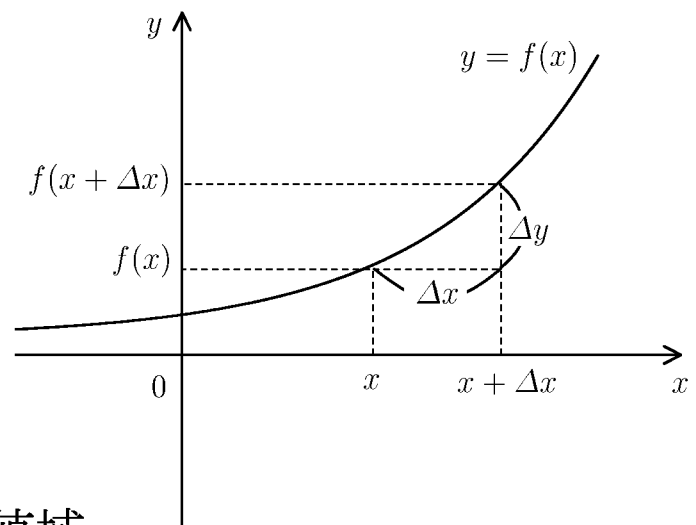


高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2001年度版)
秋期入学者用
IV

内容

- ◎ 合成関数の微分
- ◎ 置換積分
- ◎ 積・商の微分
- ◎ 部分積分
- ◎ 関数の定義域と値域



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜ 微分・不定積分の練習 ＞

問1 次の導関数を求めよ。

(1) $(3)'$

(2) $(x^2)'$

(3) $(x^n)'$

(4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$

(5) $\left(\frac{1}{x^5}\right)'$

(6) $(\sqrt{x})'$

(7) $(\sqrt[5]{x})'$

(8) $(\sqrt[6]{x^9})'$

(9) $(x^2\sqrt{x})'$

(10) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

(11) $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)'$

(12) $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

(13) $(3^x)'$

(14) $(e^x)'$

(15) $(\log x)'$

(16) $(\sin x)'$

(17) $(\cos x)'$

(18) $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'$

(19) $(9x^4 + 8x^3 - 7x + 6)'$

(20) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)'$

(21) $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$

(22) $(2e^x - \log x)'$

(23) $(\cos x - 2\sin x)'$

(24) $\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right)'$

問2 次の不定積分を求めよ。(ただし $\int dx = \int 1dx$)

(1) $\int dx$

(2) $\int x^2 dx$

(3) $\int x^n dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2} dx$

(5) $\int \frac{1}{x^3} dx$

(6) $\int \sqrt{x} dx$

(7) $\int \sqrt[4]{x} dx$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

(10) $\int 2^x dx$

(11) $\int e^x dx$

(12) $\int \frac{1}{x} dx$

(13) $\int \cos x dx$

(14) $\int \sin x dx$

(15) $\int (x+1)(x-1) dx$

(16) $\int (\cos x - 2\sin x + 3e^x) dx$

(17) $\int \left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) dx$

< 定積分の練習 >

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{定積分})$$

問1 定数 a, b に対し以下の定積分の値を上の $F(b) - F(a)$ の形にせよ。

$$\left(\text{ただし } n \neq -1, \quad \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$(1) \int_a^b dx = \int_a^b 1dx =$$

$$(2) \int_a^b x^n dx =$$

$$(3) \int_a^b \frac{1}{x} dx =$$

$$(4) \int_a^b e^x dx =$$

$$(5) \int_a^b \cos x dx =$$

$$(6) \int_a^b \sin x dx =$$

問2 以下の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_5^6 dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 (x^6 + x^5) dx$$

$$(3) \int_3^7 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(4) \int_3^6 \frac{1}{x^4} dx$$

$$(5) \int_2^3 \sqrt{x} dx$$

$$(6) \int_1^{16} \sqrt[4]{x} dx$$

$$(7) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(8) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$(9) \int_3^9 \frac{2}{x} dx$$

$$(10) \int_0^1 e^x dx$$

$$(11) \int_{-1}^2 3e^x dx$$

$$(12) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$(13) \int_0^\pi 2 \sin x dx$$

$$(14) \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 3 \cos x dx$$

< 合成関数 >

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これらの関数を $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数という。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 5x + 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^3 + 3$, $g(x) = \log_3 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例 2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。
たとえば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x, \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問 2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = \tan(x - 2)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = (x^2 - 1)^2(x^2 - 1)$, $f(x) =$, $g(x) =$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限でもあるから、導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す（全て同じ意味である）。 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{df}{dx}$ 等の記号は、変数

が x である関数の導関数（ x についての微分）であることを明記するためにある。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\frac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 + 1$ $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = 1 - 4.9t$ $\frac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = t^2 + 2t$ $\frac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\frac{dS}{dr} =$

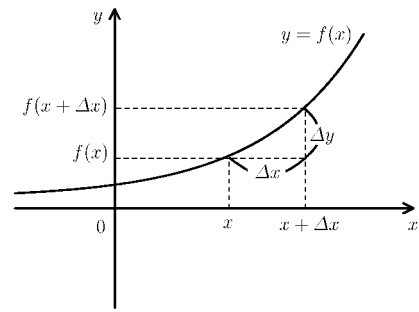
(5) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dr} =$

< 増分記号 Δ (デルタ) >

関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、 y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \rightarrow 0$ のときの平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\frac{dy}{dx}$ と書く。



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限值を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

< 合成関数の微分 1 >

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad (= \sin((x + \Delta x)^3) - \sin(x^3))$$

とおくと、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ だから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \right) \\ &= (\sin u)' \times (x^3)' \\ &= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3) \end{aligned}$$

問 関数 $y = \cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^4$ とおくと、 $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^4 - x^4$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\frac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 2 >

問1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき、 $\frac{dy}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ を、 $\frac{dy}{du} \left(= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right)$ と $\frac{du}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$ で表せ。

(答) $\frac{dy}{dx} =$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (x^3 + 5x^2)' = 7u^6 \times (3x^2 + 10x) = 7(x^3 + 5x^2)^6 (3x^2 + 10x)$$

問2 次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (2x^2 - x + 1)^4$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - x^3)$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 3 >

例 1 $y = (x^3 + 4x)^7$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = u^7$ より

$$\left((x^3 + 4x)^7 \right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (x^3 + 4x)' = 7(x^3 + 4)^6(3x^2 + 4)$$

