f(0,y)=$　　　　$f_y(0,y)=$

$f(1,y)=$　　　　$f_y(1,y)=$

$f(2,y)=$　　　　$f_y(2,y)=$

$f(a,y)=$　　　　$f_y(a,y)=$

(2) $f(x,y)=x^3-2x^2y+xy^3-3y^4$

$f(0,y)=$　　　　$f_y(0,y)=$

$f(1,y)=$　　　　$f_y(1,y)=$

$f(2,y)=$　　　　$f_y(2,y)=$

$f(a,y)=$　　　　$f_y(a,y)=$

＜ 偏導関数4 ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対して, $x = a$ のとき,y の関数 $f(a,y)$ の導関数は

$$f_y(a,y) = \frac{d}{dy}f(a,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,y+h)-f(a,y)}{h}$$

であった。この関数 $f_y(a,y)$ は定数 a によって変わる。すなわち, これを a の関数とみて, a を変数 x に変えたもの, すなわち

$$\boxed{f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}}$$

を $f(x,y)$ の**変数 y に関する偏導関数**という。

例　$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$　の場合

$f(a,y) = a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3$　であるから,

$f_y(a,y) = (a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3)' = -3a^2 + 4ay - 12y^2$　より

$f_y(x,y) = -3x^2 + 4xy - 12y^2$　となる。

問　2 変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合に,$f(a,y), f_y(a,y), f_y(x,y)$ を求めよ。

(1)　$f(x,y) = x^2 - 2x + 3xy + 4y^2 - 5y - 6$

$f(a,y) =$

$f_y(a,y) =$

$f_y(x,y) =$

(2)　$f(x,y) = 7x^5 - 6x^4y + 5x^3y^3 + 4xy^5 - 3y^7$

$f(a,y) =$

$f_y(a,y) =$

$f_y(x,y) =$

< 偏微分 1 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めることを、**x について偏微分する**という。

偏導関数の定義

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

から、

$\boxed{x \text{ について偏微分}} = \boxed{y \text{ を定数と考え、} x \text{ だけについて微分する}}$

といえる。

例　$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$　のとき

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x^3)' - 3 \times (x^2)' \times y + 2 \times (x)' \times y^2 - 4y^3 \times (1)' \\ &= 3x^2 - 3 \times 2x \times y + 2 \times 1 \times y^2 - 4y^3 \times 0 \\ &= 3x^2 - 6xy + 2y^2 \end{aligned}$$

(注)　x について偏微分するとき、x のつかない項 (y だけの項) は、
偏微分すると 0 になる。

問　次の関数を x について偏微分せよ。

(1)　$f(x, y) = 3x^2 - x + 2xy + 5y^2 - 6y + 4$

$f_x(x, y) =$

(2)　$f(x, y) = x^5 + 5x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 + 6xy^4 + 7y^6$

$f_x(x, y) =$

(3)　$f(x, y) = e^{2x} - \cos x \sin(2y) + 3x \log y - \dfrac{x^2}{y}$

$f_x(x, y) =$

< 偏微分 2 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めることを、**y について偏微分する**という。

偏導関数の定義

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

から、

$$\boxed{y \text{ について偏微分}} = \boxed{x \text{ を定数と考え、} y \text{ だけについて微分する}}$$

といえる。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$　のとき

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^3 \times (1)' - 3x^2 \times (y)' + 2x \times (y^2)' - 4 \times (y^3)' \\ &= x^3 \times 0 - 3x^2 \times 1 + 2x \times 2y - 4 \times 3y^2 \\ &= -3x^2 + 4xy - 12y^2 \end{aligned}$$

(注) y について偏微分するとき、y のつかない項 (x だけの項) は、
偏微分すると 0 になる。

問 次の関数を y について偏微分せよ。

(1) $f(x, y) = 3x^2 - x + 2xy + 5y^2 - 6y + 4$

$f_y(x, y) =$

(2) $f(x, y) = x^5 + 5x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 + 6xy^4 + 7y^6$

$f_y(x, y) =$

(3) $f(x, y) = e^{2x} - \cos x \sin(2y) + 3x \log y - \dfrac{x^2}{y}$

$f_y(x, y) =$

＜偏微分３＞

２変数関数 $z=f(x,y)$ に対し、x に関する偏導関数を

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

等の記号で表わす (すべて同じ意味である)。ここで記号 ∂ はデルとかラウンドディーなどと呼ばれる。
同様にして、$z=f(x,y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

などの記号で表わす。

(注) １変数関数 $y=f(x)$ の微分の場合は $\dfrac{dy}{dx}$ の記号を使うが、２変数以上の関数の偏微分の場合は、$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ のように、d のかわりに ∂ を用いる。

例

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^n)=nx^{n-1}$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^n)=0$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(y^n)=0$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(y^n)=ny^{n-1}$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos x\sin y)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\cos x\right)\times\sin y=-\sin x\sin y$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos x\sin y)=\cos x\times\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\sin y\right)=\cos x\cos y$

(4) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)=\sqrt{y}\times\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\dfrac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}$

