高知工科大学

基礎数学ワークブック

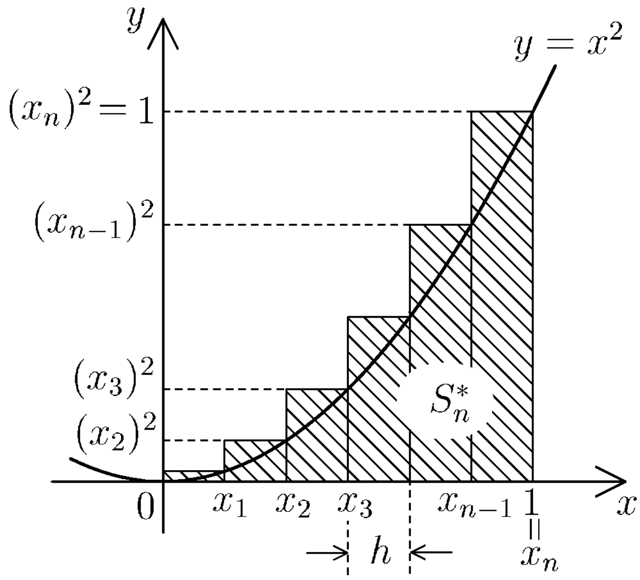
(2001年度版)

秋期入学者用

II

内容

- ◎ 不定積分
- ◎ 数列の和
- ◎ 区分求積法
- ◎ 定積分
- ◎ 指数･対数



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜ 原始関数 ＞

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

である。

問　次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 ＝

(2) x^5 の原始関数の一般形 ＝

(3) x^6 の原始関数の一般形 ＝

< 不定積分 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり、その一般形は

$$F(x) + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 $\int$ はインテグラル ($integral$) と読む。

例　(1) $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注)　記号 $\int \square \, dx$ は「微分すると $\square$ になる関数」という意味である。

問 1　前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^4 dx =$

(2) $\int x^5 dx =$

(3) $\int x^6 dx =$

問 2　例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。

$$\int x^n dx = \qquad\qquad (n \text{ は正の定数})$$

< 不定積分 2 >

前ページより n が正の整数のとき

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

がなりたつ。微分の性質

$$\Big(kf(x)\Big)' = k \times f'(x) \qquad (k \text{ は定数})$$

$$\Big(f(x) + g(x)\Big)' = f'(x) + g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\boxed{\begin{aligned} \int kf(x)dx &= k \times \int f(x)dx \qquad (k \text{ は定数}) \\ \int \Big\{f(x) + g(x)\Big\}dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}}$$

が得られる。

例 1 $$\int \left(9x^2 - 4x + 3\right) dx = 9\int x^2 dx - 4\int x dx + 3\int dx$$
$$= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 3 \times x + C$$
$$= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

（注 1）例の様な不定積分では、積分定数は 1 つにまとめて書いておけばよい。
(注 2) $(x)' = 1$ より $\int 1dx = x + c$ である。1 を略して $\int dx = x + c$ と書く。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 3x^3 dx =$　　　　(2) $\int \left(6x^2 - 4x - 5\right) dx =$

(3) $\int 3(1 - x^2)dx =$

例 2 $$\int \left(-2x^2 - 3x + 6\right) dx - \int \left(x^2 - 3x + 5\right) dx$$
$$= \int \Big\{\left(-2x^2 - 3x + 6\right) - \left(x^2 - 3x + 5\right)\Big\}dx = \int \left(-3x^2 + 1\right) dx = -x^3 + x + C$$

問 2　例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int \left(5x^2 - x - 6\right) dx - 5\int \left(x^2 - x + 1\right) dx$$

$=$

＜数列の和 1 ＞

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \frac{6}{n(2n+1)} \times \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

であるとすると、

$$a_1 = \frac{6}{1 \times (2 \times 1 + 1)} \times 1^2 = 2$$
$$a_2 = \frac{6}{2 \times (2 \times 2 + 1)} \times \{1^2 + 2^2\} = 3$$
$$a_3 = \frac{6}{3 \times (2 \times 3 + 1)} \times \{1^2 + 2^2 + 3^2\} = 4$$

である。

問 1　$n = 4, n = 5$ の場合の値を求めよ。

a_4=　　　　　　　　　　,　a_5=

問 2　上の結果から一般項 a_n を n の式で表せ。

a_n=

問 3　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

とする。問 2 の結果を用いて b_n を n の式で表せ。

b_n=

問 4　$n = 5$ の場合に問 3 の結果を用いて b_5 を計算せよ

b_5=

問 5　次式を計算し、問 4 の結果が正しいかどうか確かめよ。

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$=

＜数列の和 2＞

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が

$$a_n = 1 \ + 2 \ + 3 \ + \cdots \ + n, \qquad b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

であるとすると。このとき

$$a_1 = 1 \quad , \quad b_1 = 1^3 = 1$$
$$a_2 = 1 + 2 = 3 \quad , \quad b_2 = 1^3 + 2^3 = 9$$
$$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \quad , \quad b_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

である。

問 1　$n = 4, n = 5$ の場合の値を求めよ。

$a_4 =$　　　　　　, $b_4 =$

$a_5 =$　　　　　　, $b_5 =$

問 2　上の結果から b_n を a_n で表せ。

$b_n =$

問 3　等差数列の和と考えて a_n を n の式で表せ。

$a_n =$

問 4　問 2、問 3 の結果から b_n を n の式で表せ。

$b_n =$

問 5　$n = 5$ の場合に問 4 の結果を用いて b_5 を計算せよ

< 和の記号 Σ(シグマ) 1 >

数列の和を表すのに、記号 $\sum$ を使って、次のように書くこともある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ここで a_k は数列の第 k 項を表し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は、k が $1, 2, 3, \cdots, n$ とかわるときの a_k をすべて加えることを表す記号である。
$\sum$ は、（アルファベットの s の大文字）S に相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