例 2 $y = (f(x))^7$ を考える。 $u = f(x)$ とおくと $y = u^7$ より

$$\left((f(x))^7 \right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (f(x))' = 7u^6 \times f'(x) = 7(f(x))^6 \times f'(x)$$

例 3 $y = (f(x))^n$ を考える。 $u = f(x)$ とおくと $y = u^n$ より

$$\left((f(x))^n \right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^n)' \times (f(x))' = nu^{n-1} \times f'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

よって

$$\boxed{\left((f(x))^n \right)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)}$$

が成り立つ。

例 4 $\left((x^5 + 6x)^8 \right)' = 8(x^5 + 6x)^7 \times (x^5 + 6x)' = 8(x^5 + 6x)^7 \times (5x^4 + 6)$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\left((x-1)^7 \right)' =$ (2) $\left((3x^2+1)^3 \right)' =$ (3) $\left((2x^3-x^4)^{10} \right)' =$

(4) $\left((x-2\cos x)^2 \right)' =$ (5) $\left((x^2+2e^x)^3 \right)' =$ (6) $\left((e^x - \log x)^5 \right)' =$

例 5 $\left(\frac{1}{(x^5 + 6x)^2} \right)' = \left((x^5 + 6x)^{-2} \right)' = -2(x^5 + 6x)^{-3} \times (x^5 + 6x)' = -\frac{2(5x^4 + 6)}{(x^5 + 6x)^3}$

問 2 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\frac{1}{(x^3 - x^2)^3} \right)' =$ (2) $\left(\frac{1}{x^2 - x} \right)' =$

(3) $\left(\frac{1}{(1 + 3\sin x)^4} \right)' =$ (4) $\left(\frac{1}{(1 - \log x)^2} \right)' =$

< 合成関数の微分 4 >

前ページより

$$\boxed{\left((f(x))^n \right)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)}$$

であった。ここで n は分数の場合でも成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \left(\sqrt[3]{(x^6 + 7x)^4} \right)' &= \left((x^6 + 7x)^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{4}{3}(x^6 + 7x)^{\frac{4}{3}-1} \times (x^6 + 7x)' \\ &= \frac{4}{3}(x^6 + 7x)^{\frac{1}{3}} \times (6x^5 + 7) = \frac{4}{3}(6x^5 + 7)\sqrt[3]{x^6 + 7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \left((1 + \cos x)\sqrt{1 + \cos x} \right)' &= \left((1 + \cos x)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2}(1 + \cos x)^{\frac{3}{2}-1} \times (1 + \cos x)' \\ &= \frac{3}{2}(1 + \cos x)^{\frac{1}{2}} \times (-\sin x) = -\frac{3}{2}\sin x\sqrt{1 + \cos x} \end{aligned}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

$$(1) \left(\sqrt[5]{(2x+3)^2} \right)' = \qquad (2) \left(\sqrt{(x-2x^2)^3} \right)' =$$

$$\begin{aligned} \text{例 3} \quad \left(\sqrt{5x-7} \right)' &= \left((5x-7)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}(5x-7)^{\frac{1}{2}-1} \times (5x-7)' = \frac{1}{2}(5x-7)^{-\frac{1}{2}} \times 5 \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{(5x-7)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 4} \quad \left(\sqrt[3]{1+e^x} \right)' &= \left((1+e^x)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}(1+e^x)^{\frac{1}{3}-1} \times (1+e^x)' = \frac{1}{3}(1+e^x)^{-\frac{2}{3}} \times e^x \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1+e^x)^{\frac{2}{3}}} \times e^x = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}} \end{aligned}$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(1) \left(\sqrt{2x^3 + 3x^2} \right)' \qquad (2) \left(\sqrt[5]{x - 2\cos x} \right)'$$

= \qquad =

$$\begin{aligned} \text{例 5} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x^4 + 5x}} \right)' &= \left((x^4 + 5x)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2}(x^4 + 5x)^{-\frac{1}{2}-1} \times (x^4 + 5x)' \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^4 + 5x)^{\frac{3}{2}}} \times (4x^3 + 5) = -\frac{4x^3 + 5}{2(x^4 + 5x)\sqrt{x^4 + 5x}} \end{aligned}$$

問 3 次の導関数を求めよ。

$$(1) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \right)' \qquad (2) \left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} \right)'$$

= \qquad =

< 合成関数の微分 5 >

例 1 $y = \cos(x^3 + 4x)$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = \cos u$ より

$$\begin{aligned} (\cos(x^3 + 4x))' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\cos u)' \times (x^3 + 4x)' = -\sin(u) \times (3x^2 + 4) \\ &= -\sin(x^3 + 4x) \times (3x^2 + 4) = -(3x^2 + 4) \sin(x^3 + 4x) \end{aligned}$$

一般に $\boxed{(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 1 次の導関数を求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) (\cos(2x + 1))' & (2) (\cos(x^2 + 2x + 5))' \\ = & = \end{array}$$

例 2 $y = \sin(x^3 + 4x)$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\begin{aligned} (\sin(x^3 + 4x))' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times (x^3 + 4x)' = \cos(u) \times (3x^2 + 4) \\ &= (3x^2 + 4) \cos(x^3 + 4x) \end{aligned}$$

一般に $\boxed{(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 2 次の導関数を求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) (\sin(1 - x))' & (2) (\sin(x^4 - 2x^2 - 3))' \\ = & = \end{array}$$

例 3 $y = e^{x^3+4x}$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = e^u$ より

$$(e^{x^3+4x})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times (x^3 + 4x)' = e^u \times (3x^2 + 4) = (3x^2 + 4) e^{x^3+4x}$$

一般に $\boxed{(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 3 次の導関数を求めよ。

$$(1) (e^{x^2})' = \quad (2) (e^{2x-x^2})' =$$

$$(3) (e^{\frac{x}{2}})' = \quad (4) (e^{x+\frac{1}{x}})' =$$

< 合成関数の微分 6 >

例 関数 $y = \log(x^2 + 3x + 4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2 + 3x + 4$ とおくと $y = \log u$ となる。

合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log u)' \times (x^2 + 3x + 4)' \\ &= \frac{1}{u} \times (2x + 3) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

問 1 例にならって、次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^4 - x^2 - 1)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \log(1 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(3) $y = \log(x - e^x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

問 2 上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し
合成関数 $y = \log(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = (\log(f(x)))'$ を
 $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)

$$(\log(f(x)))' =$$

< 合成関数の微分 7 >

微分の公式

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}} \quad , \quad \boxed{(e^x)' = e^x} \quad , \quad \boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \quad , \quad \boxed{(\sin x)' = \cos x} \quad , \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

