高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

秋期入学者用

Ⅲ

内容

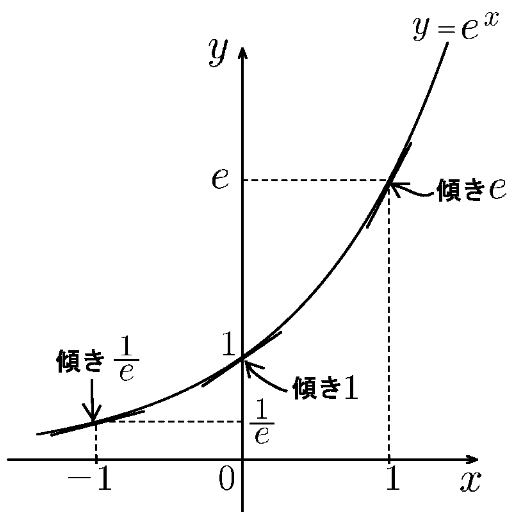
◎ ネピアの数e

◎ 指数・対数関数の微分

◎ 三角関数

◎ 弧度法

◎ 三角関数の微分・積分



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜ 対数の性質 1 ＞

例 1　$\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right)=\log_2\left(\dfrac{2^5}{2^2}\right)=\log_2(2^3)=3$

$\log_2 32-\log_2 4=\log_2(2^5)-\log_2(2^2)=5-2=3$

より　$\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right)=\log_2 32-\log_2 4$

が成り立つ。

問 1　$M=2^\alpha$, $N=2^\beta$ のとき次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$

(2) $\log_2 M-\log_2 N$

例 2　(1) $\log_2(M^2)=\log_2(M\times M)=\log_2 M+\log_2 M=2\log_2 M$

(2) $\log_2(M^3)=\log_2(M^2\times M)=\log_2(M^2)+\log_2 M=3\log_2 M$

問 2　次の対数の値を $\log_2 M$ で表せ。

(1) $\log_2(M^4)$　　(2) $\log_2(M^5)$

問 3　実数 α と r に対し $M=2^\alpha$ のとき次式を α と r で表せ。

(1) $\log_2(M^r)$

(2) $r\log_2 M$

問 4　$\log_2 M=\log_2\left(\dfrac{M}{N}\times N\right)=\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)+\log_2 N$

を利用して $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$ を $\log_2 M$ と $\log_2 N$ で表せ。

$\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)=$

＜ 対数の性質 2 ＞

ワークブック秋期II (P40) と同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(\,M \times N\,) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問 1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) =$

問 2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$\log_a(\,M^r\,) =$

例　(1)　$\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2)　$\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50 \times 20) = \log_{10} 1000 = 3$

(3)　$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3(6^2) - \log_3 4 = \log_3\left(\dfrac{6^2}{4}\right) = \log_3 9 = 2$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1)　$\log_2 56 + \log_2\left(\dfrac{1}{7}\right)$

(2)　$\log_3 135 - \log_3 5$

(3)　$\log_6 3 + \log_6 54 + 3\log_6 2$

(4)　$\log_{10} 5 + \log_{10} 8 - \log_{10} 0.4$

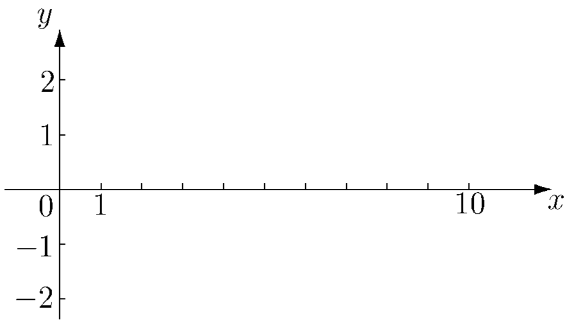
< 対数関数 >

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域 (括弧内の x の範囲) 内で、グラフの概形を書け。

(1)　$y = \log_{10} x \quad (x \ > \ 0)$

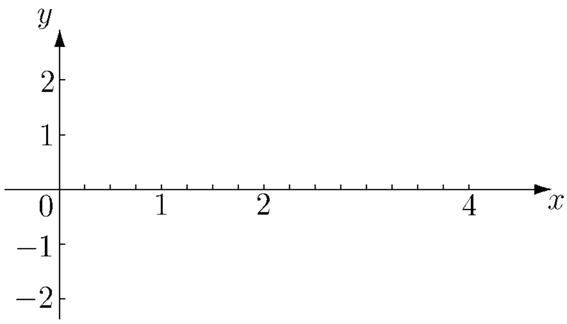
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



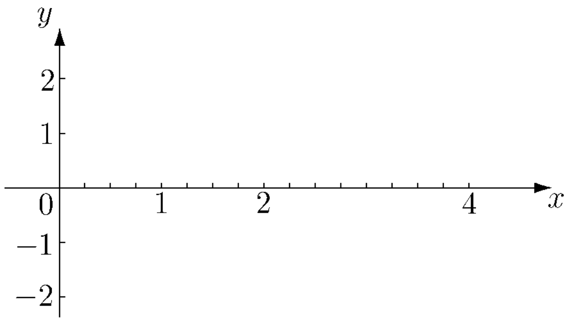
(2)　$y = \log_2 x \quad (x \ > \ 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x \ > \ 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



< ネピアの数 1 >

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を考える。

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \ , \quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \ , \quad a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} \fallingdotseq 2.44 \ , \quad a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.48 \ , \quad \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59 \ , \ \cdots \ , \ a_{100} \fallingdotseq 2.70 \ , \ \cdots \ , \ a_{1000} \fallingdotseq 2.716 \ , \ \cdots \ , \ a_{10000} \fallingdotseq 2.718$$

となり少しずつ増えながらある一定の値に近づく、その極限値を e で表す。

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e は無理数であり、その値は

$$e = 2.71828182845\cdots$$

であることが知られている。e をネピアの数ということもある。

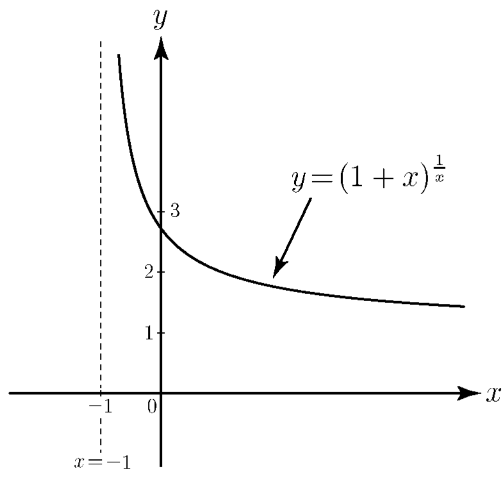
問　関数

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

を考える。この関数は $x=0$ と $x=-1$ で定義されていないが、グラフは右図のようになっている。
y 軸との交点 (y 切片) を求めたい。
y 切片は $x \to 0$ のときの極限値

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

である。この極限値を求めよ。



(ヒント　$x = \dfrac{1}{n}$ とおいて $n \to \infty$ の極限を考える。)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} =$$

＜ ネピアの数 2 ＞

前ページの結果から

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ (\fallingdotseq 2.718)$$

であることがわかる。変数 x を h に変えた式

$$\boxed{\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$$

を考える。この式から h が十分小さいとき、すなわち

$h \fallingdotseq 0$　ならば　$e \fallingdotseq (1+h)^{\frac{1}{h}}$

である。両辺を h 乗すれば

$h \fallingdotseq 0$　のとき　$e^h \fallingdotseq 1+h$

だから

$$\Downarrow$$

$$e^h - 1 \fallingdotseq h$$

より

$h \fallingdotseq 0$　のとき　$\dfrac{e^h-1}{h} \fallingdotseq 1$

よって

$$\boxed{\lim_{h \to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

がわかる。

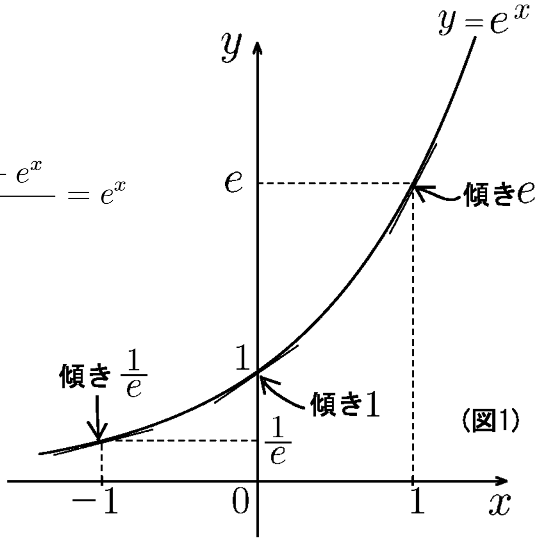
例　$\displaystyle \lim_{h \to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{e^2(e^h-1)}{h} = \lim_{h \to 0} e^2 \times \left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^2 \times 1 = e^2$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h \to 0}\frac{e^{3+h}-e^3}{h} =$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$

＜指数関数 e^x ＞



(図1)

ネピアの数 $e\,(2.73\cdots)$ に対し $f(x) = e^x$ の導関数は

$$(e^x)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{hto0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x$$

となる。(最後の等式は前ページの結果を使った)

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

(注 1)　導関数が元の関数と一致するのは e^x の定数倍だけである。この意味で e^x は微分積分学で基本的な役割をはたす。この指数関数 e^x を他の指数関数と区別するために

$$\boxed{e^x = \exp(x)} \quad \left(exponential(\text{指数})\text{ の略}\right)$$

と書くこともある。

(注 2)　他の指数関数 $a^x\ (a > 0\,,\, a \neq 1)$ の導関数は

$$(a^x)' = a^x \times \log_e a$$

となる。特に $a = e$ のときは $\log_e e = 1$ となり上の公式がなりたつ。

例　関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ は、$x = a$ における $f(x)$ の接線の傾きを表す。

$f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ であるから

(1) $x = 0$ のときの接線の傾き $= f'(0) = e^0 = 1$　(傾き 1)

(2) $x = 1$ のときの接線の傾き $= f'(1) = e^1 = e$　(傾き e)