例 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

問 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (k+1) =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} (2k^2) =$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3^k - 1) =$

＜ 和の記号 Σ(シグマ) 2 ＞

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$$

のように記号 $\sum$ を使うと、和が簡単に書ける。

例 1 (1)　$2+4+8+16+\cdots+2^n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$

(2)　$1^2+3^2+5^2+\cdots 99^2$ は第 k 項が $(2k-1)^2$
である数列の初項から第５０項までの和だから

$$1^2\ +\ 3^2\ +\ 5^2\ +\ \cdots\ +\ 99^2\ =\ \sum_{k=1}^{50}(2k-1)^2$$

問 1　次の和を、$\sum$ を使って表せ。

(1)　$1+2+3+4+\cdots+n=$

(2)　$1\times2+3\times4+5\times6+\cdots+(2n-1)(2n)=$

(3)　$1+3+5+\cdots+15=$

(4)　$2+6+10+14+\cdots+98=$

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n}a_k$　は数列 $\{a_k\}$ の第 m 項から第 n 項までの和を表す。

例 2 (1)　$\displaystyle\sum_{k=3}^{7}a_k=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(3k-2)=4+7+10+13+16$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^k=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n=1+3+9+\cdots+3^n$

問 2　次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=6}^{11}(k^2-1)=$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(2k-3)^2=$

< 和の記号 Σ(シグマ) 3 >

数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ と定数 c に対して、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \cdots + (a_n+b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k\end{aligned}$$

より、次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k & (c\text{ は定数})\end{array}}$$

等差数列の和（ワークブック秋期 I の 18 ページ）でわかったように

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

より $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

である。又 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個の和}} = n$ である。

例 $$\sum_{k=1}^{n}(4k+2) = 4\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = 4\times\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) + 2\times n = 2n^2+4n$$

問 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1) =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(10k-5) =$

＜和の記号 Σ(シグマ) 4＞

例題　等差数列

$$1,\ 5,\ 9,\ 13, \cdots,\ 4n-3, \cdots$$

の第 n 項までの和を求めよ。

（解）　$1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(4k-3) = 4\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) - 3 \times n = 2n^2 - n$$

問　次の等差数列の第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots,\ 2n-1, \cdots$

(2)　$2,\ 6,\ 10,\ 14, \cdots,\ 4n-2, \cdots$

(3)　$1,\ 7,\ 13,\ 19, \cdots,\ 6n-5, \cdots$

< 和の記号 Σ(シグマ) 5 >

4 ページ問 3 の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

問 1　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

問 2　次の和を求めよ。

(1)　$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

＜ 和の記号 Σ(シグマ) 6 ＞

5 ページ問 4 の結果より

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2}$$

が成り立つ。

問 1　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1)　$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^3$

$$= \left\{ \frac{10 \times (10+1)}{2} \right\}^2 = 55^2 = 3025$$

(2)　$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3$

$$= \left\{ \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \right\}^2 = \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right\}^2$$

問 2　次の和を求めよ。

(1)　$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 =$

(2)　$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 =$

＜和の記号 Σ(シグマ) 7＞

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を $\displaystyle\sum_{1\leqq k\leqq n} a_k$ などと記す場合もある。また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は、

k 以外の文字を使って、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_j$ のように書いてもよい。

例 1　$\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{j=2}^{6} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

問 1　次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i =$　　　　　　　　　　, (2) $\displaystyle\sum_{j=5}^{11} y_j =$

(3) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} i^2 =$　　　　　　　　　　, (4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-2} j^3 =$

例 2　$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=2}^{4}(x_i+y_j)\right\} = \sum_{i=1}^{3}\{(x_i+y_2)+(x_i+y_3)+(x_i+y_4)\}$

$$\begin{aligned} = \ & (x_1+y_2)+(x_1+y_3)+(x_1+y_4) \\ & +(x_2+y_2)+(x_2+y_3)+(x_2+y_4) \\ & +(x_3+y_2)+(x_3+y_3)+(x_3+y_4) \end{aligned}$$

(注) 例 2 の和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(x_i+y_j) = \sum_{\substack{1\leqq i\leqq 3\\ 2\leqq j\leqq 4}}(x_i+y_j)$ 等で表すこともある。

問 2 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

$$\sum_{i=3}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{4}(x_i-y_j)\right\} =$$

＜区分求積法 1＞

例　曲線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれた部分の面積 S を次のようにして求める。

（ $a \leqq x \leqq b$ を満たす実数 x の集合を **区間** $[a, b]$ という。）

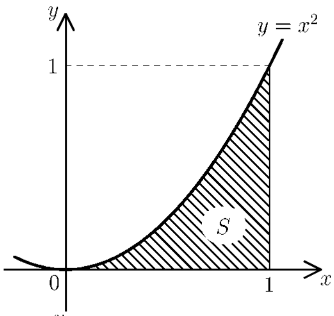
区間 $[0, 1]$ を n 等分し、分割した分点を

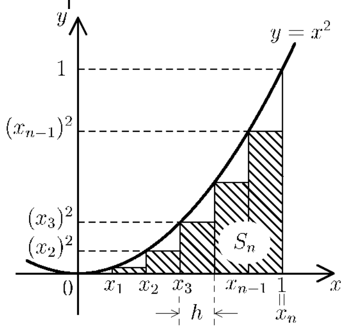
$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$