に対し、 x を $f(x)$ でおきかえた合成関数の微分の公式は

$$\boxed{\left((f(x))^n\right)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)} \quad , \quad \boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \times f'(x)} \quad , \quad \boxed{\left(\log(f(x))\right)' = \frac{1}{f(x)} \times f'(x)}$$

$$\boxed{\left(\sin(f(x))\right)' = \cos(f(x)) \times f'(x)} \quad , \quad \boxed{\left(\cos(f(x))\right)' = -\sin(f(x)) \times f'(x)}$$

となる。

例 1 (1) $\left((3x+4)^7\right)' = 7(3x+4)^6 \times (3x+4)' = 21(3x+4)^6$

(2) $\left((ax+b)^7\right)' = 7(ax+b)^6 \times (ax+b)' = 7a(ax+b)^6$

この例より定数 a, b と有理数 n に対し

$$\boxed{\left((ax+b)^n\right)' = na(ax+b)^{n-1}}$$

がわかる。

問 1 定数 a, b に対し次の導関数を求めよ。

(1) $\left(e^{ax+b}\right)' =$ (2) $\left(\log(ax+b)\right)' =$

(3) $\left(\sin(ax+b)\right)' =$ (4) $\left(\cos(ax+b)\right)' =$

例 2 (1) $\left(\frac{1}{21}(3x+4)^7\right)' = \frac{1}{21} \times \left((3x+4)^7\right)' = \frac{1}{21} \times 21(3x+4)^6 = (3x+4)^6$

(2) $\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = \frac{1}{2} \times (e^{2x+1})' = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1} = e^{2x+1}$

問 2 定数 a, b ($a \neq 0$) と有理数 n ($n \neq -1$) に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\frac{1}{7a}(ax+b)^7\right)' =$ (2) $\left(\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}\right)' =$

(3) $\left(\frac{1}{a}e^{ax+b}\right)' =$ (4) $\left(\frac{1}{a}\log(ax+b)\right)' =$

(5) $\left(\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right)' =$ (6) $\left(\frac{1}{a}\cos(ax+b)\right)' =$

< 対数微分法 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (11 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) 両辺の自然対数をとってから微分する方法を対数微分法という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。
(解)

問 2 例と問 1 の結果を使って、一般の正数 ($a > 0$) に対する指数関数 $y = a^x$ の導関数 $y' = (a^x)'$ を類推せよ。

(答) $(a^x)' =$

問 3 $a = e$ (ネピア数) のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

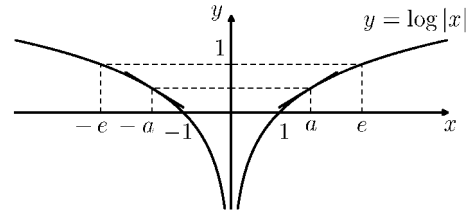
< $\log |x|$ の微分 >

例 1 関数 $y = \log |x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a > 0$ に対し

$$\log |-a| = \log a = \log |a|$$

より、 $y = \log |x|$ のグラフは右図の
ように y 軸対称となる。

この導関数は



(1) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

(2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $y' = (\log |x|)' = (\log(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

(1), (2) より $x \neq 0$ のとき

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

となる。

例 2 関数 $y = \log |\cos x|$ を微分したい。

$$u = \cos x \quad \text{とおくと} \quad y = \log |u|$$

より合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log |u|)' \times (\cos x)' = \frac{1}{u} \times (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \log |\sin x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log |3x^2 - x + 2|$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log |f(x)|$, $\frac{dy}{dx} =$

< 不定積分の練習 1 >

微分と不定積分は逆演算である。すなわち

$$F'(x) = f(x) \text{ (微分)} \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \text{ (不定積分)}$$

問 1 次の微分の式を不定積分の式に変えよ。

$$(1) (x^n)' = nx^{n-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(2) (e^x)' = e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$(3) (\log x)' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$(4) (\sin x)' = \cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$(5) (\cos x)' = -\sin x \quad \Leftrightarrow$$

例 1 $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1}$ より $\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = \frac{1}{2} \times (2e^{2x+1}) = e^{2x+1}$ であるから

$$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

例 2 $(\sin(3x+4))' = 3\cos(3x+4)$ より $\left(\frac{1}{3}\sin(3x+4)\right)' = \frac{1}{3} \times (3\cos(3x+4)) = \cos(3x+4)$ であるから

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$$

問 2 次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

$$(1) \left(\frac{1}{5}e^{5x-1}\right)' = \quad \Leftrightarrow \int e^{5x-1}dx =$$

$$(2) \left(\frac{1}{3}\sin(3x+2)\right)' = \quad \Leftrightarrow \int \cos(3x+2)dx =$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\log(2x-1)\right)' = \quad \Leftrightarrow \int \frac{1}{2x-1}dx =$$

$$(4) (\sqrt{2x+1})' = \quad \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx =$$

問 3 定数 a, b ($a \neq 0$) に対し、次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{ax+b}dx = \quad (2) \int \cos(ax+b)dx =$$

$$(3) \int \frac{1}{ax+b}dx = \quad (4) \int \sin(ax+b)dx =$$

< 不定積分の練習 2 >

問 1 次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

$$(1) \left(\frac{1}{7}x^7\right)' = \Leftrightarrow \int x^6 dx =$$

$$(2) \left(\frac{1}{21}(3x+5)^7\right)' = \Leftrightarrow \int (3x+5)^6 dx =$$

$$(3) \left(\frac{1}{7a}(ax+b)^7\right)' = \Leftrightarrow \int (ax+b)^6 dx =$$

$$(4) \left(\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}\right)' = \Leftrightarrow \int (ax+b)^n dx =$$

例 (1) $\int (5x-3)^8 dx = \frac{1}{(8+1) \times 5} (5x-3)^{8+1} + C = \frac{1}{45} (5x-3)^9 + C$

(2) $\int \sqrt{7x+4} dx = \int (7x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{(\frac{1}{2}+1) \times 7} (7x+4)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{21} (7x+4) \sqrt{7x+4} + C$

(3) $\int \frac{1}{(5x+7)^3} dx = \int (5x+7)^{-3} dx = \frac{1}{(-3+1) \times 5} (5x+7)^{-3+1} + C = \frac{1}{-10} (5x+7)^{-2} + C$
 $= -\frac{1}{10} \times \frac{1}{(5x+7)^2} + C = -\frac{1}{10(5x+7)^2} + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (x+1)^2 dx \qquad (2) \int (1-2x)^4 dx$$

$$(3) \int \sqrt{3x-2} dx \qquad (4) \int \sqrt[4]{3-x} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{(x+2)^2} dx \qquad (6) \int \frac{1}{\sqrt{2-4x}} dx$$