(3) $x = -1$ のときの接線の傾き $= f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$　(傾き $\frac{1}{e}$)

となる (図 1 参照)。

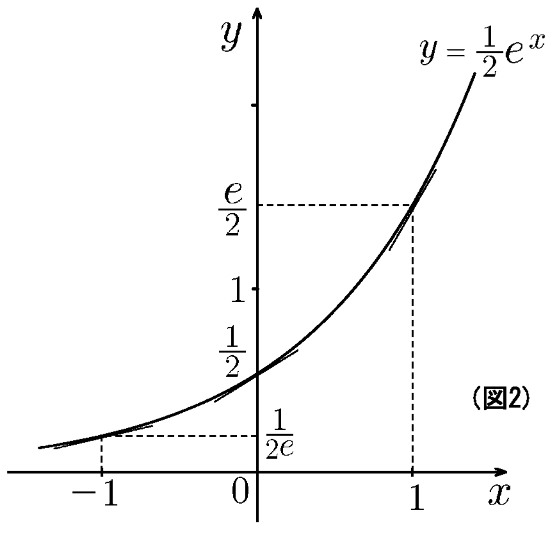
問　$f(x) = \frac{1}{2}e^x$ の導関数 $f'(x)$ を求め、以下の接線の傾きを求めよ。

$f'(x) = \left(\frac{1}{2}e^x\right)' =$

(1) $x = 0$ のときの接線の傾き $=$

(2) $x = 1$ のときの接線の傾き $=$

(3) $x = -1$ のときの接線の傾き $=$



(図2)

＜指数関数 e^x の微分・積分＞

前ページより

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

である。

例 1　(1) $(2e^x)' = 2 \times (e^x)' = 2e^x$

(2) $\left(\frac{1}{2}e^x\right)' = \frac{1}{2} \times (e^x)' = \frac{1}{2}e^x$

問 1　次の導関数を求めよ。

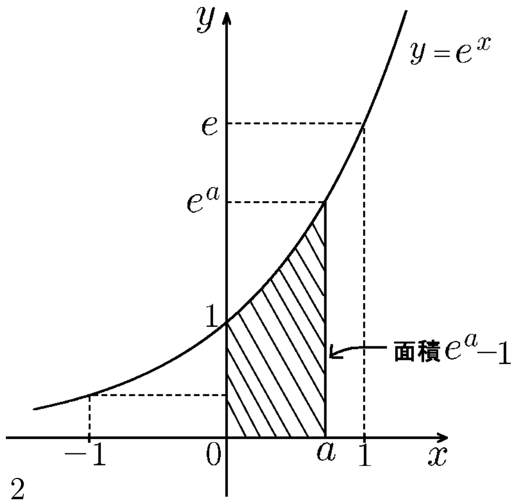
(1) $(9e^x)' =$　　(2) $(-2e^x)' =$　　(3) $\left(\frac{1}{4}e^x\right)' =$

例 2　(1)　微分して e^x になるのは「$e^x +$ 定数」だから $\int e^x dx = e^x + C$

(2)　$\int 2e^x dx = 2e^x + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 3e^x dx =$　　(2) $\int -\frac{1}{4}e^x dx =$



例 3　(1) $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

(2) $\int_0^a e^x dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1$

これは、右図の斜線部分の面積が $e^a - 1$ であることを意味する。

(3) $\int_{-1}^1 2e^x dx = \left[2e^x\right]_{-1}^1 = 2e^1 - 2e^{-1} = 2e - \frac{2}{e}$

問 3　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^2 e^x dx =$　　(2) $\int_0^3 2e^x dx =$

(3) $\int_{-2}^2 4e^x dx =$

＜ 対数関数の微分 ＞

5 ページより、$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ である。変数 x を t に変えた式は

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

となる。この式を使うと、対数関数の微分係数が求まる。

例　関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。

定義から

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\log_{10}(2+h) - \log_{10} 2\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

ここで $\frac{h}{2} = t$ とおくと、 $h \to 0$ のとき $t \to 0$ より

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\log_{10}(1+t)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\log_{10}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{2}\log_{10} e$$

問　例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ を例と同様な極限計算で求め、導関数 $f'(x)$ を類推せよ。

$f'(3) =$

$f'(x) =$

< 自然対数 >

問 1　前ページの結果より、底が $a > 0$ $(a \neq 1)$ である対数関数 $\log_a x$ の導関数を類推せよ。

(答) $\boxed{(\log_a x)' = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

問 2　上の結果を用いて、底が e(ネピアの数 $\fallingdotseq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \qquad \text{(自然対数)}$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。

(注)　自然対数 $\log_e x$ を常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため自然対数 $\log_e x$ を

$$\boxed{\log_e x = \ln x} \qquad \text{(自然対数)}$$

と書く場合もある。

例

$$\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

$$\log\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$$

問 3　次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$　　(2) $\log(\sqrt[3]{e})$　　(3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right)$　　(4) $\log 1$

問 4　問 2 の結果を使って自然対数 $\log x$ の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

問 5　問 4 の結果を使って次の導関数を求めよ。

(1) $(2\log x)' =$　　(2) $(5\log x)' =$

$<\ \dfrac{1}{x}$ の積分 $>$

前ページより自然対数 $\log x = \log_e x$ の導関数は

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \quad \text{(自然対数の微分)}$$

であった。従って不定積分の形にすれば

$$(*) \quad \boxed{\int \frac{1}{x}dx = \log x + C} \quad (x^{-1} = \tfrac{1}{x}\ \text{の積分})$$

となる。x^n の形の不定積分は通常は

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C} \quad (n \neq -1\ \text{の場合})$$

であるが、$n = -1$ のときだけ例外的に $(*)$ の形になる。

例 1　(1) $\displaystyle\int \frac{3}{x}dx = 3\log x + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x}dx = \int\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \log x + C$

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{5}{x}dx =$　　　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2}dx =$

例 2　(1) $\displaystyle\int_2^8 \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_2^8 = \log 8 - \log 2 = \log\left(\frac{8}{2}\right) = \log 4$

(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{2}{x}dx = \Big[2\log x\Big]_1^e = 2\log e - 2\log 1 = 2\times 1 - 2\times 0 = 2$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}dx = \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\log x\right]_1^2$

$$= \left(\frac{4}{2}+\log 2\right) - \left(\frac{1}{2}+\log 1\right) = \frac{3}{2} + \log 2$$

問 2　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{x+1}{x}\right)dx$

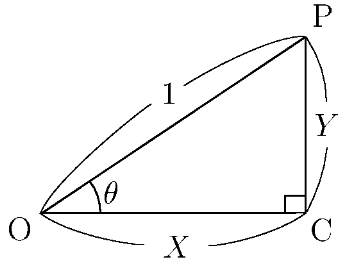
＜三角関数の定義＞

図 1 のように斜辺の長さが 1 の直角三角形 OPC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{OP}} = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OP}} = \frac{X}{1} = X$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OC}} = \frac{Y}{X}$$

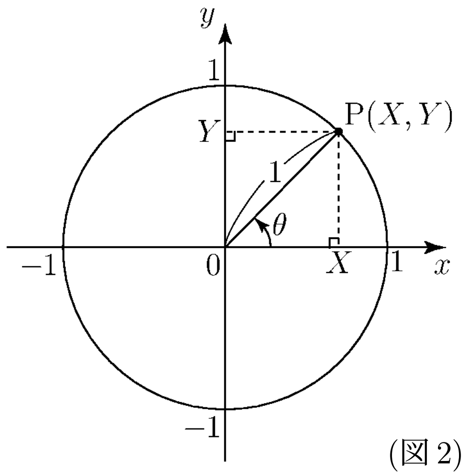


(図 1)

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径 1 の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は $(1, 0)$ から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で

$$\boxed{\sin\theta = Y \ , \quad \cos\theta = X \ , \quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

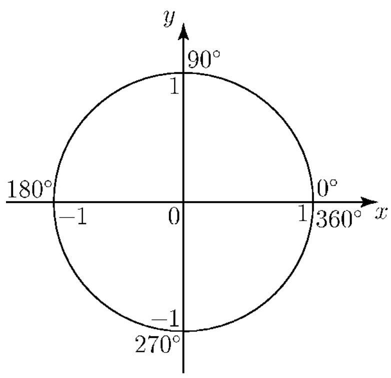
と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。角度 θ は図 2 のように x 軸を基準に反時計まわりにはかる。



(図 2)

例 1　$\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから、このときは $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0 \ , \quad \cos 0^\circ = 1 \ , \quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$



例 2　$\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0$, $Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1 \ , \quad \cos 90^\circ = 0$$

であるが、このとき $\tan 90^\circ$ は求まらない。(分母に 0 がくるので計算できない。)