とする。分割した小区間の幅を h とおくと、

$h = \dfrac{1}{n},\ x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1$

となる。各分点 x_k から曲線 $y = x^2$ までの高さ $\left(= (x_k)^2\right)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n - 1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は





$$
\begin{aligned}
S_n &= (x_1)^2 h + (x_2)^2 h + (x_3)^2 h + \cdots + (x_{n-1})^2 h \\
&= h^2 h + (2h)^2 h + (3h)^2 h + \cdots + \Big((n-1)h\Big)^2 h \\
&= \left\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right\} h^3 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right\} h^3
\end{aligned}
$$

10 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、 $h = \dfrac{1}{n}$ だから

$$
S_n = \left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)
$$

ここで、分割を限りなく細かくする（ $n \to \infty$ とする）と、 S_n は上の面積 S に近づいていく。

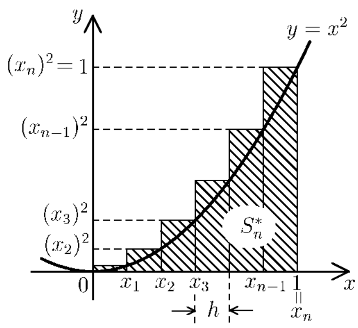
問　S の値を S_n の極限として求めよ。

$$
S = \lim_{n \to \infty} S_n =
$$

＜区分求積法 2＞

面積を求めるのに、前ページのように区間を小区間に細分し、和の極限として求める方法を **区分求積法** という。

問　前ページの面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n^* は



$$S_n^* = (x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h+(x_n)^2h$$

となる。ただし

$$h=\frac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh=1$$

である。S_n^* を n だけの式で表し、和の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n^*$ を求めよ。

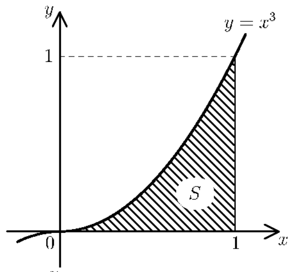
＜区分求積法 3＞

例　曲線 $y=x^3$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた部分の面積 S を区分求積法で求める。区間 $[0,1]$ を n 等分して、その分点を

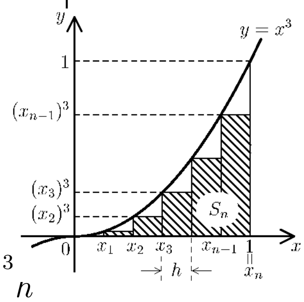
$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

とする。分割した小区間の幅を h とすると、

$$h=\frac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h,\cdots,x_n=nh=1$$



である。各分点 x_k から曲線 $y=x^3$ までの高さ $\Bigl(=(x_k)^3\Bigr)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は



$$S_n=(x_1)^3h+(x_2)^3h+(x_3)^3h+\cdots+(x_{n-1})^3h$$

$$=h^3h+(2h)^3h+(3h)^3h+\cdots+\Bigl((n-1)h\Bigr)^3n$$

$$=\left\{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3\right\}h^4=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right\}h^4$$

11 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、

$h=\dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2\times\left(\frac{1}{n}\right)^4=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

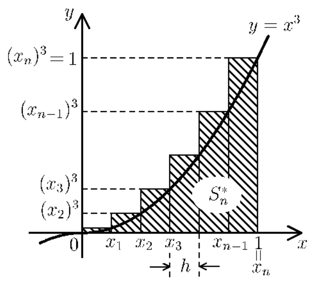
よって

$$S=\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$$

問　例と同じ面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n^* は

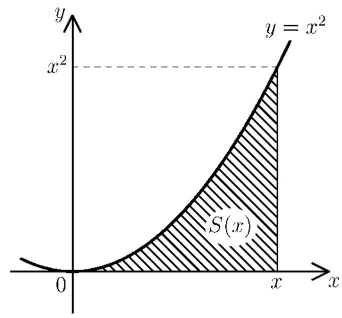
$$S_n^*=(x_1)^3h+(x_2)^3h+(x_3)^3h+\cdots+(x_n)^3h$$

となる。S_n^* を n だけの式で表し、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*$ を求めよ。



＜面積関数 $S(x)$ 1＞

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



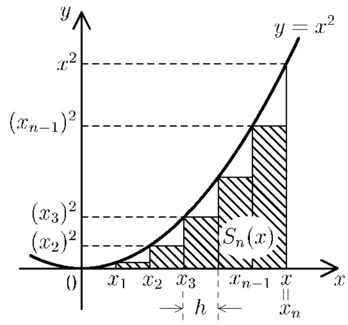
区間 $[0,x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h = \frac{x}{n}\ ,\ x_1 = h\ ,\ x_2 = 2h\ ,\cdots,\ x_n = nh(=x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned} S_n(x) &= (x_1)^2h + (x_2)^2h + \cdots + (x_{n-1})^2h \\ &= h^2h + (2h)^2h + \cdots + \bigl((n-1)h\bigr)^2h \\ &= \left\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right\}h^3 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right\}h^3 \end{aligned}$$

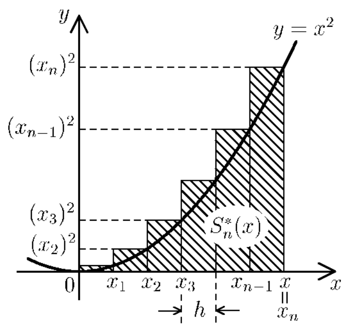
10 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、$h = \dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x) = \left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\} \times \left(\frac{x}{n}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)x^3$$