問 3 前ページ問 3 の結果を利用して次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{1-x} dx \qquad (2) \int \cos(2x+3) dx$$

$$(3) \int \frac{1}{3x+4} dx \qquad (4) \int \sin(5-6x) dx$$

< 合成関数の不定積分 1 >

例 1 14 ページの結果より

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{微分})$$

となる。これを不定積分の形にすると

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad (\text{不定積分})$$

となる。

問 1 左の微分の式を不定積分の式に変えよ。

(微分)

(不定積分)

$$(1) (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(2) (\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(3) (\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

例 2 (1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \int \frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x} dx = \log|x^2+3x| + C$

(2) $\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^{x^3+1} \times (x^3+1)' dx = e^{x^3+1} + C$

(3) $\int (-2x+1) \sin(x^2-x) dx = \int \{-\sin(x^2-x)\} \times (x^2-x)' dx = \cos(x^2-x) + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2} dx$

(2) $\int (3x^2+2)e^{x^3+2x} dx$

(3) $\int (x-1)e^{\frac{x^2}{2}-x} dx$

(4) $\int 3x^2 \cos(x^3-2) dx$

(5) $\int (x-2x^2) \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right) dx$

(6) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

< 合成関数の不定積分 2 >

例 1 (1) $((x^3 + 4x^2)^7)' = 7(x^3 + 4x^2)^6 \times (x^3 + 4x^2)' = 7(x^3 + 4x^2)^6(3x^2 + 8x)$

これを不定積分の形にすると

$$\int 7(x^3 + 4x^2)^6(3x^2 + 8x)dx = (x^3 + 4x^2)^7 + C$$

(2) $((f(x))^7)' = 7(f(x))^6 \times f'(x) \iff \int 7(f(x))^6 \times f'(x)dx = (f(x))^7 + C$

(3) $\left(\frac{1}{7}(f(x))^7\right)' = \frac{1}{7} \times ((f(x))^7)' = (f(x))^6 \times f'(x) \iff \int (f(x))^6 \times f'(x)dx = \frac{1}{7}(f(x))^7 + C$

問 1 次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

(1) $\left(\frac{1}{8}(f(x))^8\right)' = \iff \int (f(x))^7 \times f'(x)dx =$

(2) $\left(\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}\right)' = \iff \int (f(x))^n \times f'(x)dx =$

(注) 問 1 (2) の不定積分の式は $\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$ を拡張したものである。

例 2 (1) $\int (x^2 + 3x)^6(2x + 3)dx = \int (x^2 + 3x)^6 \times (x^2 + 3x)' dx = \frac{1}{7}(x^2 + 3x)^7 + C$

(2) $\int (3x^2 + 4)\sqrt{x^3 + 4x}dx = \int (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}} \times (x^3 + 4x)' dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1}(x^3 + 4x)^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{2}{3}(x^3 + 4x)\sqrt{x^3 + 4x} + C$

(3) $\int \frac{4x^3 - 3}{(x^4 - 3x)^2} dx = \int (x^4 - 3x)^{-2} \times (x^4 - 3x)' dx = \frac{1}{-2 + 1}(x^4 - 3x)^{-2 + 1} + C = -\frac{1}{x^4 - 3x} + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 6(x^4 - 3x)^5(4x^3 - 3)dx$

(2) $\int (3x^2 - 1)\sqrt{x^3 - x} dx$

(3) $\int (2x - 5)\sqrt[3]{x^2 - 5x} dx$

(4) $\int \frac{4x^3 - 6x}{(x^4 - 3x^2)^3} dx$

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 4}} dx$

(6) $\int (1 - \sin x)^4 \cos x dx$

< 合成関数の定積分 >

例1 15 ページの結果より定数 a, b, n ($a \neq 0, n \neq -1$) に対して

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad , \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log|ax+b| + C \quad , \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax+b)^{n+1} + C$$

が成り立つ。

例2 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x+\pi) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x+\pi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \pi\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi) = -\frac{1}{3}$

(2) $\int_0^2 \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{3(3x+1)} \right]_0^2 = -\frac{1}{3(6+1)} + \frac{1}{3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

(3) $\int_0^2 \frac{1}{4x+1} dx = \left[\frac{1}{4} \log|4x+1| \right]_0^2 = \frac{1}{4} \log 9 - \frac{1}{4} \log 1 = \frac{1}{4} \log 9$

(4) $\int_0^1 \sqrt{5x+4} dx = \left[\frac{2}{15} (5x+4) \sqrt{5x+4} \right]_0^1 = \frac{2}{15} \times 9\sqrt{9} - \frac{2}{15} \times 4\sqrt{4} = \frac{38}{15}$

問1 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx$

(2) $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) dx$

(3) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

(4) $\int_0^2 e^{1-x} dx$

(5) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1} dx$

(6) $\int_1^3 \frac{1}{(5x-3)} dx$

17 ページ, 18 ページの結果より以下の式がなりたつ。

$$\int e^{f(x)} \times f'(x) dx = e^{f(x)} + C \quad , \quad \int \cos(f(x)) dx = \sin(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C \quad , \quad \int \sin(f(x)) \times f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int (f(x))^n \times f'(x) dx = \frac{1}{(n+1)} (f(x))^{n+1} + C$$

問2 17 ページ, 18 ページを参考にして, 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 \frac{6x^2+3}{2x^3+3x+1} dx$

(2) $\int_0^1 (x^2+2x)^3(2x+2) dx$

(3) $\int_0^1 (6x-2)\sqrt{3x^2-2x} dx$

(4) $\int_0^2 \frac{5-3x^2}{(5x-x^3)^2} dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \square dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。
変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t) \text{ のとき } \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

$$\text{例 1 } \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \text{ より } \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \text{ より } \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \text{ より } \int 3u^2 du = u^3 + C$$

$$\text{例 2 (1) } \int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$$

$$(2) \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$(3) \int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (4 - 9.8t) dt =$$

$$(2) \int \frac{4\pi r^3}{3} dr =$$

$$(3) \int e^u du =$$

$$(4) \int \frac{1}{y} dy =$$

$$(5) \int \cos u du =$$

< 置換積分法 1 >

積分変数を u にした不定積分の公式は以下ようになる。

$$\int e^u du = e^u + C \quad , \quad \int \frac{1}{u} du = \log |u| + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C \quad , \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad (\text{ただし } n \neq -1)$$