問　次の偏導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3-x^2y^2+3xy^5)$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3-x^2y^2+3xy^5)$

$=$　　　　$=$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x-1}{2y}\right)=$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x-1}{2y}\right)=$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(\dfrac{1}{y}\right)^{2x}\right)=$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(\dfrac{1}{y}\right)^{2x}\right)=$

＜ 偏微分４ ＞

２変数関数 f と １変数関数 g との合成関数

$$z = g\Big(f(x,y)\Big)$$

を偏微分する場合、

$u = f(x,y)$ とおくと、 $z = g(u)$

より、 1 変数関数の合成関数の微分と同じように、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ。

例 $z = \sin(x^2 + 3xy)$ の場合、
$u = x^2 + 3xy$ とおくと $z = \sin u$
となるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} &= (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (2x + 3y) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times (2x + 3y) = (2x + 3y)\cos(x^2 + 3xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} &= (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (3x) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times 3x = 3x\cos(x^2 + 3xy)\end{aligned}$$

問 次の関数を偏微分せよ。

(1) $z = (2x + y^2)^5$,　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　　　　　　　,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(2) $z = \sqrt{1 - 2x + 3y^2}$,　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　　　　　　　,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(3) $z = e^{3x - y^2}$,　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　　　　　　　,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(4) $z = \log\Big(1 - \sin x \cos(2y)\Big)$,　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　　　　　　　,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

＜ 偏微分５ ＞

偏導関数の記号に慣れる練習をする。

例 (1) $f(x,y)=x^3-5xy^2+y^4$ のとき、

$$f_x(x,y)=3x^2-5y^2 \ , \quad f_y(x,y)=-10xy+4y^3$$

(2) $z=e^{x+3y}$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3e^{x+3y}$$

(3) $z=\log(1+x^2+y^4)$ のとき、

$$z_x=\frac{2x}{1+x^2+y^4}, \quad z_y=\frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$$

問 以下の偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^5-x^4y+2x^2y^3-7y^4$ のとき、

$f_x(x,y)=$ 　　　　　　　　, $f_y(x,y)=$

(2) $f(x,y)=\cos(5x-y^2)$ のとき、

$f_x(x,y)=$ 　　　　　　　　, $f_y(x,y)=$

(3) $z=\dfrac{1}{xy-2y^3}$ のとき、

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ 　　　　　　　　, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{2xy-y^2}}$ のとき、

$z_x=$ 　　　　　　　　, $z_y=$

(5) $z=e^{3y-xy^2+y^3}$ のとき、

$z_x=$ 　　　　　　　　, $z_y=$

＜ 2階偏導関数1 ＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ を x に関して 2 回偏微分したもの、
すなわち $f_x(x, y)$ の x に関する偏導関数を

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}z\Big) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_x(x, y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(f(x, y)\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 f(x, y)$$

等の記号で表し、 x に関する 2 **階偏導関数**という。全て同じ意味である
同様に、 $z = f(x, y)$ を y に関して 2 回偏微分したもの、
すなわち $f_y(x, y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial y}z\Big) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_y(x, y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(f(x, y)\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(x, y)$$

等の記号で表し、 y に関する 2 階偏導関数という。全て同じ意味である

例 (1) $f(x, y) = x^5 - 4x^3y^2 + 2xy^3 - y^6$ のとき

$f_x(x, y) = 5x^4 - 12x^2y^2 + 2y^3$, $f_y(x, y) = -8x^3y + 6xy^2 - 6y^5$
より
$f_{xx}(x, y) = 20x^3 - 24xy^2$, $f_{yy}(x, y) = -8x^3 + 12xy - 30y^4$

(2) $z = \sin(2x + 3y)$ のとき
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$
より
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\sin(2x + 3y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9\sin(2x + 3y)$

問 2 変数関数が以下の場合に、次の 2 階偏導関数を求めよ。
(1) $f(x, y) = x^5 - 2x^4y + 3x^2y^2 + 4y^4$

$f_{xx}(x, y) =$, $f_{yy}(x, y) =$

(2) $z = \cos(2x)\sin(y^2)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$

＜ 2階偏導関数2 ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し、 x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ をさらに y に関して偏微分したものを

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x(x,y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big(f(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

等の記号で表す。同様に、 $z = f(x,y)$ の y に関する偏導関数 $f_y(x,y)$ をさらに x に関して偏微分したものを

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x,y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(f(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

等の記号で表す。

(注)　 $z_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ の x のように、 z(又は f) に近い方の変数が先に偏微分する変数である。

例　(1) $f(x,y) = x^6 - 5x^4y + 3x^2y^3 - 5y^4$ のとき

$f_x(x,y) = 6x^5 - 20x^3y + 6xy^3$

より　$f_{xy}(x,y) = -20x^3 + 18xy^2$

$f_y(x,y) = -5x^4 + 9x^2y^2 - 20y^3$

より $f_{yx}(x,y) = -20x^3 + 18xy^2$

(2) $z = \log(x^2 + 3y^2)$ のとき

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+3y^2}$　より　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\dfrac{12xy}{(x^2+3y^2)^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6y}{x^2+3y^2}$　より　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{12xy}{(x^2+3y^2)^2}$