よって

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

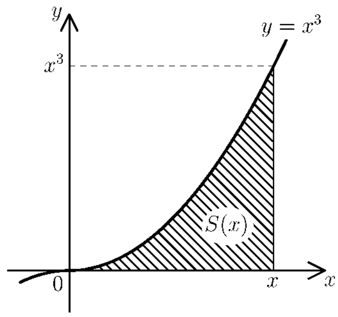


$$S_n^*(x) = (x_1)^2h + (x_2)^2h + \cdots + (x_n)^2h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$ を求めよ。

＜面積関数 $S(x)$ 2＞

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



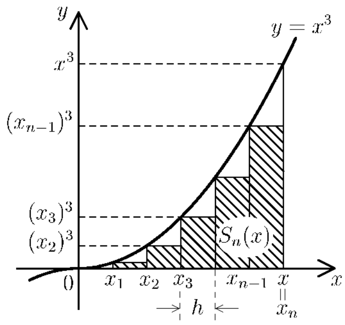
区間 $[0, x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h = \frac{x}{n}\ ,\ x_1 = h\ ,\ x_2 = 2h\ , \cdots ,\ x_n = nh (= x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned} S_n(x) &= (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + \cdots + (x_{n-1})^3 h \\ &= h^3 h + (2h)^3 h + \cdots + \big((n-1)h\big)^3 h \\ &= \big\{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\big\} h^4 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right\} h^4 \end{aligned}$$

11 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、$h = \dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x) = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \times \left(\frac{x}{n}\right)^4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 x^4$$

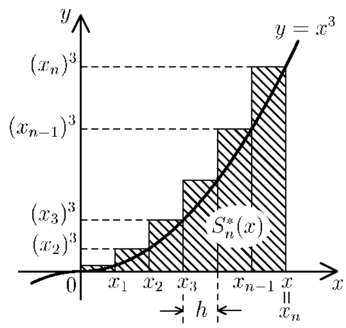
よって

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 x^4 = \frac{1}{4}x^4$$

問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

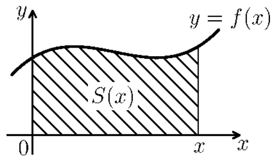
$$S_n^*(x) = (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + \cdots + (x_n)^3 h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$ を求めよ。



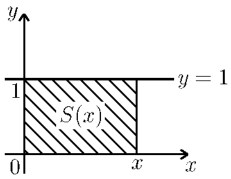
＜面積関数 $S(x)$ 3 ＞

正の値をとる関数 $f(x)$ に対し、右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

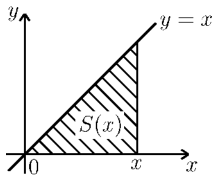


問 1 下図および 16,17 ページの結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 1$ のとき $S(x) =$



(2) $f(x) = x$ のとき $S(x) =$



(3) $f(x) = x^2$ のとき $S(x) =$

(4) $f(x) = x^3$ のとき $S(x) =$

問 2 問 1 の結果から $f(x) = x^4$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

問 3 問 1、問 2 の結果から $f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

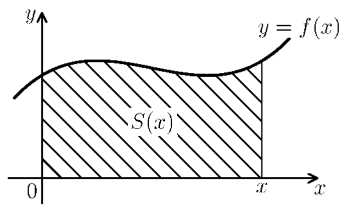
問 4 上の結果から考えて、一般の正の関数 $f(x)$ に対する面積関数を $S(x)$ とするとき、 $f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか示せ。

＜面積関数 $S(x)$ 4＞

前ページの結果から、一般の正の関数 $f(x)$ に対する
面積関数 $S(x)$ とすると

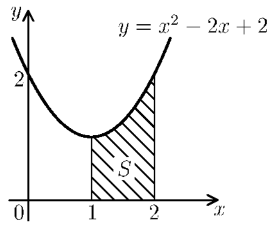
$$\big(S(x)\big)' = f(x)$$

の関係がある。これから、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の
一つであり、$S(0)=0$ を満たす。即ち



$$\boxed{S(x) = \int f(x)dx\ ,\ S(0) = 0}$$

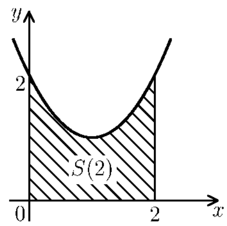
例 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ のとき



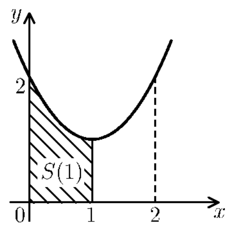
$$S(x) = \int (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C$$

で $S(0)=0$ より $C=0$ 。 よって、

$$S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

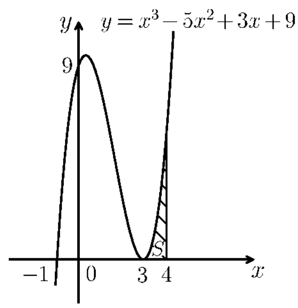


である。曲線 $y = x^2 - 2x + 2$ と x 軸および
直線 $x=1$ と $x=2$ で囲まれた部分
(右図の斜線部分) の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= S(2) - S(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\times 2^3 - 2^2 + 2\times 2\right) - \left(\frac{1}{3}\times 1^3 - 1^2 + 2\times 1\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

問 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ のとき、面積関数 $S(x)$
を求め、右図の斜線部分の面積 S を求めよ。



