高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

秋期入学者用

I

内容

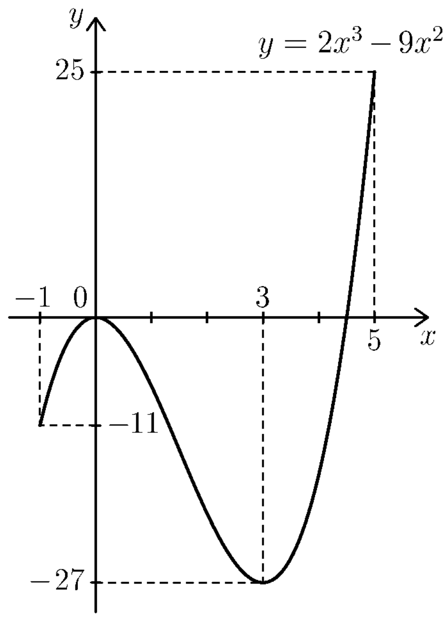
◎ 式の計算

◎ 整式

◎ 数列

◎ 導関数

◎ 関数の増減



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜数の表示＞

数を表すのにアラビア文字や漢数字が使われるが、まれにローマ字も見られる。

アラビア数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000
漢数字	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	五十	百	五百	千
ローマ数字	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M

数学では主にアラビア数字を使うので、これを算用数字ともいう。
漢数字では一が 10 個集まって十、十が 10 個集まって百、百が 10 個集まって千と 10 個ごとに大きい数になる。この一、十、百、千、$\cdots$ を**位** (くらい) という。アラビア数字では 1 , 10 , 100 , 1000 , $\cdots$ となり、0 の個数で位がわかる。10 個ごとに位が上がるのを **10 進法**という。10 進法で 4 桁の数、たとえば 5467 は

$$5467 = 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 6 \times 10 + 7 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

という意味である。このように 10 進法で表される数を **10 進数**といい、
10 進数で表されることを明記する必要がある場合、5467 を $(5467)_{10}$ と書く。

$$(5467)_{10} = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

これに対し 8 進法で 4 桁の数 $(5467)_8$ は

$$(5467)_8 = 5 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 6 \times 8 + 7 = (2871)_{10}$$

となる。$(5467)_8$ のように 8 進法で表される数を **8 進数**という。

(注)　8 進法では 0 から 7 までの数しか使われない。
　　　2 進法では 0 と 1 しか使わない。

例　$(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = (21)_{10}$

問　以下の 8 進数または 2 進数を 10 進数になおせ。

(1)　$(77)_8$

(2)　$(4312)_8$

(3)　$(1010)_2$

(4)　$(11111)_2$

< 数の分類 >

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ のような数を**自然数**または**正の整数**といい、$-1, -2, -3, -4, -5, \cdots$ を**負の整数**という。正の整数と負の整数に 0 を合わせた数を**整数** $(integer)$ という。整数 m と自然数 n によって $\dfrac{m}{n}$ のように分数の形で表される数を**有理数** $(rational\ number)$ という。$n = 1$ のときは $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m}{1} = m$ となるので、整数は有理数である。また小数も有理数である。

例 1　$3.7 = \dfrac{37}{10}$　,　$0.12 = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$　,　$1.045 = \dfrac{1045}{1000} = \dfrac{209}{200}$

逆に有理数を小数で表すと、どこかで割り切れるか、どこまでいっても割り切れない無限小数になる。

例 2　(1) $\dfrac{3}{8} = 0.375$

(2) $\dfrac{1}{9} = 0.11111\cdots$

(3) $\dfrac{13}{99} = 0.13131313\cdots$

(4) $\dfrac{157}{999} = 0.157157157157\cdots$

この例 (2) ∼ (4) のような小数を**循環小数**という。
一方 $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ や円周率 $\pi = 3.1415926\cdots$ のようにどこまでいってもくり返しが現れない無限小数がある。これらのように有理数でない数を**無理数** $(irrational\ number)$ といい、有理数と無理数を合わせた集合を**実数** $(real\ number)$ という。