この公式さえ覚えておけば、19 ページの合成関数の積分の公式は覚える必要がない。

例1 $\int e^{f(x)} f'(x) dx$ を考える。

$$u = f(x) \text{ とおくと } f'(x) = \frac{du}{dx} \quad (u = f(x) \text{ を } x \text{ で微分})$$

となる。すると

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx$$

と書ける。そこで形式的に

$$\frac{du}{dx} dx = du$$

とおくと

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{f(x)} + C$$

例2 $\int \cos(f(x)) f'(x) dx$ を考える。上と同様に $u = f(x)$ とおくと

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \int \cos(u) du = \sin u + C = \sin(f(x)) + C$$

このように積分変数を x から u におきかえる方法を置換積分法という。

問 上の例と同様に $u = f(x)$ において、合成関数の積分の公式を導け。
(式変形を書くこと)

$$(1) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$$

$$(2) \int \sin(f(x)) f'(x) dx =$$

$$(3) \int (f(x))^n f'(x) dx =$$

< 置換積分法 2 >

例1 不定積分 $\int e^{3x-2} dx$ を考える。

$$u = 3x - 2 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (3x - 2)' = 3 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

となる。ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3 \implies du = 3dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3} du}$$

とおくと

$$\int e^{3x-2} dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x-2} + C$$

例2 定数 a, b ($a \neq 0$) に対し $\int e^{ax+b} dx$ を考える。

$$u = ax + b \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = a \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = a dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a} du}$$

とおくと

$$\int e^{ax+b} dx = \int e^u \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int e^u du = \frac{1}{a} e^u + C = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

となり 19 ページの上の式が導かれる。

例3 定数 a, b ($a \neq 0$) に対し $\int \cos(ax+b) dx$ を考える。上と同様に $u = ax + b$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = a dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a} du}$$

より

$$\int \cos(ax+b) dx = \int \cos(u) \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int \cos(u) du = \frac{1}{a} \sin(u) + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

問1 上と同様にして定数 a, b ($a \neq 0$), ($n \neq -1$) に対して $u = ax + b$ とおくことにより 19 ページ上の不定積分の公式を導け。(式変形を書くこと)

$$(1) \int \frac{1}{ax+b} dx =$$

$$(2) \int \sin(ax+b) dx =$$

$$(3) \int (ax+b)^n dx =$$

問2 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{5x-3} dx$$

$$(2) \int \cos(2x-1) dx$$

$$(3) \int \sin(\pi-x) dx$$

$$(4) \int (4x+3)^3 dx$$

$$(5) \int \frac{1}{2x-1} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{(7x+1)^2} dx$$

< 置換積分法 3 >

例1 $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ を考える。

$$\boxed{u = x^3} \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies du = 3x^2 dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とおくと

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int e^{x^3} du = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例2 $\int x^2 e^{x^3} dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおき

$$\boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とすると

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

例3 $\int x \cos(x^2 + 1) dx$ を考える。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2 + 1)' = 2x \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{2x} du}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int x \cos(x^2 + 1) dx &= \int x \cos(x^2 + 1) \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du \\ &= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 e^{x^3+1} dx =$

(2) $\int x^3(x^4 + 1)^2 dx =$

(3) $\int x^3 \cos(x^4 - 1) dx =$

(4) $\int x \sin(1 - x^2) dx =$

(5) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx =$

(6) $\int \frac{x - 1}{(3x^2 - 6x)^3} dx =$

< 定積分の積分変数 >

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$$

のように定積分の値は変わらない。

例 (1) $\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5} t^5 \right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3} \pi r^3 \right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3} \pi \times 8 - \frac{4}{3} \pi \times 1 = \frac{28}{3} \pi$

(4) $\int_0^\pi 4 \cos \theta d\theta = [4 \sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4 \sin \pi - 4 \sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\int_1^4 (20 - 9.8t) dt$

(2) $\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$

(4) $\int_a^b u^n du$

(5) $\int_4^1 3\sqrt{u} du$

< 定積分の置換積分法 1 >

例題 定積分 $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ の値を求めよ。

(解) まず不定積分 $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ を求める。

$$u = x^3 + 1 \text{ とおくと } \frac{du}{dx} = 3x^2 \implies dx = \frac{1}{3x^2}du$$

より

$$\begin{aligned} \int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int 3x^2\sqrt{x^3+1}\frac{1}{3x^2}du = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1^3+1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2 \times 27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

(別解) $u = x^3 + 1$ とおくと

$$\begin{cases} x = 2 & \iff u = 9 \\ x = 0 & \iff u = 1 \end{cases}$$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_{u=1}^{u=9} \sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

別解の方法を定積分の置換積分法という。

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 4x^3(x^4+1)^4 dx$

(2) $\int_2^3 4xe^{2x^2-8} dx$

(3) $\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-2)^2} dx$

< 定積分の置換積分法 2 >

例 1 $\int_{-1}^1 x^2 e^{x^3+1} dx$ を求めたい。

$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \implies dx = \frac{1}{3x^2} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 1 & \iff u = 2 \\ x = -1 & \iff u = 0 \end{cases}$$

より

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{x^3+1} dx = \int_{x=-1}^{x=1} x^2 e^{x^3+1} \frac{1}{3x^2} du = \int_{u=0}^{u=2} \frac{1}{3} e^u du = \left[\frac{1}{3} e^u \right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3}$$

例 2 $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ を求めたい。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 2x \implies dx = \frac{1}{2x} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 2 & \iff u = 5 \\ x = 0 & \iff u = 1 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx &= \int_{x=0}^{x=2} \frac{x}{x^2+1} \times \frac{1}{2x} dx = \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{2} \times \frac{1}{u} du = \left[\frac{1}{2} \log |u| \right]_{u=1}^{u=5} \\ &= \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 1 = \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x^3 (x^4 - 2)^4 dx$

(2) $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$

(3) $\int_0^3 \frac{x}{x^2+1} dx$

(4) $\int_1^2 \frac{x^2}{(2x^3-9)^2} dx$

< 積の微分 1 >

例 $h \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \longrightarrow (\sin x)'$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \longrightarrow (\cos x)'$$

$$\cos(x+h) \longrightarrow \cos x$$

であるから

$$\begin{aligned} (\sin x \times \cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) \cos(x+h) - \sin x \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) \cos(x+h) - \sin x \cos(x+h) + \sin x \cos(x+h) - \sin x \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) \cos(x+h) + \sin x \left(\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \right) \right\} \\ &= (\sin x)' \times \cos x + \sin x \times (\cos x)' \\ &= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