＜定積分の定義＞

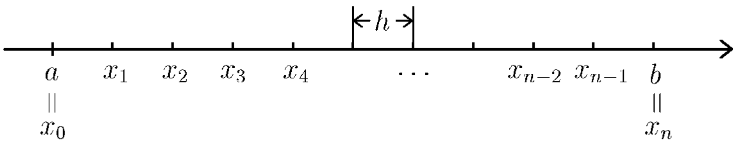
連続な関数 $f(x)$ と区間 $[a, b]$ に対し、$[a, b]$ を n 等分した分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とし、分割した小区間の幅を h とすると、$h = \dfrac{b-a}{n}$ であり、

$$x_1 = a + h \ , \ x_2 = a + 2h \ , \ \cdots \ , \ x_n = a + nh \ (= b)$$

となる。



今

$$S_n^* = f(x_1)h + f(x_2)h + \cdots + f(x_n)h$$

とおいて、$n \to \infty$ とした極限を

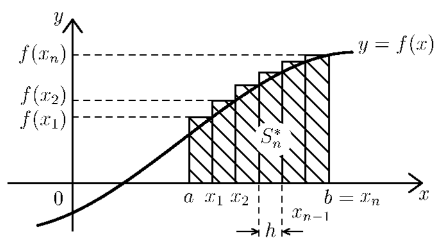
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} \{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}h}$$

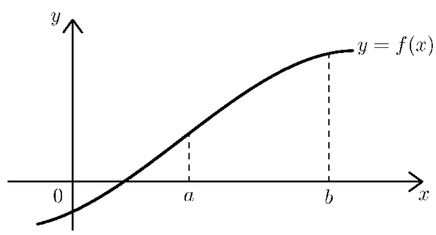
と書いて、関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの**定積分**という。

問 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき、S_n^* は右上図の斜線部分の面積を意味する。このとき極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*$$

は何を意味するか？
右下図を使って説明せよ。





＜微分積分学の基本定理＞

$f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$
は右上図の斜線部分の面積 S （図１）
を表す。面積関数 $S(x)$ を使うと

$$S = S(b) - S(a)$$

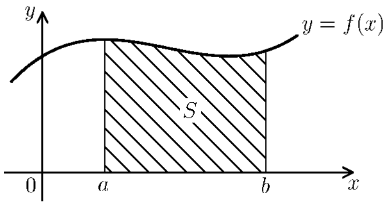
より

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

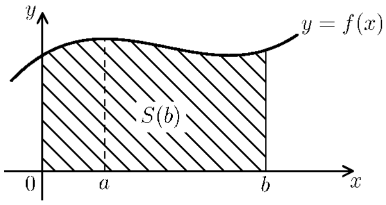
である。ここで $f(x)$ と $S(x)$ の関係は

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

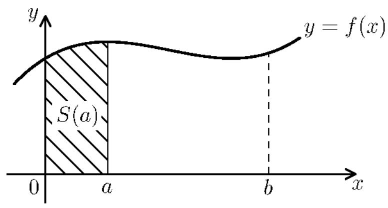
である。これを**微分積分学の基本定理**という。



（図１）



（図２）



（図３）

＜証明の概略＞

導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

である。$S(x+h) - S(x)$ は図５の斜線部分の面積であり h が小さいときは図６の長方形の面積で近似できる。すなわち

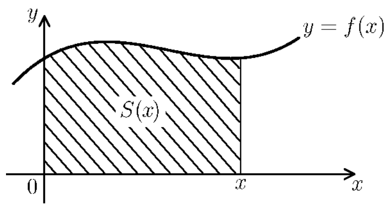
$$S(x+h) - S(x) \fallingdotseq f(x)h$$

より

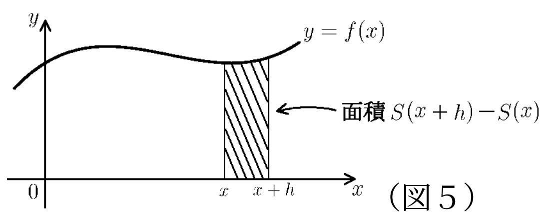
$h \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$

よって

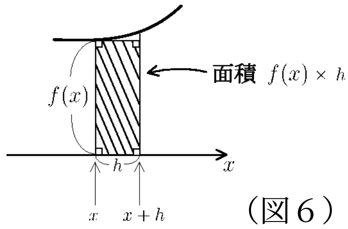
$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$



（図４）



（図５）



（図６）

<定積分 1>

前ページの結果から

$$S'(x) = f(x)$$

のとき、すなわち

$$\int f(x)dx = S(x) + C$$

のとき定積分は

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

で計算される。今後はこの計算式を定積分の定義とする。ここで $S(b) - S(a)$ を $\Big[S(x)\Big]_a^b$ と書くことにする。つまり

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)}$$

である。

例 (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 dx + C$　より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 dx + C$ より

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times 1^4 = \frac{15}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^7 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^9 xdx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^4 x^2 dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^3 x^3 dx$

＜定積分 2＞

前ページより 定積分の計算式は

$$\boxed{\int f(x)dx = S(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)}$$

であった。この計算式から $a < b$ でない場合でも

$$\int_a^a f(x)dx = S(a) - S(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = S(a) - S(b) = -(S(b) - S(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

となる。

例　(1) $\displaystyle\int_1^1 (2x^4 - 5x)dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_2^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_2^1 = 1^3 - 2^3 = -7$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^1 (2x+1)dx$　　　(2) $\displaystyle\int_2^2 (3x^2 - 2x)dx$

(3) $\displaystyle\int_3^3 x^4 dx$　　　(4) $\displaystyle\int_3^1 x^3 dx =$

(5) $\displaystyle\int_2^{-1} x^4 dx$　　　(6) $\displaystyle\int_3^{-3} (3x^2 - 1)dx$

(7) $\displaystyle\int_4^0 (1 - x^2)dx$　　　(8) $\displaystyle\int_2^{-2} (3x^3 - 7x + 1)dx$