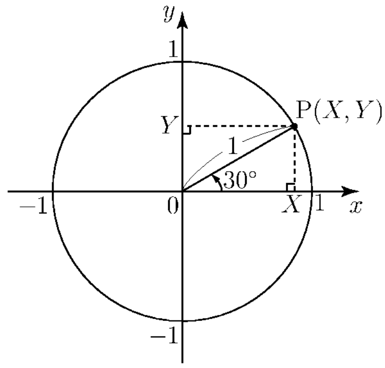
問　次の値を求めよ。

(1) $\sin 180^\circ =$ 　　　　, $\cos 180^\circ =$ 　　　　, $\tan 180^\circ =$

(2) $\sin 270^\circ =$ 　　　　, $\cos 270^\circ =$

＜三角関数の値１＞

問1 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

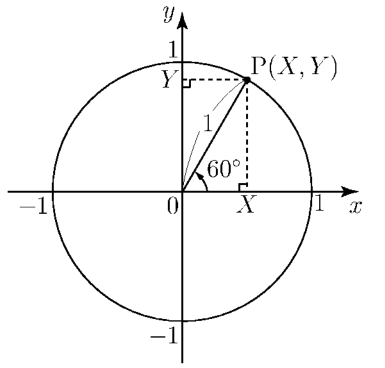


(1) $\cos 30° =$

(2) $\sin 30° =$

(3) $\tan 30° =$

問2 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

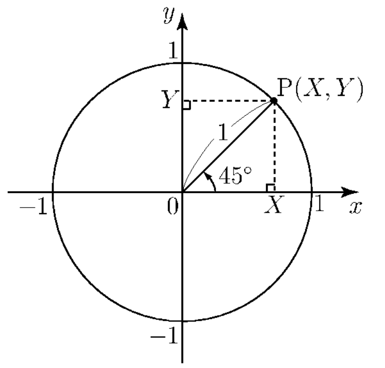


(1) $\cos 60° =$

(2) $\sin 60° =$

(3) $\tan 60° =$

問3 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

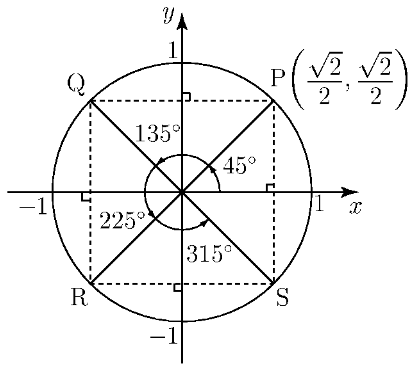


(1) $\cos 45° =$

(2) $\sin 45° =$

(3) $\tan 45° =$

問4 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



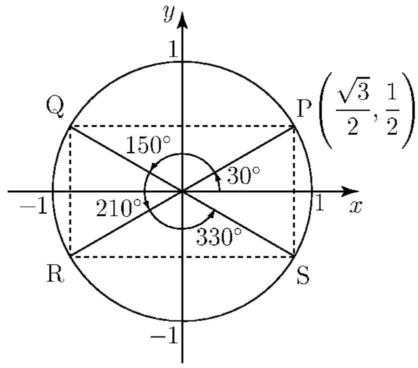
(1) $\cos 135° =$ 　　　, $\sin 135° =$ 　　　, $\tan 135° =$

(2) $\cos 225° =$ 　　　, $\sin 225° =$ 　　　, $\tan 225° =$

(3) $\cos 315° =$ 　　　, $\sin 315° =$ 　　　, $\tan 315° =$

＜ 三角関数の値 2 ＞

問 1 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。

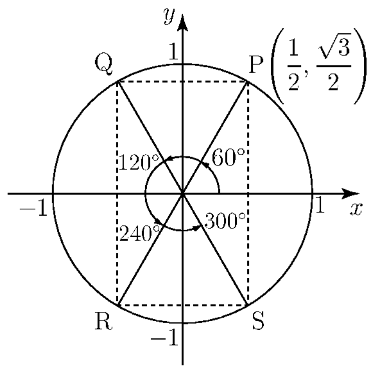


(1) $\cos 150^\circ =$ 　　　, $\sin 150^\circ =$ 　　　, $\tan 150^\circ =$

(2) $\cos 210^\circ =$ 　　　, $\sin 210^\circ =$ 　　　, $\tan 210^\circ =$

(3) $\cos 330^\circ =$ 　　　, $\sin 330^\circ =$ 　　　, $\tan 330^\circ =$

問 2 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



(1) $\cos 120^\circ =$ 　　　, $\sin 120^\circ =$ 　　　, $\tan 120^\circ =$

(2) $\cos 240^\circ =$ 　　　, $\sin 240^\circ =$ 　　　, $\tan 240^\circ =$

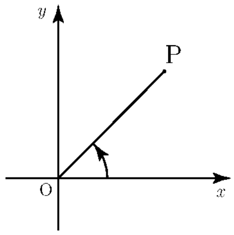
(3) $\cos 300^\circ =$ 　　　, $\sin 300^\circ =$ 　　　, $\tan 300^\circ =$

問 3 次の表を完成せよ。

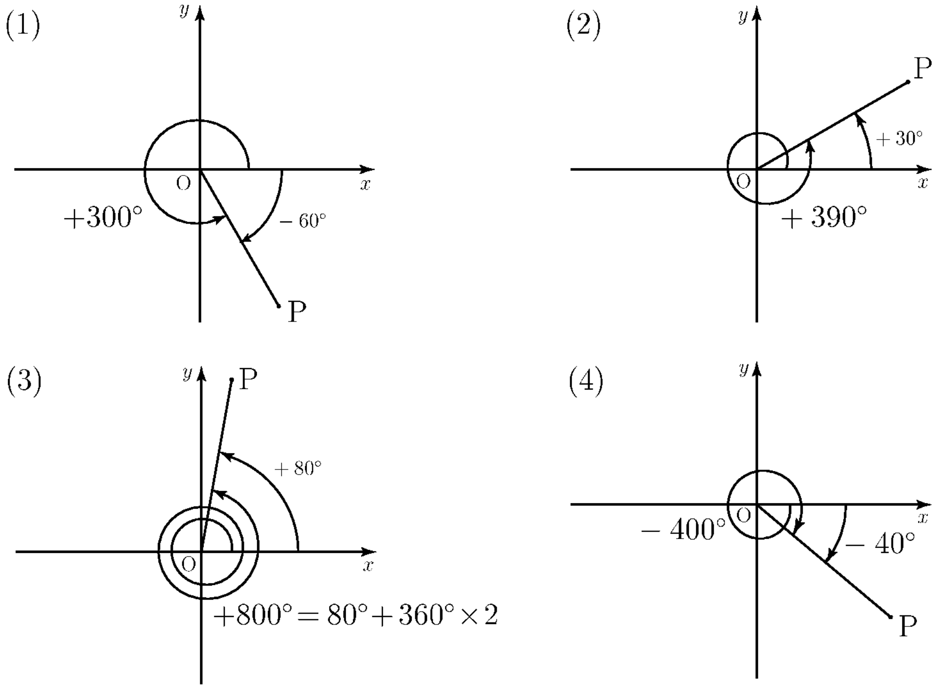
角度 θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0				1					$-\frac{1}{2}$							
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$										0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan\theta$								$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			1						0

＜ 一般角 ＞

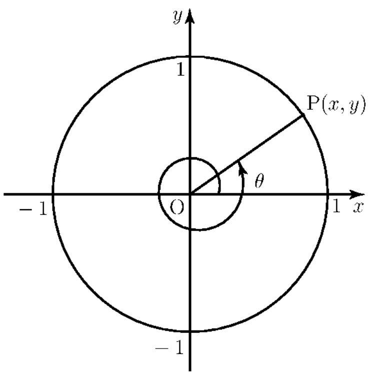
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を始線といい、OP を動径という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



例 1



＜ 一般角の三角関数 ＞



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき、一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に、点 P の座標 (x, y) で

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

例 2　$\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$　,　$\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$　,　$\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問　次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 375^\circ$　　(2) $\cos(-240^\circ)$　　(3) $\tan 450^\circ$

(4) $\sin(-375^\circ)$　　(5) $\cos 600^\circ$　　(3) $\tan 765^\circ$

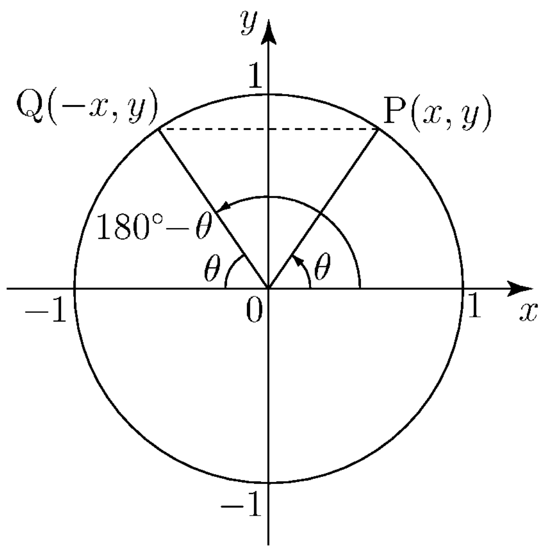
＜三角関数の性質 1＞

例　$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ のとき、点 $\mathrm{P}(x, y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-x, y)$ は角 $180^\circ - \theta$ を表す点である。従って

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -x\\ \sin(180^\circ - \theta) &= y\\ \tan(180^\circ - \theta) &= \frac{y}{-x}\end{aligned}$$

となる。これを $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ で表すと

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -\cos\theta\\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin\theta\\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

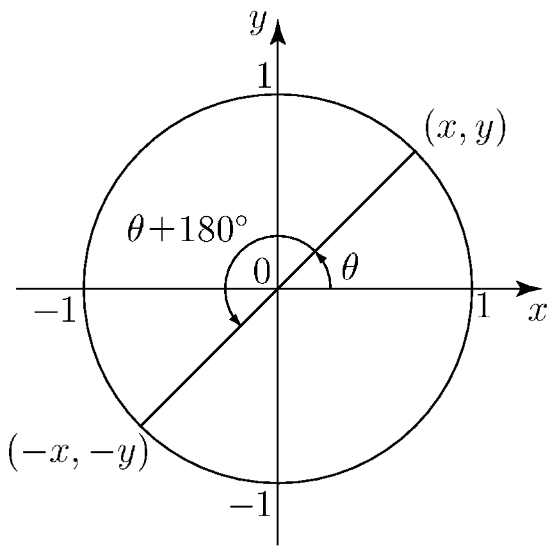


問 1　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 180^\circ) =$

(2) $\cos(\theta + 180^\circ) =$

(3) $\tan(\theta + 180^\circ) =$

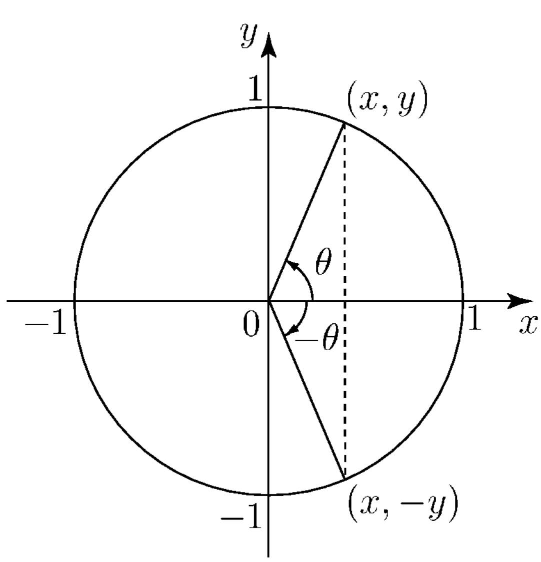


問 2　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(-\theta) =$

(2) $\cos(-\theta) =$

(3) $\tan(-\theta) =$

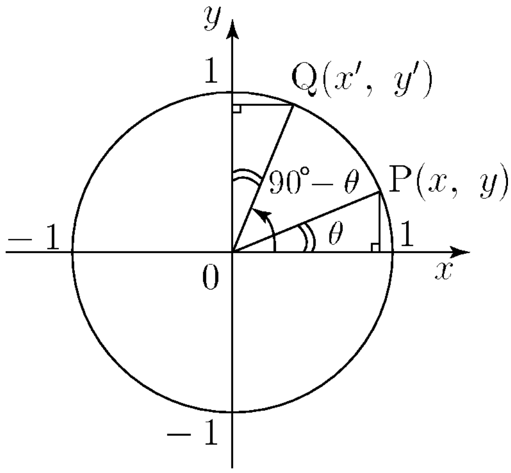


< 三角関数の性質 2 >

問 1　右図のように角度 θ を表す点を P $(x,\ y)$, 角度 $90^\circ - \theta$ を表す点を Q $(x',\ y')$ とすると