となる。

問 例を参考にして、一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数を $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ で表せ。

$$(f(x) \times g(x))' =$$

< 積の微分 2 >

前ページの結果より、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数は

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

である。

例 (1) $(x^3 \sin x)' = (x^3)' \times \sin x + x^3 \times (\sin x)'$
 $= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

(2) $(\cos^2 x)' = (\cos x \times \cos x)'$
 $= (\cos x)' \times \cos x + \cos x \times (\cos x)'$
 $= -\sin x \times \cos x + \cos x \times (-\sin x)$
 $= -2 \sin x \cos x$

問 次の関数の微分せよ。

(1) $(x \sin x)' =$

(2) $(x^2 \cos x)' =$

(3) $(\sin^2 x)' =$

< 商の微分 1 >

例 $h \rightarrow 0$ のとき

$$\sin(x+h) \rightarrow \sin x$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \rightarrow (\sin x)'$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h)\sin x} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \right\} = -\frac{(\sin x)'}{\sin x \sin x} \\ &= -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

問 例を参考にして、一般の関数 $g(x)$ に対する次の関数の導関数を $g(x)$ と $g'(x)$ で表せ。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

< 商の微分 2 >

前ページの結果より

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

が成り立つ。

例 (1) $\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$

(2) $\left(\frac{1}{x + \sin x}\right)' = -\frac{(x + \sin x)'}{(x + \sin x)^2} = -\frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^2}$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

(2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$

(3) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' =$

(4) $\left(\frac{1}{\sin x}\right)' =$

< 分数関数の微分 >

分数関数 — の微分は、— = $\times \frac{1}{\quad}$ と考え

積の微分 $(\quad \times \quad)' = (\quad)' \times \quad + \quad \times (\quad)'$

と商の微分 $(\frac{1}{\quad})' = -\frac{(\quad)'}{(\quad)^2}$ を組み合わせてできる。

例

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \left(\sin x \times \frac{1}{\cos x} \right)' \\ &= (\sin x)' \times \left(\frac{1}{\cos x} \right) + (\sin x) \times \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)'}{\cos x} + (\sin x) \times \left\{ -\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2} \right\} \\ &= \frac{(\sin x)' \times \cos x - (\sin x) \times (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \times \cos x - (\sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

問 次の関数を微分し、できるだけ簡単にせよ。

(1) $\left(\frac{x}{\sin x} \right)' =$

(2) $\left(\frac{1}{\tan x} \right)' =$

< 部分積分法 1 >

例題 $\int x \cos x dx$ を求めよ。

(解) 微分して $x \cos x$ になる関数の候補として

$x \sin x$ を考える。積の微分法より

$$\begin{aligned} (x \times \sin x)' &= (x)' \times (\sin x) + (x) \times (\sin x)' \\ &= 1 \times \sin x + x \times \cos x \end{aligned}$$

となる。これを式変形すると

$$x \cos x = (x \times \sin x)' - 1 \times \sin x$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \times \sin x - \int 1 \times \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

注) $(x \times \sin x)'$ を積分すると $x \times \sin x$ になる。

微分と積分は逆の操作であり、微分したものを積分すると元にもどる。

問 積の微分法の公式より

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

である。これを式変形すると

$$f(x) \times g'(x) = (f(x) \times g(x))' - f'(x) \times g(x)$$

である。この両辺を積分することにより、次の

不定積分を $g'(x)$ を使わないで表せ。

$$\int f(x) \times g'(x) dx =$$

< 部分積分法 2 >

前ページの問より

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ。これを 部分積分法 という。

例 $\int (2x + 1) \sin x \, dx$ を求めたい。

$$f(x) = 2x + 1 \quad , \quad g'(x) = \sin x$$

とおくと、微分して $\sin x$ になる関数は $-\cos x$ だから、

$$g(x) = -\cos x$$

より

$$\int (2x + 1) \sin x \, dx = (2x + 1) \times (-\cos x) - \int (2x + 1)' \times (-\cos x) \, dx$$

$$= -(2x + 1) \cos x + \int 2 \cos x \, dx$$

$$= -(2x + 1) \cos x + 2 \sin x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (x - 1) \sin x \, dx$$

$$(2) \int x^2 \cos x \, dx$$

$$(3) \int x e^x \, dx$$

< 部分積分法 3 >

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

は、左辺より右辺が簡単になる場合に使われる。つまり

$f(x)g'(x)$ より $f'(x)g(x)$ の方が簡単になるように、 $f(x)$ と $g(x)$ をえらぶ。

例題 $\int \log x dx$ を求めよ。

(解) $\log x = (\log x) \times 1$ と考え、

とおくと、 $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} , g(x) = x$$

より

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int (\log x) \times 1 dx \\ &= (\log x) \times x - \int \left(\frac{1}{x}\right) \times x dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

注) $\log x$ は、微分すると $\frac{1}{x}$ になり、簡単になるから、こちらを $f(x)$ とした。

問 次の不定積分を求めよ。

$$\int (\log x) \times x dx =$$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例1
$$\int x^2(x^3 + 1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{15}(x^3 + 1)^5\right)' &= \frac{1}{15}((x^3 + 1)^5)' = \frac{1}{15} \times 5(x^3 + 1)^4 \times (x^3 + 1)' \\ &= \frac{1}{3} \times (x^3 + 1)^4 \times 3x^2 = x^2(x^3 + 1)^4 \end{aligned}$$

より正しい。

例2
$$\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$(\log(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \times (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より正しくない。

例3
$$\int (2x + 1) \sin x dx = -(2x + 1) \cos x + 2 \sin x + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると(積の微分法より)

$$\begin{aligned} (-(2x + 1) \cos x + 2 \sin x)' &= -(2x + 1)' \times \cos x - (2x + 1) \times (\cos x)' + 2 \times (\sin x)' \\ &= -2 \cos x - (2x + 1) \times (-\sin x) + 2 \cos x = (2x + 1) \sin x \end{aligned}$$

より正しい。

問 次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1)
$$\int x^4(x^5 - 1)dx = \frac{1}{5}(x^5 - 1)^2 + C$$