＜分数の微分＞

ここでは関数 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$ などの関数の導関数を具体的に計算する。

例 1
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

例 2
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^2x^2}=-\frac{2}{x^3}$$

問 1　例 1、例 2 と同様なやり方で次の導関数を求めよ。
$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}=$$

問 2　例 1、例 2、問 1 の結果を参考にして、次の導関数を類推せよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'=$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=$

問 3　上の結果を利用して次の導関数を求めよ。

(1) $\left(-\dfrac{1}{x}\right)'=$　　(2) $\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'=$

(3) $\left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)'=$　　(4) $\left(-\dfrac{1}{4x^4}\right)'=$

(5) $\left(-\dfrac{1}{nx^n}\right)'=$　　(6) $\left(-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right)'=$

＜整数指数＞

例1 自然数nとmに対し、$n > m$ならば

$(*)$　　$\boxed{2^n \div 2^m = 2^{n-m}}$

が成り立つ。今$n = m$のとき$(*)$の左辺は1であり、右辺は2^0となる。そこで

$\boxed{2^0 = 1}$　(ゼロ乗=1)

と定めることにする。$(*)$式で$n = 0$のとき左辺は$\dfrac{1}{2^m}$であり、
右辺は2^{-m}であるから

$$\boxed{2^{-m} = \frac{1}{2^m}}$$

と定めると、全ての整数nとmに対して$(*)$式が成り立つ。

一般に正の数aと自然数mに対し

$$\boxed{a^0 = 1 \text{ (ゼロ乗=1)} \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

と定めることにする。このように決めると全ての整数nとmに対し

$$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

が成り立つ。

例2　$5^0 = 1$　,　$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$$3^5 \times 9^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{9^2} = \frac{3^5}{3^4} = 3$$

$$(2^3)^{-2} = \frac{1}{(2^3)^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

問 次の値を求めよ。

(1) 1^0　　(2) 1^{-1}　　(3) 3^{-2}

(4) 8×4^{-2}　　(5) $3^3 \times 9^{-2}$　　(6) $6^3 \times 3^{-4} \div 4^{-2}$

(7) $(2^2)^3$　　(8) $(3^{-2})^2$　　(9) $(5^{-1})^{-3}$

＜負の累乗関数の微分・積分＞

24 ページの結果より

$$\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

である。これを整数指数で表すと、

$$\boxed{\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}}$$

となる。これは微分の公式

$$\text{公式} \ : \ \boxed{(x^p)' = px^{p-1}} \qquad (\, p \text{ は整数} \,)$$

において $p = -n$ の場合である。すなわち p は負の整数でもこの公式はなりたつ。

例 1　(1)　$(x)' = \left(x^1\right)' = 1x^0 = 1$　，　(2)　$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \times x^{-1} = 0$

(3)　$\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

問 1　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$　　(3) $\left(\dfrac{1}{x^9}\right)' =$

例 2　24 ページ問 3 の結果より

$$\left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right)' = \frac{1}{x^n}$$

である。不定積分で表すと

$$\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

となる。これを整数指数で表すと

$$\int x^{-n}dx = -\frac{1}{n-1}x^{-n+1} + C = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + C$$

となる。これは積分の公式

$$\text{公式} \ : \ \boxed{\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C} \qquad (\, p \text{ は整数} \,)$$

で p は負の整数でも成り立つことを示している。

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx =$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9}dx =$

(3) $\displaystyle\int x^{-4}dx =$　　(4) $\displaystyle\int x^{-11}dx =$

＜累乗根 1＞

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m=1$ のときは $\dfrac{n}{1}=n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例 1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2=2}$ である。

このxは無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の**2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x=\sqrt{2}}$ と書く。

例 2 体積が 2 である立方体のいっぺんの長さを x とすると $\boxed{x^3=2}$ である。

この x は無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の**3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x=\sqrt[3]{2}}$ と書く。

例 3 $x=\sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4=2}$ である。

x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 つの**4 乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して、n 乗すると a になる正の数を x とする。

つまり $\boxed{x^n=a}$ $(x>0)$ である。この x を a の**n 乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[n]{a}}$ と書く。

平方根、立方根、n 乗根等をまとめて **累乗根**（るいじょうこん） という。

また記号 $\sqrt{\ }$、$\sqrt[3]{\ }$、$\sqrt[n]{\ }$ をまとめて**根号**という。

(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}}$ と書く。

例 4 累乗根は常に無理数とは限らない。たとえば

$$\sqrt{49}=7,\quad \sqrt[3]{0.125}=0.5,\quad \sqrt[4]{81}=3,\quad \sqrt[5]{32}=2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{81}$　(2) $\sqrt[3]{27}$　(3) $\sqrt[3]{64}$

(4) $\sqrt[4]{625}$　(5) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}}$　(6) $\sqrt{\dfrac{27}{12}}$

＜累乗根 2＞

例 1　$\sqrt[3]{2}$ は 3 乗して 2 になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ がなりたつ。

例 2　$x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$

より $x = \sqrt[3]{10}$ つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ がなりたつ。

例 3　$y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ がなりたつ。

(注) $\sqrt[n]{}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または 0(ゼロ)) がはいる。

負の数は根号の中に入れない。

例 4　(1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問　次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

(2) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

＜累乗根 3＞

例 1 (1) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} = 2 \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2} = 2 \times \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{56}$　　(2) $\sqrt[4]{324}$　　(3) $\sqrt[4]{243}$

例 2 $x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3 = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$
$$= \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5 \times 5 = 5^2$$