$$x' = y \quad , \quad y' = x$$

の関係がある。これを参考にして次の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。



(1)　$\sin(90^\circ - \theta) =$　　　　(2)　$\cos(90^\circ - \theta) =$

例　$\sin 20^\circ = 0.342$,　$\cos 20^\circ = 0.9397$,　$\tan 20^\circ = 0.364$ である。
これは三角比の表で調べるわけだが，この表には 0° から 90° までしか書いていない。前ページの例を参考にすると

$$\sin(160^\circ) = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = 0.342$$
$$\cos(160^\circ) = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -0.9397$$
$$\tan(160^\circ) = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.364$$

がわかる。

問 2 上の例と前のページの問等を参考にして、次の値を求めよ。

(1)　$\sin 200^\circ =$　　　　$\cos 200^\circ =$　　　　$\tan 200^\circ =$

(2)　$\sin(-20^\circ) =$　　　　$\cos(-20^\circ) =$　　　　$\tan(-20^\circ) =$

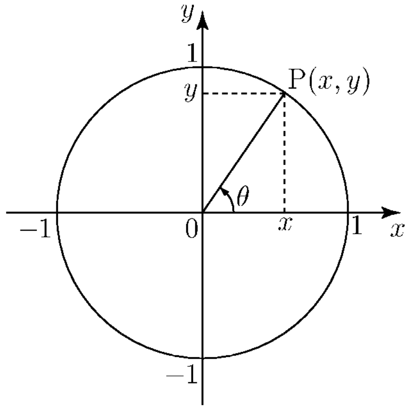
(3)　$\sin 70^\circ =$　　　　$\cos 70^\circ =$

< 三角関数の性質 3 >

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると、三角関数の定義から

$$\sin\theta = y\ ,\quad \cos\theta = x\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である。ここで点 P は原点を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の点だから



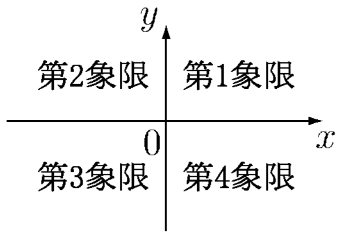
$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

が成り立つ。

注)　記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta) \times (\cos\theta)$ の意味であり、$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち
$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)$,　$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$

問 1　$\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2　三角関数の定義から、sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



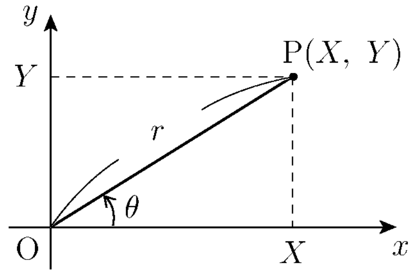
θ	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

例　角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\sin\theta = \frac{1}{3}$ である。このとき
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　だから　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$
よって　$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3　角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

＜ 極座標 ＞



(図1)

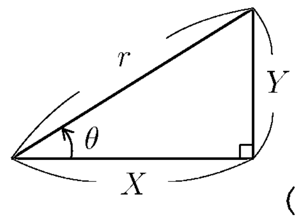
座標平面上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

$$\frac{X}{r} = \cos\theta\ ,\quad \frac{Y}{r} = \sin\theta$$

だから

$$X = r\cos\theta\ ,\quad Y = r\sin\theta$$

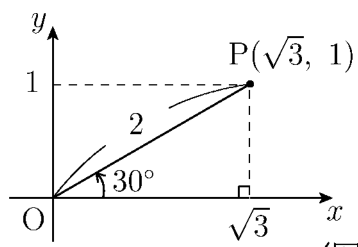
より



(図2)

$$\boxed{(X,\ Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}$$ (極座標表示)

と表される。$(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ を点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の**極座標**という。



(図3)

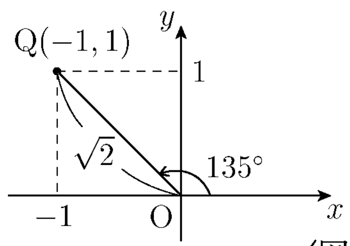
例 (1) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1) = (2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ)$$

となる。

(2) 点 $\mathrm{Q}(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1) = (\sqrt{2}\cos 135^\circ\ ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)$$



(図4)

＜検算＞ 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $$(2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ) = \left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\times\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3},\ 1)$$

(2) $$(\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ) = \left(\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2},\ \frac{2}{2}\right) = (-1,\ 1)$$

問 次の座標を極座標になおせ。

(1) $(-1,\ \sqrt{3})$

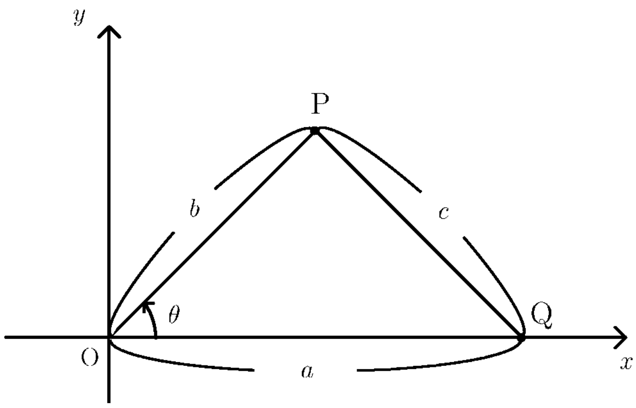
(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $(-1,\ -1)$

(4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

< 余弦定理 1 >

問 (1) 右図の点 P と Q の座標を a と b および角度 θ で表せ。



P(　　　,　　　)

Q(　　　,　　　)

P は極座標を使う。

(2) 平面上の 2 点間の距離の公式を使って、

PQ^2 を a と b と θ を用いて表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いることによって PQ^2 を簡単にせよ。

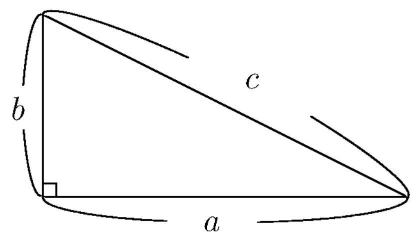
$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) の結果を用いて、c^2 を a と b と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

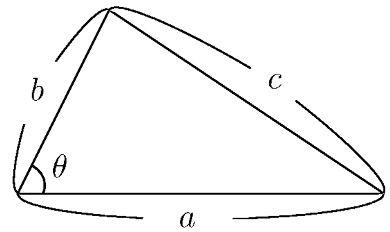
$c^2 =$

< 余弦定理 2 >

図１のように直角三角形の場合はピタゴラスの定理より
$c^2 = a^2 + b^2$
によって斜辺の長さ c を
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
として求まるが、図２のように θ が 90° 以外の場合はそうはならない。



（図１）



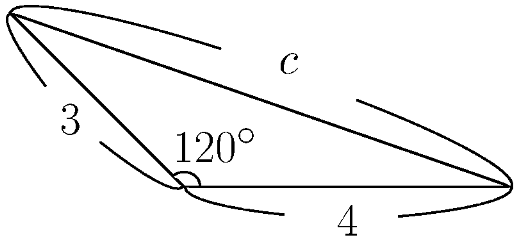
（図２）

問１ 前ページの結果を用いて、c^2 を a と b と θ で表せ。

$c^2 =$

（注）この式を**余弦定理**という

例 右図の場合に
$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120^\circ$
が成り立つ。ここで $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$ より

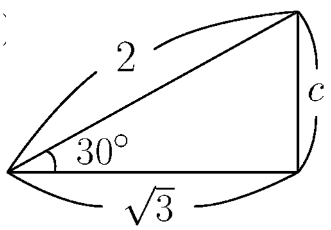


$$c^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 12 = 37$$

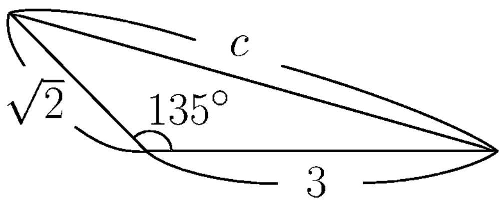
であるから $c = \sqrt{37}$。

問２ 三角形が以下の場合に c を求めよ。

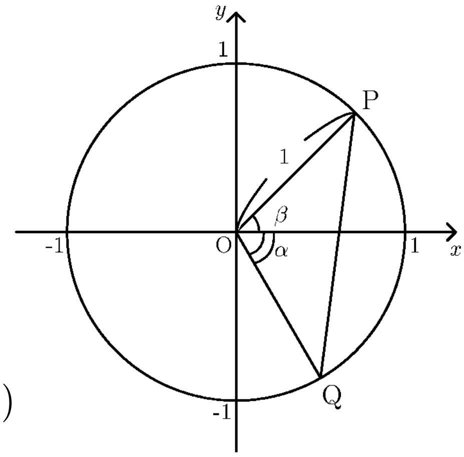
(1)