(2)
$$\int \frac{x^2}{x^3 - 2} dx = \frac{1}{3} \log|x^3 - 2| + C$$

(3)
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x + 2x e^x + 2e^x + C$$

< 定積分の部分積分 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

例 (1) $\int_2^4 (x-2)(x-4)^2 dx = \int_2^4 (x-2) \times \left\{ \frac{(x-4)^3}{3} \right\}' dx$

$$= \left[(x-2) \frac{(x-4)^3}{3} \right]_2^4 - \int_2^4 (x-2)' \times \frac{(x-4)^3}{3} dx$$

$$= (0-0) - \frac{1}{3} \int_2^4 (x-4)^3 dx$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{(x-4)^4}{4} \right]_2^4 = -\frac{1}{3} \left(0 - \frac{(-2)^4}{4} \right) = \frac{4}{3}$$

(2) $\int_0^\pi x \cos x dx = \int_0^\pi x \times (\sin x)' dx$

$$= \left[x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \sin x dx$$

$$= (\pi \sin \pi - 0) - \int_0^\pi \sin x dx$$

$$= - \left[-\cos x \right]_0^\pi = - \left\{ -\cos \pi - (-\cos 0) \right\} = -2$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^3 (x+2)(x-3)^3 dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

(3) $\int_0^2 x e^x dx$

< 関数の定義域と値域 1 >

y が x の関数 $y = f(x)$ であるとき、変数 x を独立変数といい、

y は x によって変わるから変数 y を従属変数という。

関数 $y = f(x)$ において、独立変数 x の範囲を定義域、

従属変数 y の範囲を値域という。

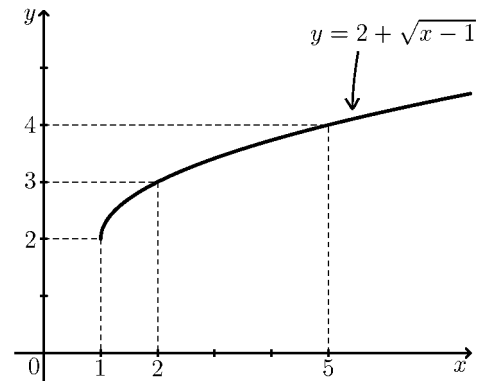
例 1 無理関数 $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

は $\sqrt{\quad}$ の中が 0 以上の制限
があるから、 $x-1 \geq 0$ より

$f(x)$ の 定義域は $x \geq 1$ 。

$y = 2 + \sqrt{x-1}$ とおくと $\sqrt{\quad} \geq 0$

より 値域は $y \geq 2$ 。



例 2 分数関数 $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

は分母が 0 以外であるから

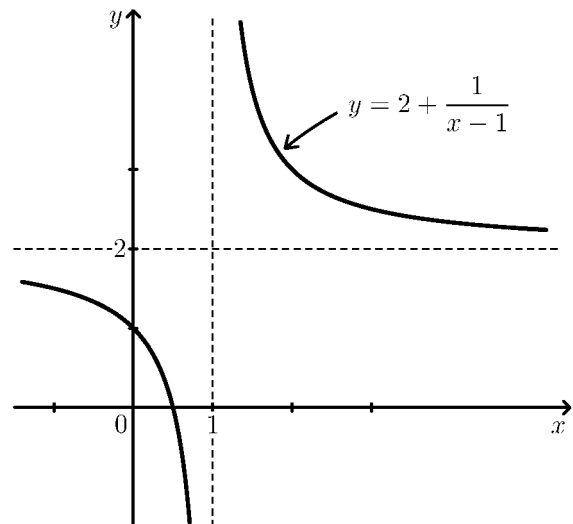
$x-1 \neq 0$ より $x \neq 1$ 。

$f(x)$ の 定義域は 1 以外
の全ての実数 である。

$y = 2 + \frac{1}{x-1}$ とおくと

$\frac{1}{x-1} \neq 0$ より $y \neq 2$ 。

値域は 2 以外の全ての実数 である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$ (2) $f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$ (3) $f(x) = \frac{1}{x}$

定義域 _____

定義域 _____

定義域 _____

値域 _____

値域 _____

値域 _____

< 関数の定義域と値域 2 >

例 1 対数関数 $f(x) = \log_4(x - 2)$

を考える。一般に対数

$$\bigcirc = \log_4 \square$$

に対し、 \square 内にはいる数を真数
という。上の対数を指数の形に
すると

$$\square = 4^{\bigcirc} > 0$$

より真数は正でなければならない。

従って真数 $= x - 2 > 0$ より

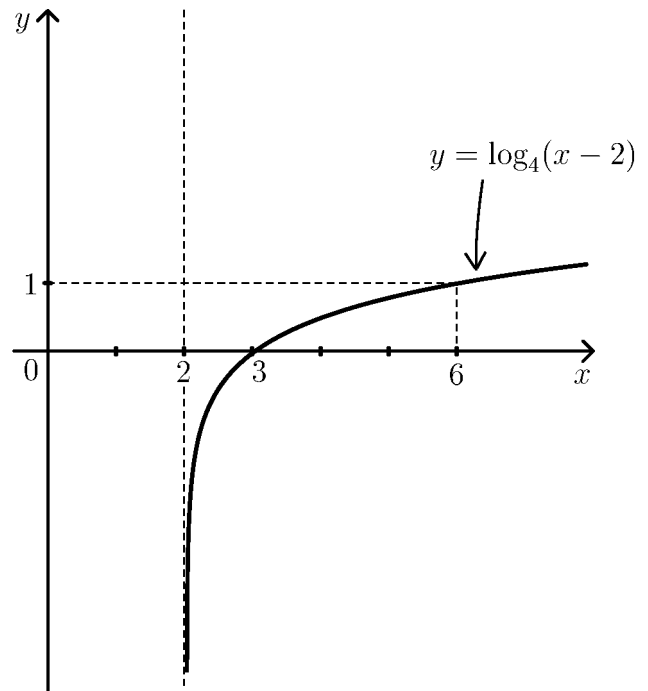
$f(x)$ の 定義域は $x > 2$ である。

又 $y = \log_4(x - 2)$ とおくと

$$x - 2 = 4^y$$

となり指数 y に制限はないので

値域は実数全体 である。



例 2 指数関数 $f(x) = 2^x + 1$

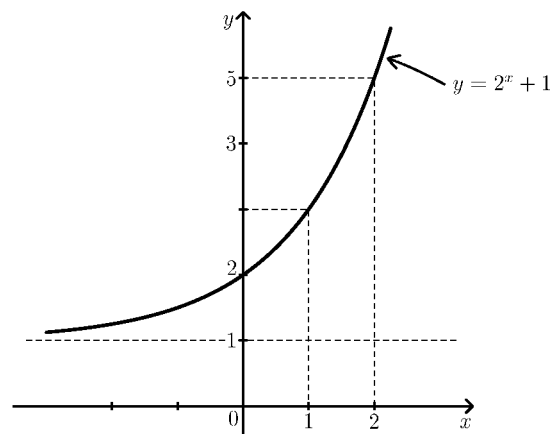
を考える。指数 x に制限はない

ので $f(x)$ の 定義域は実数全体

である。一方 $y = 2^x + 1$ とおくと

$2^x > 0$ より $2^x + 1 > 1$ であるから

値域は $y > 1$ である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = \log_3(1 - 2x)$