よって $x^3 = 5^2$ より $x = \sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

がなりたつ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式がなりたつ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

例 3 (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(5^2\right)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(2) $\sqrt[3]{8^4} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$　　(2) $\left(\sqrt[9]{125}\right)^3$

(3) $\sqrt[2]{9^3}$　　(4) $\sqrt[10]{32^2}$

＜分数指数 1＞

例 1 自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\text{ 個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m \times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

(1) $$2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

(2) $$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ \ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例 2 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$　　(2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$　　(4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 次の値を求めよ。

(1) $169^{\frac{1}{2}}$　　(2) $125^{\frac{1}{2}}$　　(3) $36^{\frac{3}{2}}$

(4) $343^{\frac{2}{3}}$　　(5) $256^{\frac{3}{4}}$　　(6) $64^{\frac{7}{6}}$

(7) $4^{-\frac{1}{2}}$　　(8) $1000^{-\frac{2}{3}}$　　(9) $625^{-\frac{3}{4}}$

＜分数指数 2＞

例 1 $x = \sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{(5^2)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$ より $x = \sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

例 2 $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{4^3}$　(2) $\sqrt[9]{6^3}$　(3) $\sqrt[3]{4^6}$　(4) $\sqrt[6]{8^4}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

(別解) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

例 4 $\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{5^3} \times \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{5 \times 5^3 \times 5^2} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(別解) $\sqrt[6]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$

例 5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

(別解) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[2]{2} \times \sqrt[4]{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt[2]{8}}{\sqrt[4]{4}}$

(3) $\left(\sqrt[6]{\sqrt{8}}\right)^4$　(4) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}}$

＜指数法則＞

　分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

> 正の数 a と b、および有理数 p と q に対して
>
> $1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$　,　$2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$
>
> $3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$　,　$4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

　累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1　(1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$　　(2) $\sqrt[4]{a} \times \left(\sqrt[4]{a}\right)^3$

(3) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{9}{2}}$　　(4) $\sqrt[3]{a^8} \div (\sqrt[3]{a})^2$

(5) $\sqrt[3]{a^2} \div (\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}}$　　(6) $\left(\sqrt[9]{\sqrt[4]{a^{-6}}}\right)^{-12}$

例 2　$\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

（注）ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $(2^2 \times 5^5)^{\frac{1}{9}} \times (2^7 \times 5^4)^{\frac{1}{9}}$　　(2) $\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108}$

＜分数乗の微分 1＞

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ 　などの関数の導関数を求めたい。

例 1　$(\sqrt{x})' = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

ここで $\sqrt{x+h} = a$, $\sqrt{x} = b$ とおくと $h \to 0$ のとき $a \to b$ であり

$x + h = a^2$, $x = b^2$ より $h = a^2 - b^2$

だから

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{a \to b} \frac{a-b}{a^2 - b^2} = \lim_{a \to b} \frac{1}{a+b}$$

$$= \frac{1}{b+b} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例 2　$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

ここで $\sqrt[3]{x+h} = a, \sqrt[3]{x} = b$ とおくと $h \to 0$ のとき $a \to b$ であり

$x + h = a^3$, $x = b^3$ より $h = a^3 - b^3$

だから

$$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{a \to b} \frac{a-b}{a^3 - b^3} = \lim_{a \to b} \frac{1}{a^2 + ab + b^2}$$

$$= \frac{1}{3b^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \left(= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

（注）　ここで

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

を使った。さらに

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

が成り立つ。（右辺を展開すると（各項がうち消しあって）左辺の形になる）

問　上の例を参考にして、次の極限値を求めよ。

$$(\sqrt[4]{x})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{x+h} - \sqrt[4]{x}}{h}$$

＜分数乗の微分 2＞

例 1 $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^5}-\sqrt[3]{x^5}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{x+h})^5-(\sqrt[3]{x})^5}{h}$

ここで $\sqrt[3]{x+h}=a, \sqrt[3]{x}=b$ とおくと $h\to 0$ のとき $a\to b$ となり

$$x+h=a^3,\quad x=b^3 \quad \text{より} \quad h=a^3-b^3$$

だから

$(\sqrt[3]{x^5})' = \lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{x+h})^5-(\sqrt[3]{x})^5}{h} = \lim_{a\to b}\dfrac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$

$= \lim_{a\to b}\dfrac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \lim_{a\to b}\dfrac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^2+ab+b^2}$

$= \dfrac{5b^4}{3b^2} = \dfrac{5}{3}b^2 = \dfrac{5}{3}(\sqrt[3]{x})^2 = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

例 2 (1) 前ページ例 1 より $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

となる。

(2) 前ページ例 2 より $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}$$

となる。

(3) 前ページ問の結果より $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}$$

となる。

(4) 上の例 1 の結果より $(\sqrt[3]{x^5})' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}}$$

となる。

一般に

$$\boxed{(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}}$$

がなりたつ。これは微分の公式 $\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$ で p が分数でも成り立つことを意味する。

問 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\sqrt{x^3}\right)'$　(2) $\left(\sqrt[5]{x^6}\right)'$　(3) $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'$　(4) $\left(\sqrt[7]{x^4}\right)'$

＜分数乗の不定積分＞

前ページより微分の公式

$$\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$$

は p が分数の場合もなりたつことがわかった。これより

$$\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)' = \frac{1}{p+1}(x^{p+1})' = \frac{1}{p+1} \times (p+1)x^p = x^p$$

であるから

$$\boxed{\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C}$$

がなりたつ。p は分数でもよい。

例 1　$\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$

例 2　$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

例 3　$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1}x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

$$= -3 \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^4}dx$　　(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$　　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$