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数}=\text{自然数}\ (1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots)\\ 0\\ \text{負の整数}\ (-1\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ \cdots)\end{cases}\\ \text{整数でない有理数 (分数)}\begin{cases}\text{有限小数}\ \left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ -\frac{5}{4}\ ,\ \cdots\right)\\ \text{循環小数}\ \left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{13}{99}\ ,\ \cdots\right)\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\ \text{循環しない無限小数}\ (\sqrt{2}, \pi, \cdots)\end{cases}$$

問　次の有理数を例 2 のように小数で表せ。

(1) $\dfrac{3}{4}$　　(2) $\dfrac{3}{9}$　　(3) $\dfrac{12}{99}$　　(4) $\dfrac{11}{999}$

< ギリシャ文字とアルファベット >

数学の教科書で数を表す文字としてギリシャ文字や英語のアルファベットが使われる。ギリシャ文字は１種類の活字体しかないが、アルファベットは筆記体と活字体があり、活字体は立体 (ローマン体) と斜体 (イタリック体) がある。

< ギリシャ文字 >

小文字	大文字	英語名	読み方
α	A	alpha	アルファ
β	B	beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ	E	epsilon	イプシロン
ζ	Z	zeta	ツェータ
η	H	eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι	I	iota	イオタ
κ	K	kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ	M	mu	ミュー
ν	N	nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ
o	O	omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ
ρ	P	rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ	T	tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン (ユプシロン)
$\phi(\varphi)$	Φ	phi	ファイ
χ	X	chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

< アルファベット >

立体小文字	立体大文字	斜体小文字	斜体大文字
a	A	a	A
b	B	b	B
c	C	c	C
d	D	d	D
e	E	e	E
f	F	f	F
g	G	g	G
h	H	h	H
i	I	i	I
j	J	j	J
k	K	k	K
l	L	l	L
m	M	m	M
n	N	n	N
o	O	o	O
p	P	p	P
q	Q	q	Q
r	R	r	R
s	S	s	S
t	T	t	T
u	U	u	U
v	V	v	V
w	W	w	W
x	X	x	X
y	Y	y	Y
z	Z	z	Z

(注 1)　大学の数学ではほとんど全ての種類のギリシャ文字を使用する。
以下の文字は間違えやすいので区別がつくように書くこと。
d と α(アルファ) , r と γ(ガンマ) , x と χ(カイ) , w と ω(オメガ)

(注 2)　アルファベット立体小文字の x は積の $\times$ とよく似ているため立体小文字の x はほとんど使われない。未知数を表すときは必ず斜体小文字の x を使う。次のページで詳しく解説するが、数学の教科書では文字の用途に応じた字体を使用する。

< 文字の用途と字体 >

前ページで書いたように、数学の教科書では「数を表す文字」と「それ以外のものを表す文字」で明確に字体を区別している。

1.「**数を表す文字**は**アルファベットの斜体**または**ギリシャ文字**を使う」

特に以下のような場合によく使われる文字を紹介する。

(1) $1, 2, 3, \cdots$ などの自然数は n , m , k , i , j , ℓ 等

(2) 未知数や変数には x , y , z , w , t , u , v , r 等

(3) 指数、次数には n , p , q , r 等

(4) 係数、定数には a , b , c , d , α , β , γ 等

(5) 関数には f , g , h , $\cdots$ 等

その他特別な数を表す場合がある。たとえば円周率 π、ネピアの数 e、虚数単位 i (または j)、重力加速度 g 等である。

2.「**単位を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 長さ $\cdots$ km , m , cm , mm

(2) 質量 $\cdots$ kg , g

(3) 時間 $\cdots$ h , min , s

その他、角度 (rad)、力 (N,kgf)、熱量 (cal)、電流 (A)、電圧 (V) など全て立体である。ただし μm (マイクロメートル) や抵抗 Ω (オーム) のようにギリシャ文字を使うこともある。しかしアルファベットの斜体は使わない。

3.「**特殊な関数**や**数学記号**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 特殊な関数 $\cdots$ sin , cos , tan , log , exp など

(2) 数学記号 $\cdots$ lim(極限) , det(行列式) など

4.「**点や図形を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 点を表す文字 $\cdots$ P , Q , A , B , C などがよく使われる。

(2) 図形を表す文字 $\cdots$ 線分 AB , 三角形 ABC など

(注 1) 立体で AB と書いた場合は点 A と点 B の間の**距離**を意味する。
斜体で AB と書いた場合は数 A と数 B との**積** $AB = A \times B$ を意味する。
この使い分けを特に注意すること !!