(2) $f(x) = 2 - 3^x$

(3) $f(x) = 2^{x-1}$

定義域 _____

定義域 _____

定義域 _____

値域 _____

値域 _____

値域 _____

< 関数の定義域と値域 3 >

例 1 三角関数 $f(x) = 3 + 2 \sin x$ を考える。正弦関数の角度 x の範囲に制限はないから、関数 $f(x)$ の 定義域は実数全体 である。

一方

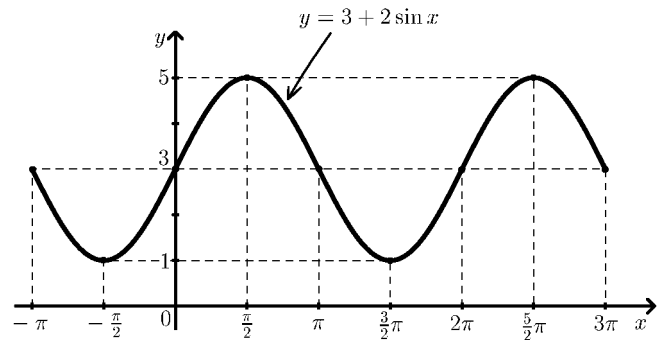
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

より

$$3 - 2 \leq 3 + 2 \sin x \leq 3 + 2$$

$$1 \leq 3 + 2 \sin x \leq 5 \quad \text{だから} \quad \underline{\text{値域は}} \quad 1 \leq y \leq 5 \quad \text{である。}$$



例 2 三角関数 $f(x) = 1 + 3 \cos(2x)$ を考える。 $\cos x$ の角度 x に制限はないから、関数 $f(x)$ の 定義域は実数全体 である。

一方

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$$

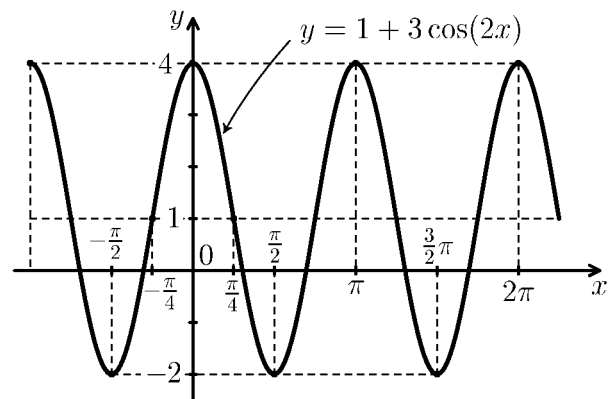
$$-3 \leq 3 \cos(2x) \leq 3$$

より

$$1 - 3 \leq 1 + 3 \cos(2x) \leq 1 + 3$$

$$-2 \leq 1 + 3 \cos(2x) \leq 4$$

だから 値域は $-2 \leq y \leq 4$ である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = 3 \sin x + 2$

定義域 _____

値域 _____

(2) $f(x) = 1 - \cos x$

定義域 _____

値域 _____

(3) $f(x) = 1 + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

定義域 _____

値域 _____

(4) $f(x) = 1 - \cos(-x)$

定義域 _____

値域 _____

< 関数の定義域と値域 4 >

例 1 角度 θ が右図のようなとき

$$\tan \theta = \frac{Y}{X}$$

であった。 θ が 90° または -90° のときは x 座標が 0 ($X = 0$) となるので分母が 0 になるから定義されない。一般に $\tan \theta$ の定義域は

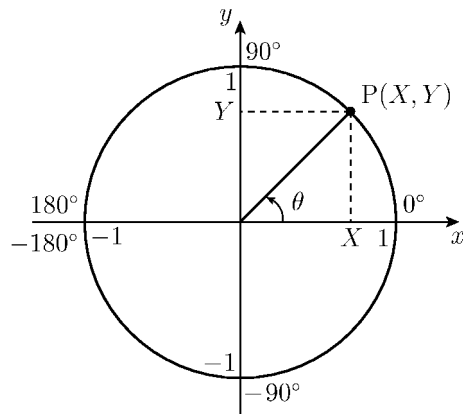
$$\pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \dots$$

以外の角度である。弧度法で表すと、

$$\tan \theta \text{ の定義域は } \theta \neq \pm \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

である。

$y = \tan x$ のグラフより 値域は実数全体 である。



例 2 関数 $f(x) = \tan(2x)$ を考える。

一般に $\tan(\quad)$ は

$$\neq \pm \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

という制限があるから

$$2x \neq \pm \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

より

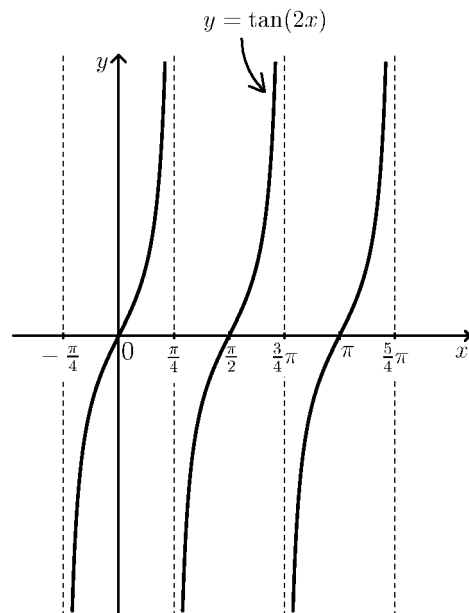
$$x \neq \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi$$

であるから、 $f(x)$ の 定義域は

$$\pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi \quad (n \text{ は整数}) \text{ 以外のすべ$$

ての実数 である。また 値域は

実数全体 である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

定義域 _____

値域 _____

(2) $f(x) = \tan(\pi x)$

定義域 _____

値域 _____