＜分数乗の定積分＞

p が分数の場合にも

$$\boxed{\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C} \qquad \text{(不定積分)}$$

が成り立つ。従って定積分は

$$\boxed{\int_a^b x^p dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_a^b = \frac{1}{p+1}b^{p+1} - \frac{1}{p+1}a^{p+1}} \qquad \text{(定積分)}$$

となる。

例 (1) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x^2}dx = \int_0^8 x^{\frac{2}{3}}dx = \left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}\right]_0^8 = \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8$

$$= \frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{5} \times 0 = \frac{3}{5} \times (2^3)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \times 2^5 = \frac{3 \times 32}{5} = \frac{96}{5}$$

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^3}dx = \int_1^4 x^{-3}dx = \left[\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right]_1^4 = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(3) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^9 = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 2 \times \sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 5$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_8^{27} \sqrt[3]{x}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

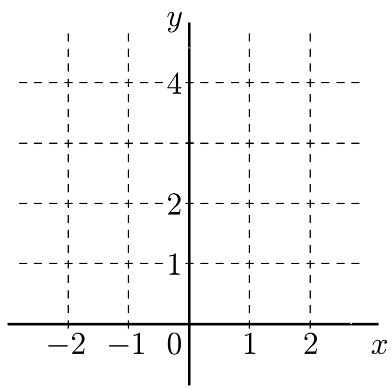
(6) $\displaystyle\int_9^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

＜指数関数＞

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

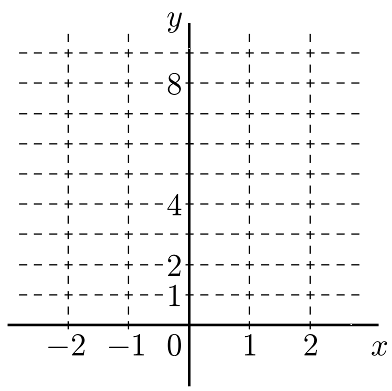
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



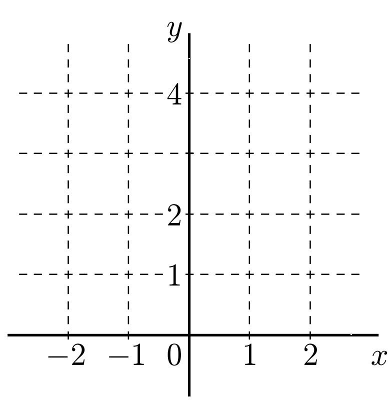
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



＜指数方程式＞

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$　(2) $4^x = 0.5$　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より $\underline{\text{(答)}\ x = \dfrac{7}{2}}$

(2) $4^x = 0.5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1$ より $\underline{\text{(答)}\ x = -\dfrac{1}{2}}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \dfrac{2}{3}$ より $\underline{\text{(答)}\ x = -\dfrac{2}{3}}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$　(2) $3^x = 3$　(3) $3^x = 9$　(4) $3^x = \dfrac{1}{3}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$　(6) $10^x = 1$　(7) $10^x = 100$　(8) $10^x = \sqrt[3]{10}$

(9) $10^x = 0.1$　(10) $10^x = 0.01$　(11) $2^x = 1$　(12) $2^x = 8$

(13) $2^x = 64$　(14) $2^x = \sqrt[5]{8}$　(15) $2^x = 2\sqrt{2}$　(16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$　(18) $2^x = \dfrac{1}{4}$　(19) $2^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(20) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.5$　(22) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.125$　(23) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{4}$　(24) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 8$　(26) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$　(27) $4^x = 1$　(28) $4^x = 64$

(29) $4^x = 2$　(30) $4^x = 8$　(31) $4^x = 0.25$　(32) $4^x = \sqrt{2}$

＜対数 1＞

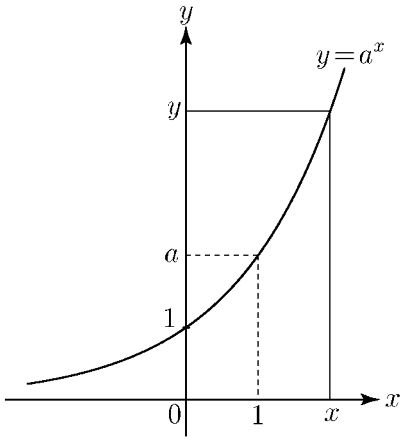
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例 1　(1)　$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2)　$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問 1　次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　　　　(2) $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(3) $3 = \log_4 64$　　　　(4) $\dfrac{5}{2} = \log_4 32$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a \text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例 2　(1)　$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2)　$\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問 2　次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_3 81$　　　　(2)　$\log_4 256$

(3)　$\log_7 343$　　　　(4)　$\log_{10} 100$

＜対数 2＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\dfrac{25}{100}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 (1) $\log_3 243$　(2) $\log_2\sqrt{2}$　(3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$　(5) $\log_5 1$　(6) $\log_5 0.04$

(7) $\log_{12}\sqrt[4]{12}$　(8) $\log_{10} 0.1$　(9) $\log_{100} 1000$

(10) $\log_5\sqrt{125}$　(11) $\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(12) $\log_9 243$

例 2

$$\log_2(8\times 16) = \log_2(2^3\times 2^4) = \log_2(2^7) = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2(2^3) + \log_2(2^4) = 3+4 = 7$$

より

$$\log_2(8\times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

が成り立つ。

一般に正の整数 M と N に対して

$$\boxed{\log_2(M\times N) = \log_2 M + \log_2 N}$$

が成り立つ。

問 2 $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ の場合に次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2(M\times N)$

(2) $\log_2 M + \log_2 N$