(2)



＜加法定理 1＞



問

(1) 右図において点 P の座標を極座標表示せよ。

P(　　　,　　　)

(2) 右図において点 Q の座標極座標表示すると $\mathrm{Q}\bigl(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\bigr)$

となるが、15 ページ問 2 の性質を用いて、Q の座標を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ で表せ。

Q(　　　,　　　)

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式を使って、PQ^2 を α と β で表せ。

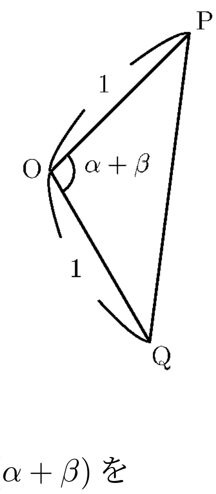
$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理を使って、PQ^2 を $\alpha + \beta$ で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$



(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha + \beta)$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha + \beta) =$

＜ 加法定理 2 ＞

前ページの結果より

$(*)_1$　$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

が成立することがわかった。これをコサインの**加法定理**という。また

$(*)_2$　$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

が成立する。これをサインの**加法定理**という。

＜ $(*)_2$ の証明 ＞　三角関数の性質 (15,16 ページ) より

$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$,　$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$,　$\cos(-\theta) = \cos\theta$,　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

である。この公式と $(*)_1$ 式より

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\bigl(90^\circ - (\alpha+\beta)\bigr) = \cos\bigl((90^\circ-\alpha)+(-\beta)\bigr)\\ &= \cos(90^\circ-\alpha)\cos(-\beta) - \sin(90^\circ-\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

（証明終）

問 1　$\cos(-\theta) = \cos\theta$,　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ と $(*)_1$,$(*)_2$ 式を用いて、次式を $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\alpha,\ \cos\beta$ で表せ。

(1) $\cos(\alpha-\beta) =$

(2) $\sin(\alpha-\beta) =$

例　(1) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ\cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

問 2　例にならって次式の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ =$

(2) $\sin 105^\circ =$

＜倍角・半角の公式＞

前ページの加法定理 $(*)_1,(*)_2$ において、$\alpha=\beta$ とおくと

(1) $\boxed{\cos(2\alpha)=\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

(2) $\boxed{\sin(2\alpha)=\ 2\sin\alpha\cos\alpha}$

がなりたつ。これを **2 倍角の公式**という。

例 1 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より、$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ であるから

$(1)'$ $\boxed{\cos(2\alpha)=\ 2\cos^2\alpha-1}$

となる。

問 1 例 1 にならって、$\cos(2\alpha)$ を $\sin^2\alpha$ を使って ($\cos^2\alpha$ を使わないで) 表せ。

$(1)''$ $\cos(2\alpha)=$

例 2 $(1)'$ より

(3) $\boxed{\cos^2\alpha=\ \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

がなりたつ。これをコサインの**半角の公式**という。

問 2 問 1 の結果を使って $\big((3)$ 式のように$\big)$ $\sin^2\alpha$ を $\cos(2\alpha)$ を用いて表せ。

(4) $\sin^2\alpha=$

例 3 (3) 式において、$\alpha=\frac{\theta}{2}$ とおくと

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

となる。もし $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$ ならば

$(3)'$ $\boxed{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}}$

がなりたつ。これもコサインの半角の公式という。

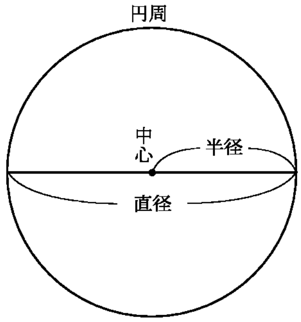
問 3 問 2 の結果を使って、$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$ のときに $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ を $\cos\theta$ で表せ。

$(4)'$ $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=$

＜円周率＞

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから

$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$



が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$

となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ~ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ、現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma$) の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率}\quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味、曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後、円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

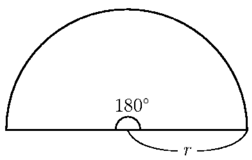
$$\pi = \frac{\ell}{2 \times 5} = \frac{\ell}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答})\ \ \ell = 10\pi\ (\text{cm})}$$

問 1　次の半径の円周を求めよ。

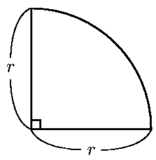
(1)　半径 0.5cm　　　　(2)　半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

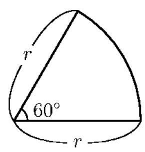
(1)　半径 r の半円の弧の長さ



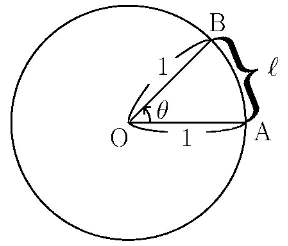
(2)　半径 r の $\frac{1}{4}$ 円の弧の長さ



(3)　半径 r, 中心角 60° の弧の長さ

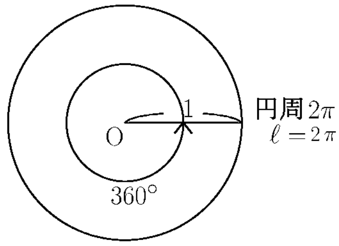


＜ 弧度法 1 ＞

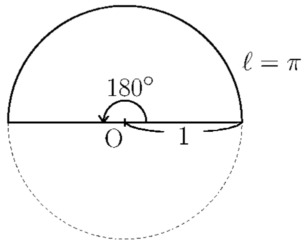


右図のように、角度θを、半径１の円の
弧 AB の長さℓで表す方法を**弧度法**という。
単位をラジアンで表し、
　$\theta^\circ = \ell$（ラジアン）
と記す。

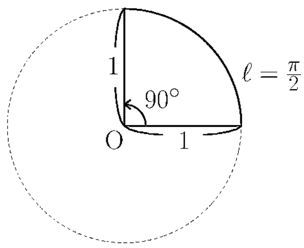
例 (1) $\theta = 360^\circ$ のとき、半径１の
　円周の長さは2πだから
　$360^\circ = 2\pi$（ラジアン）
　である。（πは円周率$\fallingdotseq 3.14$）



(2) $\theta = 180^\circ$ のとき、半径１の
　半円の長さはπだから
　$180^\circ = \pi$（ラジアン）



(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、半径１の
　円周の$\dfrac{1}{4}$の長さは$\dfrac{\pi}{2}$だから
　$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）



以上の例から、１（ラジアン）は
弧の長さが１に対する角度θで、
１（ラジアン）$= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$
である。

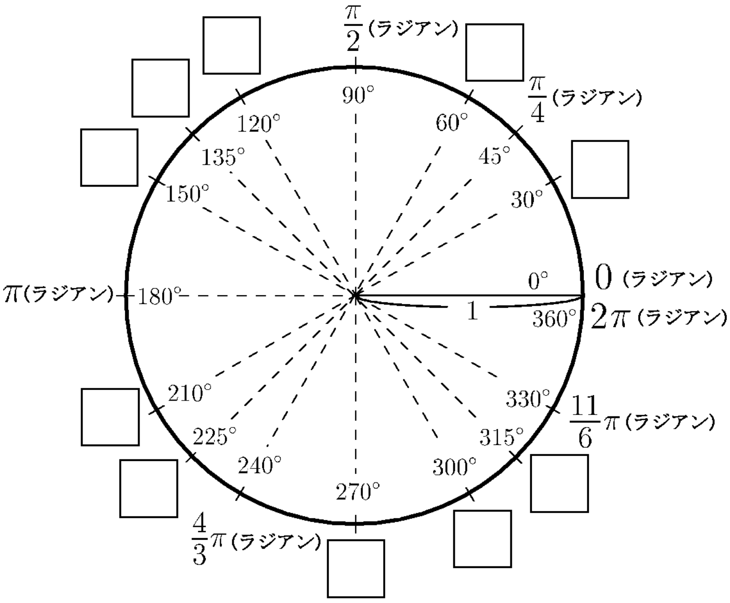
（注） 360°，180°，90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π

< 弧度法 2 >

問 1　右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の □ 内に弧度法にによる角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例　0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1)　$420° = 360° + 60° = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \frac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

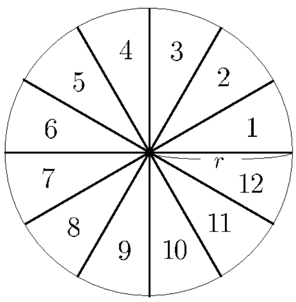
(2)　$-510° = -360° - 150° = -2\pi - \frac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\frac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

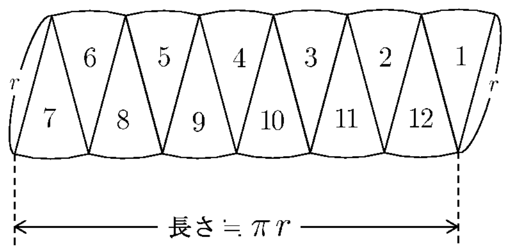
問 2　次の角度を弧度法で表せ。

(1)　450°　　(2)　$-240°$　　(3)　500°

(4)　$-390°$　　(5)　765°　　(6)　$-870°$

問 3　1 ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)



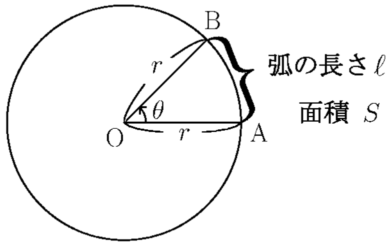


(1)　半径 r の円周の長さ ℓ を求めよ。　　　$\ell =$

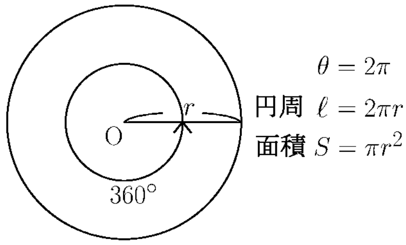
(2)　半径 r の円の面積 S を求めよ。　　　$S =$

＜弧度法 3＞

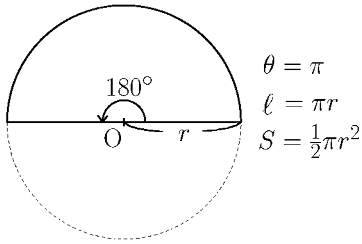
中心角 θ、半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