(注)　$f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ が連続の場合には、両者は等しい。

問　2 変数関数が以下の場合に、次の 2 階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^5 - 2x^4y + 3x^2y^2 + 4y^4$

$f_{xy}(x,y) =$　　　　　　　　　　　　　, $f_{yx}(x,y) =$

(2) $z = \cos(2x)\sin(y^2)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$　　　　　　　　　　　　　, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

< 偏微分係数 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_x(a, b)$ を、**点 (a, b) における x に関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}}$$

である。同様に y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_y(a, b)$ を、**点 (a, b) における y に関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}}$$

となる。

例　$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3$ のとき

$$f_x(x, y) = 2x - 4y \ , \ f_y(x, y) = -4x + 3y^2$$

より $(x, y) = (1, 3)$ における偏微分係数は、

$f_x(1, 3) = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10$, $f_y(1, 3) = -4 \times 1 + 3 \times 3^2 = 23$

である。

問　2 変数関数が以下の場合に偏導関数および偏微分係数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 3y^4$

$f_x(x, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(x, y) =$

$f_x(2, 1) =$ 　　　　　　　　, $f_y(2, 1) =$

(2) $f(x, y) = \cos x \sin(2y)$

$f_x(x, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(x, y) =$

$f_x\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) =$ 　　　　　　　　, $f_y\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) =$

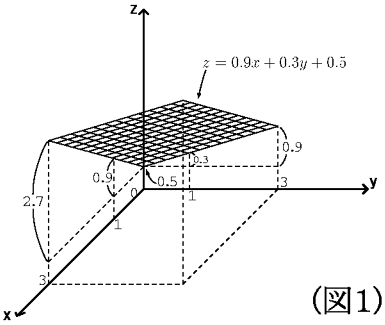
(3) $f(x, y) = 2x \log(y^3)$

$f_x(x, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(x, y) =$

$f_x(1, 1) =$ 　　　　　　　　, $f_y(1, 1) =$

＜ 2変数関数のグラフ ＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。
とくに $f(x, y)$ が x と y の一次式の場合は
平面を表す。



(図1)

例 1　$f(x, y) = 0.9x + 0.3y + 0.5$
の場合、$z = f(x, y)$ のグラフは図 1 のように

x 軸方向の傾きが 0.9
y 軸方向の傾きが 0.3
z 切片が 0.5

の平面を表す。

問 1　$f(x, y)$ が以下の場合に、$z = f(x, y)$ の表す平面について、
x 軸方向の傾き、y 軸方向の傾き、z 切片を答えよ。

(1)　$f(x, y) = 2x - y + 3$

x 軸方向の傾き＝
y 軸方向の傾き＝
z 切片＝

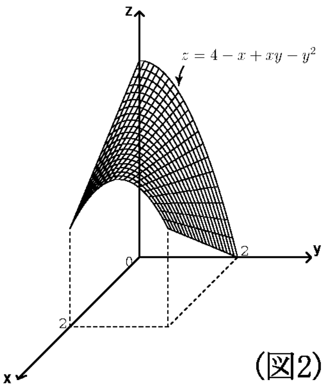
(2)　$f(x, y) = mx + ny + k$

x 軸方向の傾き＝
y 軸方向の傾き＝
z 切片＝

例　2 変数関数 $z = f(x, y)$ が

$$f(x, y) = 4 - x + xy - y^2$$

の場合、$z = f(x, y)$ のグラフは図 2 のような場合である。
この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 L_a とし、又平面 $y = b$ との共通部分を曲線 ℓ_b とする。(図 3)

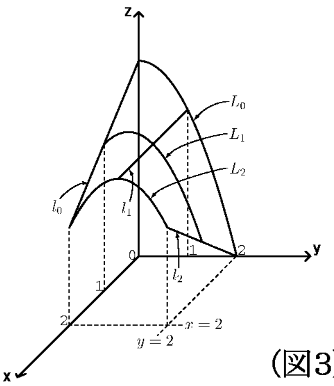


(図2)

(1)　$x = 0$ のとき、$f(0, y) = 4 - y^2$ より
曲線 L_0 の方程式は
$x = 0,\ z = 4 - y^2$　　である。

(2)　$x = 1$ のとき、$f(1, y) = 3 + y - y^2$ より
曲線 L_1 の方程式は
$x = 1,\ z = 3 + y - y^2$　　である。

(3)　$y = 0$ のとき、$f(x, 0) = 4 - x$ より
曲線 ℓ_0 の方程式は
$y = 0,\ z = 4 - x$　　となり、
直線であることがわかる。



(図3)

問 2　例 2 の場合に曲線 ℓ_1, ℓ_2, L_2 の方程式を求めよ。

(1) ℓ_1 の方程式
$y =$
$z =$

(2) ℓ_2 の方程式
$y =$
$z =$

(3) L_2 の方程式
$x =$
$z =$