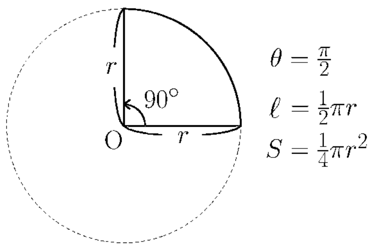
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは
　ℓ は円周の長さだから
$$\ell = 2\pi r$$
　であり S は円の面積だから
$$S = \pi r^2$$



(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは
　(1) の半分であるから
$$\ell = \pi r$$
$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$



(3) $\theta = \frac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90^\circ$ のときは
　(1) の $\frac{1}{4}$ であるから
$$\ell = \frac{1}{2}\pi r$$
$$S = \frac{1}{4}\pi r^2$$



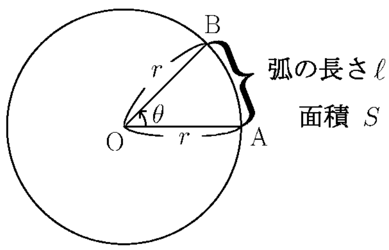
問 1　次の表を完成させよ。

度数法		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

問 2　上の表を参考にして、一般に角度が θ（ラジアン）であるとき弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$

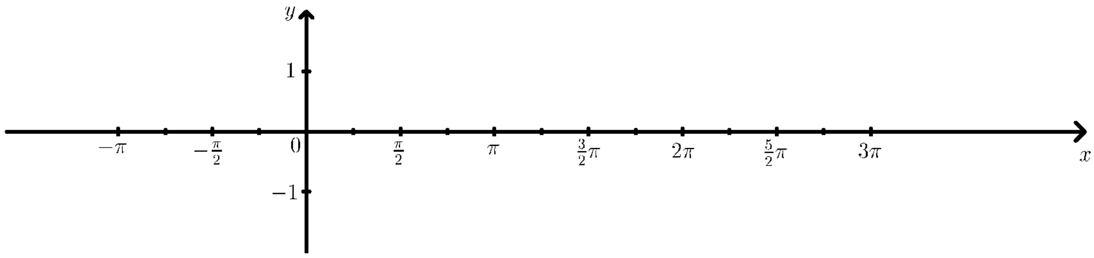


＜三角関数のグラフ＞

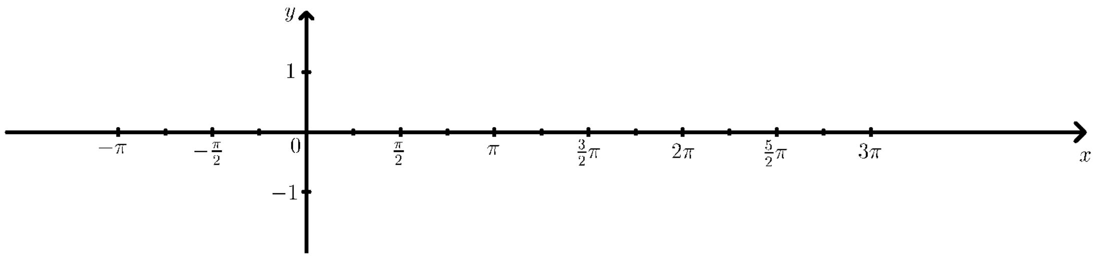
問　表を完成し、$y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x	度数法	$-180°$			$-45°$	$0°$		$90°$				$270°$	$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

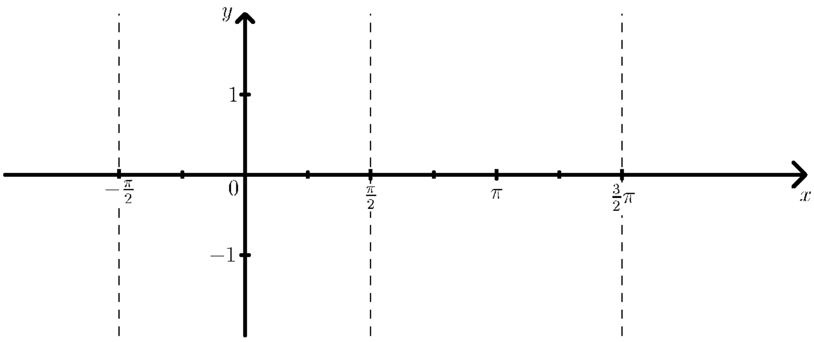


(2) $y = \cos x$



x	度数法	$-90°$			$-30°$	$0°$	$30°$		$60°$		$120°$			$180°$		$225°$	$240°$	
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$																		

(3) $y = \tan x$



＜ 正弦波 1 ＞

定数 A，B，C に対し、正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを
正弦波という。

例　加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

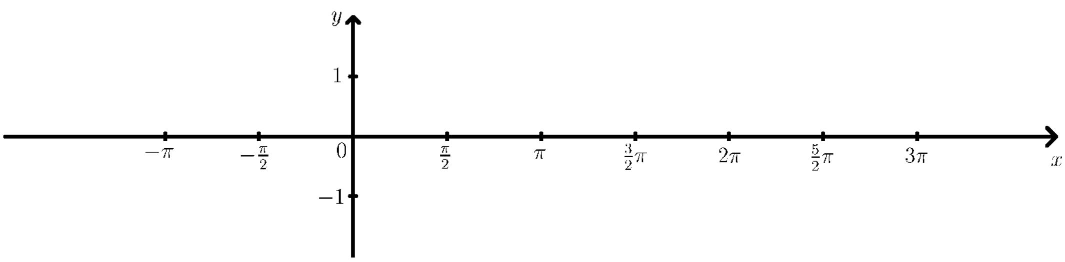
であるが $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$，$\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの
$y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフ
は $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。
このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより**位相が $\dfrac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより**位相が $\dfrac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**」という。
一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において、（　　）の中の部分
（この場合は $Bx + C$）を**位相**という。

問　次の表を完成し、$y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

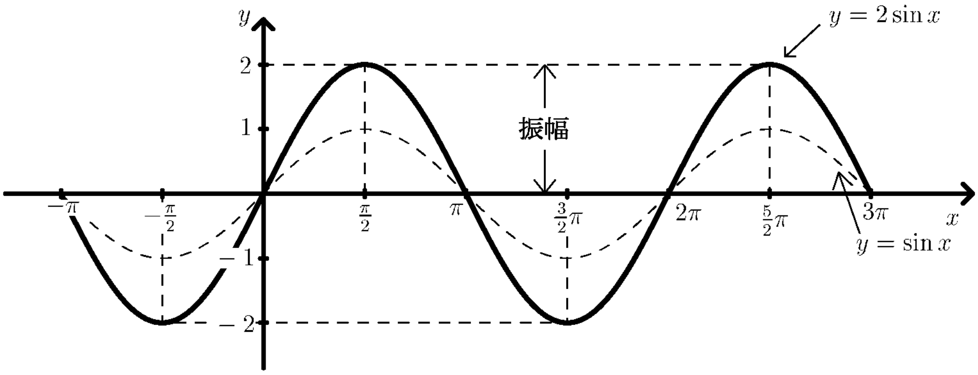
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



＜ 正弦波 2 ＞

例 $y = 2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、
それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0

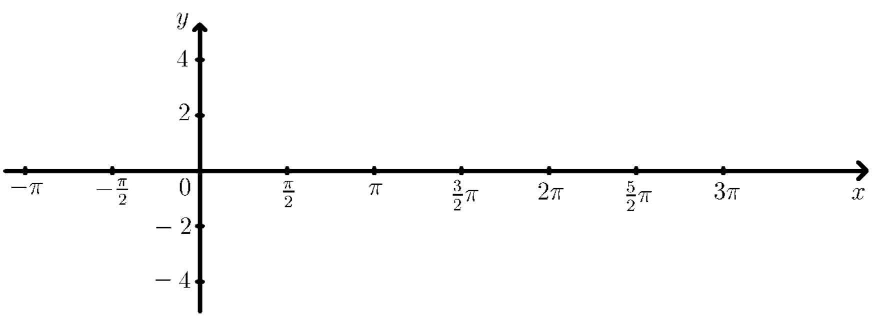


このグラフでは実線が $y = 2\sin x$ のグラフであり、点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は－2 である。

このような場合に「この正弦波の**振幅は 2**」という。

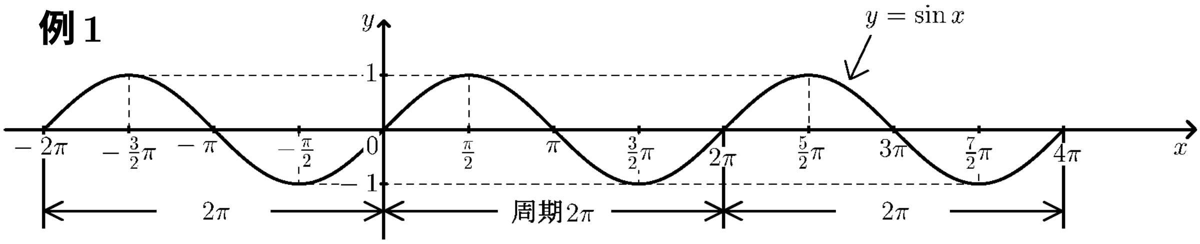
一般の正弦波の場合に、x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問 $y = -4\sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。
　また、このグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に何倍したものか答えよ。



＜ 正弦波 3 ＞

例 1

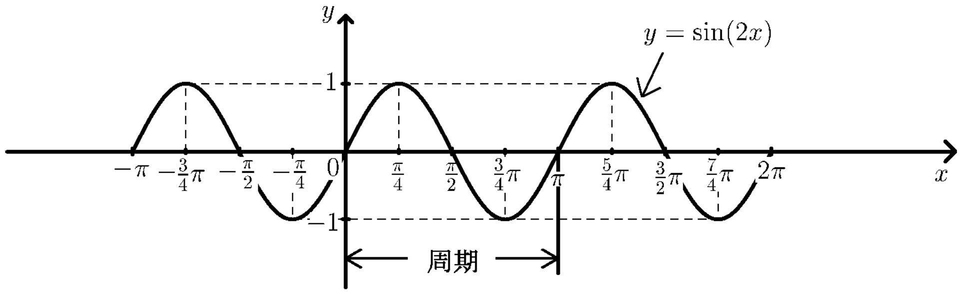


このグラフは $y = \sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい、一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$y = \sin x$ の周期は 2π である。

例 2 $y = \sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

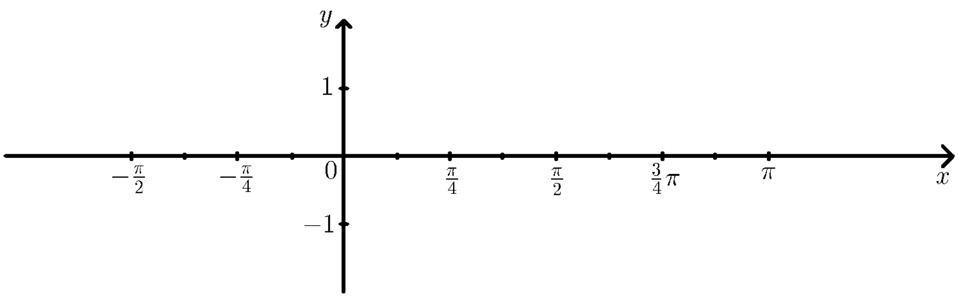


このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、

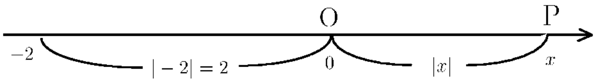
$y = \sin(2x)$ の周期は π である。

問 次の表を完成し、$y = \sin(4x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3}{8}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
$4x$													
$\sin(4x)$													



＜絶対値＞

問１ 実数 x の数直線上の位置 

を点 P (x) とする。原点 O(0) からの距離 OP を x の 絶対値といい、

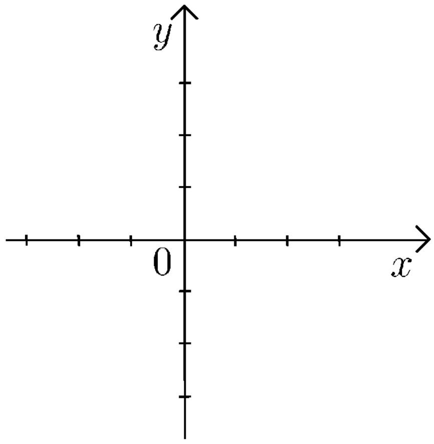
$$\mathrm{OP}=|x|$$

と表わす。例えば、$|2| = 2$ 、$|-2| = 2$ である。ここで、

$$y = |x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを書け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



又、以下の文章の $\boxed{}$ の中に適当な文字式を入れよ。

「右のグラフより、$y = |x|$ のグラフは

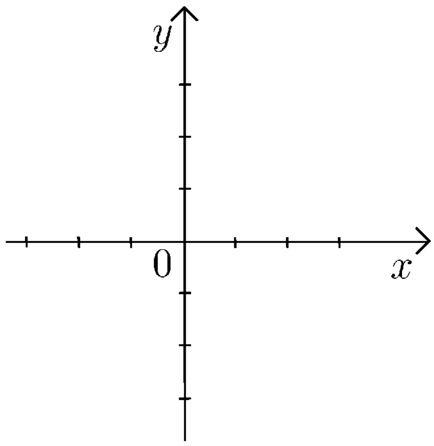
$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{}$ であり

$x < 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{}$ であることから、

$$y = |x| = \begin{cases} \boxed{} & (x \geqq 0) \\ \boxed{} & (x < 0) \end{cases}$$ が分かる。」

問２ 関数 $y = |x^2 - x - 2|$ に対し、表を完成し、

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



右図に、グラフを書き、以下の文章の $\boxed{}$ の中に、
適当な数字又は文字式を入れよ。
「右のグラフより、 $y = |x^2 - x - 2|$ のグラフは、
３つの領域に分かれた式

$$y = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} \boxed{} & (\boxed{} \leqq x) \\ \boxed{} & (\boxed{} < x < \boxed{}) \\ \boxed{} & (x \leqq \boxed{}) \end{cases}$$

で、表わされる。グラフをよく見ると、このグラフは２次関数

$$y=\boxed{}$$

のグラフで x 軸より下にある部分を、x 軸を対称軸として折り返したものと同じ。」

＜ガウス記号＞

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leqq x < n+1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例

$[1.5] = \ \ 1,$ 　　　$[2.76] = 2$

$[3.024] = \ \ 3,$ 　　　$[4.8196] = 4$

$[0.135] = \ \ 0,$ 　　　$[-0.52] = -1$

$[-1.23] = -2,$ 　　　$[-2.746] = -3$

問 1　次の値を求めよ。

(1) $[\,3\,] =$　　　(2) $[\,2.1\,] =$　　　(3) $[\,9.87\,] =$

(4) $[\,-1\,] =$　　　(5) $[\,-1.99\,] =$　　　(6) $[\,-2.1\,] =$

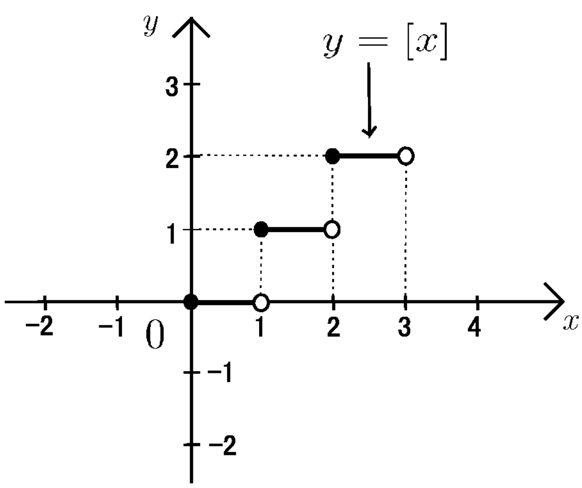
問 2　関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



< 左極限・右極限 1 >

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a - 0}$

(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a + 0}$

と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例 1 $\displaystyle\lim_{x \to 2-0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2 - 0}$とは　$x = 1.9,\ \ x = 1.99,\ \ x = 1.999, \cdots$

というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$$[1.9] = 1\ ,\ \ [1.99] = 1\ ,\ \ [1.999] = 1\ , \cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x \to 2-0}[x] = 1}$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x \to 2+0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2 + 0}$とは　$x = 2.1,\ \ x = 2.01,\ \ x = 2.001, \cdots$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$$[2.1] = 2\ ,\ \ [2.01] = 2\ ,\ \ [2.001] = 2\ , \cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x \to 2+0}[x] = 2}$$

(注) (1)　0 への左極限 $x \to 0 - 0$ を略して $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{x \to -0}$ とは $x = -0.1\ ,\ \ x = -0.01\ ,\ \ x = -0.001, \cdots$

というふうに 0 より小さい値をとりながら 0 に近づく極限である。

(2)　0 への右極限 $x \to 0 + 0$ を略して $\boxed{x \to +0}$ と書く。

$\boxed{x \to +0}$ とは $x = 0.1\ ,\ \ x = 0.01\ ,\ \ x = 0.001, \cdots$

というふうに 0 より大きい値をとりながら 0 に近づく極限である。

問　(1) $\displaystyle\lim_{x \to 3-0}[x]$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 3+0}[x]$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -0}[x]$　　(4) $\displaystyle\lim_{x \to +0}[x]$

< 左極限・右極限 2 >

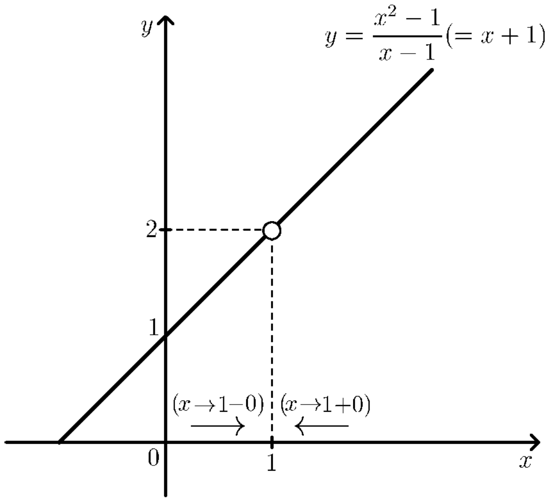
例 1　関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ で定義されないが、$x=1$ における左極限と右極限は

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

のように一致する。このような場合は単に

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

と書く。



一般の関数 $f(x)$ に対し、$x=a$ における左極限と右極限が同じ値 α に収束するとき、すなわち

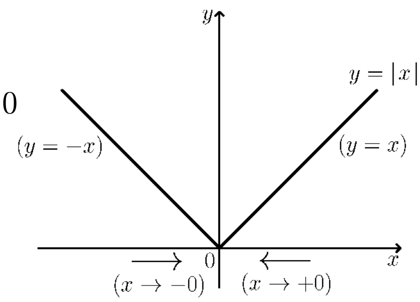
> $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$$
> の両方の式がなりたつとき、単に
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$
> と書く。

例 2　$f(x) = |x|$（絶対値）の場合

(1) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $\displaystyle\lim_{x\to -0} |x| = \lim_{x\to -0} (-x) = 0$

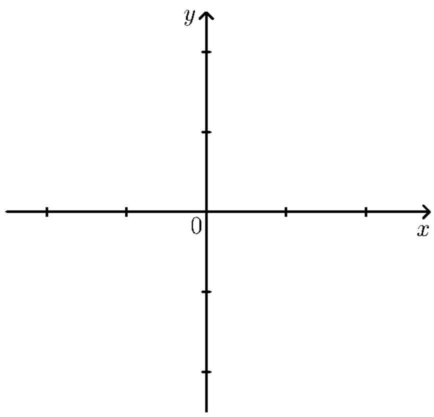
(2) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $\displaystyle\lim_{x\to +0} |x| = \lim_{x\to +0} x = 0$

よって (1) と (2) より $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0$

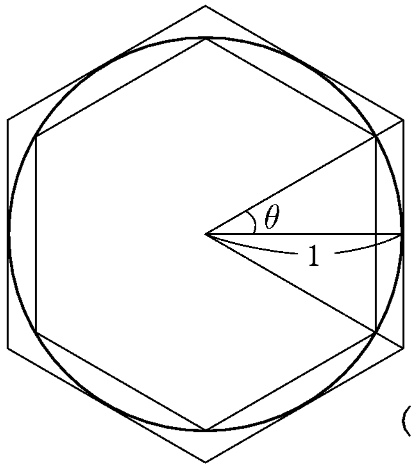


問　$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ に対し、次の極限値を求め、$y = \dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{|x|}{x} =$　　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{|x|}{x} =$



＜三角関数の極限 1＞

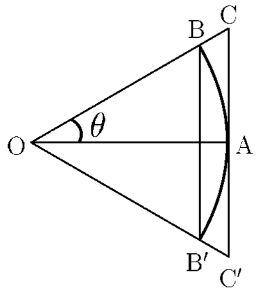


(図1)

円周率 π は半径 1 の円周の長さである。
アルキメデスは半径 1 の円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さを計って円周率 π を計算した。実際には正 6 角形から始めて正 12 角形、正 24 角形、48 角形、96 角形と計算して

$$3\frac{10}{71}(=3.1408) < \pi < 3\frac{1}{7}(=3.1429)$$

を得たのである。



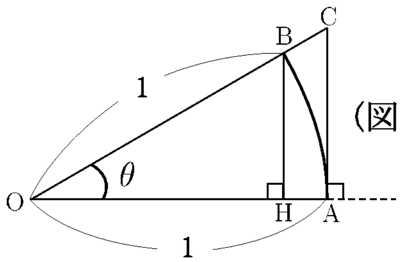
(図2)

アルキメデスの考えは図 2 の角 θ が小さくなるとき、弧 BAB' の長さは内接多角形の辺 BB' と外接多角形の辺 CC' で近似でき、さらに

$$\mathrm{BB}' \text{の長さ} < \text{弧}\,\mathrm{BAB}' \text{の長さ} < \mathrm{CC}' \text{の長さ}$$

がなりたつ。

ここではアルキメデスの考えを極限の式で表すことを目的にする。



(図3)

図 3 において

ℓ_1 : 線分 BH の長さ
ℓ_2 : 弧 AB の長さ
ℓ_3 : 線分 AC の長さ

とする。

問 1　ℓ_1 と ℓ_3 の長さを θ を用いた三角関数で表せ。

$\ell_1 =$　　　　　　　　　　,　　$\ell_3 =$

問 2　ℓ_2 の長さを θ を用いて表せ。(ヒント:半径 r、中心角 θ の弧の長さは 27 ページ問 2 の ℓ)

$\ell_2 =$

問 3　アルキメデスの考えより $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$ である。この不等式を θ で表し、単純化せよ。

問 4　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して問 3 で得られた不等式を次の形にせよ。

$$\boxed{} < \theta < \boxed{}$$

$\boxed{}$ の中を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

< 三角関数の極限 2 >

前ページの結果より、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \qquad \sin\theta \quad < \quad \theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

がわかる。右側の不等式で $\dfrac{\cos\theta}{\theta} > 0 \ (\theta > 0,\ \cos\theta > 0)$ より

$$\theta \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \theta \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$$

がわかる。

問 1 上の結果より、次の不等式が得られる。

$$(**) \qquad \cos\theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \quad < \quad \boxed{}$$

$(*)$ の左側の不等式を θ で割ることにより、□の中に適当な数字を入れよ。

問 2 $\theta \to +0$（右極限）のとき $\cos\theta \to \cos 0 = 1$ である。不等式 $(**)$ から次の極限値を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ =$$

問 3 $\theta \to -0$（左極限）のとき $\theta = -\theta_1$ とおくと $\theta_1 \to +0$ であるから

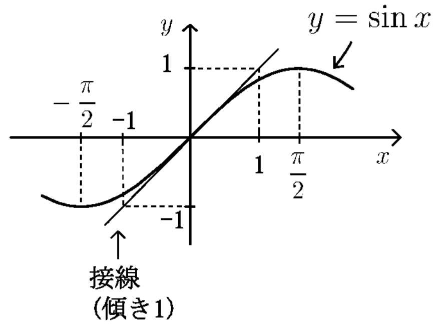
$$(2) \quad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} \quad = \quad \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1}$$

となる。$\sin(-\theta_1) = -\sin(\theta_1)$ と (1) 式の結果を利用して、
(2) 式の極限値を求めよ。

＜三角関数の極限 3＞

前ページの問 2，問 3 の結果より

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\ ,\qquad \lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$



である。従って右極限と左極限が一致するから

$$\boxed{\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\ =\ 1}$$

が成り立つ。

(注) 上の極限は「$y=\sin x$ のグラフの原点における接線の傾きが 1 である」ことを意味する。

例 1 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\cos\theta=\cos0=1$, $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\sin\theta=\sin0=0$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\ =\ \lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)}{\theta\qquad\times(1+\cos\theta)}\ =\ \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$=\ \lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta\,(1+\cos\theta)}\ =\ \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)=1\times\frac{0}{1+1}=0$$

例 2 加法定理と上の結果より

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(x+\theta)-\sin x}{\theta}\ =\ \lim_{\theta\to0}\frac{\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta-\sin x}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin x(\cos\theta-1)+\cos x\sin\theta}{\theta}\ =\ \lim_{\theta\to0}\left\{-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\sin x+\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos x\right\}$$

$$=-0\times\sin x+1\times\cos x=\cos x$$

問 加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ と上の結果を使って、次の極限値を求めよ。

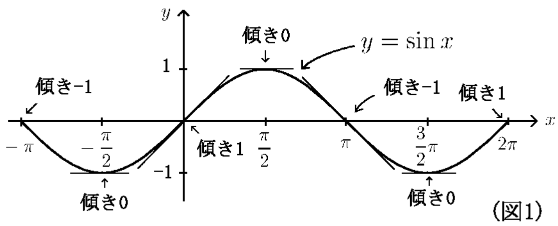
$$\lim_{\theta\to0}\frac{\cos(x+\theta)-\cos x}{\theta}=$$

< 三角関数の導関数 >

導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

より $\sin x$ の導関数は次の極限値

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$



(図1)

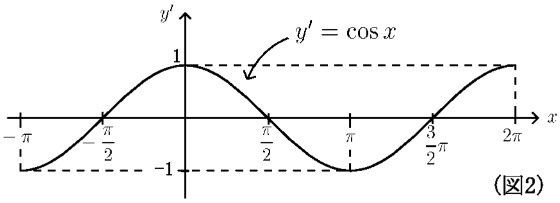
である。ここで 0 に近づく変数 h を θ に変えると、

前ページの結果より

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \cos x$$

であるから $\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$



(図2)

図 1 は $y = \sin x$ のグラフである。

図 1 の曲線の傾き (=接線の傾き) をグラフにしたものが図 2($y' = \cos x$) である。

$x = 0$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos 0 = 1$　　, $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x = \pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos(\pi) = -1$　　, $x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 0$

問 1　前ページの問の結果を用いて $\cos x$ の導関数を求めよ。

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

問 2　問 1 の結果から以下の傾きを求めよ。

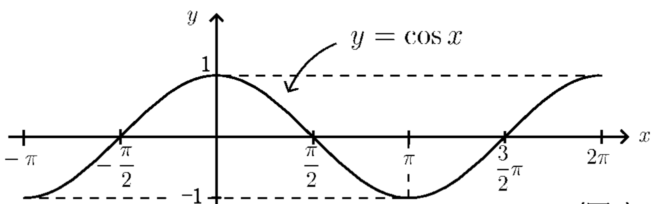
$x = 0$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \pi$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

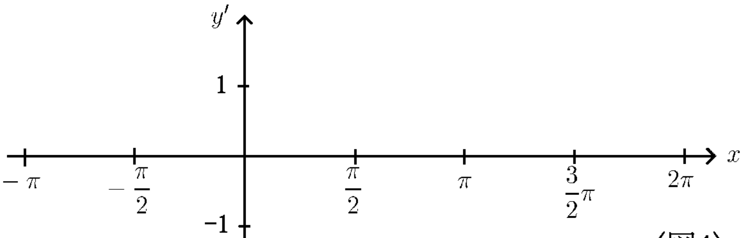
$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

$x = 2\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=



(図3)

問 3　$y = \cos x$ の**導関数**のグラフを $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で図 4 に書け。



(図4)

＜ 三角関数の微分・積分 ＞

前ページの結果より

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad , \qquad (\cos x)' = -\sin x}$$

例 1 (1) $(-\cos x)' = (-1 \times \cos x)' = -1 \times (\cos x)' = -1 \times (-\sin x) = \sin x$

(2) $(5\sin x + 4\cos x)' = 5 \times (\sin x)' + 4 \times (\cos x)' = 5\cos x - 4\sin x$

問 1 次の関数を微分せよ。

(1) $(3\sin x + 2\cos x)' =$　　　　(2) $(7 - 2\sin x + 5\cos x)' =$

上の微分の公式と例 1(1) より以下の不定積分が分かる。

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int \sin x dx = -\cos x + C}$$

例 2 $\displaystyle\int (2\cos x + 3\sin x)dx = 2\sin x - 3\cos x + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)dx$

(2) $\displaystyle\int (2\sin x - 7\cos x)dx$

例 3 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx = \Big[3\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin 0 = 3 \times 1 - 3 \times 0 = 3$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} 4\sin x dx = \Big[-4\cos x\Big]_0^{\pi} = -4\cos\pi + 4\cos 0 = -4 \times (-1) + 4 \times 1 = 8$

問 3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)dx$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (3\sin x - 2\cos x)dx$