(注 2) 上記 **2,3,4** のように立体で書く文字は数学の中の**固有名詞**と考えればよい。

(注 3) 未知数がたくさんあるときはアルファベットやギリシャ文字では数が足りないことがある。たとえば未知数が 100 個あるときは、未知数を $x, y, z, \cdots$ と書くかわりに

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ \cdots \ , x_{100}$$

と書く。x の右下の小さな文字を 添(そえ) 字という。x_2 は未知数 y のかわりで、$x \times 2$ ではない！

＜ 文字式の計算 1 ＞

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。
文字式の四則演算 (加減乗除) は数の四則演算と同じであるが、
特に以下のようなきまりがある。

＜ 文字式のきまり ＞	1. 文字式では積の記号 $\times$ は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側，文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表わす。 5. $+, -$ より $\times, \div$ が優先する。

例 (1) $a \times a \times a \times b \times x \times x = a^3 \times b \times x^2 = a^3bx^2$　($\times$ を省略)

(アルファベットの積は a^3bx^2 のようにアルファベットの順に $a, b, c, \cdots, x, y, z$ に従って左側から書いていく。)

(2) $a \times 4 \times b \times x \times 5 = 4 \times 5 \times a \times b \times x = 20abx$

(3) $\left(4a^2b\right) \div \left(6ab^2\right) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{2a}{3b}$

($\frac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。このような分数を**既約分数**という)

(4) $5 \times x \times x + x + x + x - x \div x \times x = 5x^2 + 2x$

(5) $a \times b \div c \times d \div x \times y \div z = \dfrac{abdy}{cxz}$

問　次の式を簡単にせよ。

(1)　$x \times x + x + x + x$

(2)　$a \times a \times b \times 2 - a \times b \times 3$

(3)　$x \times y \div y \times x$

(4)　$a + a \times b + 2 \times a$

(5)　$2 \times y - 3 \times x + 4 \times x \times y \div x$

(6)　$a \div b \times c \div a \times b \div c$

(7)　$(2xy^2) \div (6x^2y^3) \times (9x^2y)$

(8)　$(6abc) \div (8a^2b^3c^4) \times (2a^2b^2c^2)$

＜ 文字式の計算 2 ＞

例 (1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b$
$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b$
$= (a^3+2a^2b+ab^2) + (a^2b+2ab^2+b^3)$
$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(3) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$
$= (a+b+c)a + (a+b+c)b + (a+b+c)c$
$= (a^2+ab+ac) + (ab+b^2+bc) + (ac+bc+c^2)$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

問 次の式を例のように展開せよ。

(1) $(a-b)(a+b)$

(2) $(a-b)^2$

(3) $(a-b)^3$

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(6) $(a-b-c)^2$

＜文字式の計算 3＞

分数は分母と分子に同じ数をかけると元の分数と等しい。
分数の計算は全てこの原理の応用である。

例 1　(通分)

$$① \ \frac{2}{3}+\frac{y}{x}=\frac{2x}{3x}+\frac{3y}{3x}=\frac{2x+3y}{3x}$$

$$② \ \frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$$

問 1　次の分数を通分せよ。

(1) $\frac{x}{y}-\frac{3}{2}$　　(2) $\frac{b}{a}+\frac{y}{x}$

(3) $\frac{2b}{3a}+\frac{4d}{6c}$　　(4) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$

例 2

$$① \ \frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1\times a}{\left(\frac{b}{a}\right)\times a}=\frac{a}{b}$$

$$② \ \frac{\frac{d}{b}}{\frac{c}{a}}=\frac{\left(\frac{d}{b}\right)\times ab}{\left(\frac{c}{a}\right)\times ab}=\frac{ad}{bc}$$

$$③ \ \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{(a+b)\times ab}{\left(\frac{a+b}{ab}\right)\times ab}=\frac{(a+b)ab}{a+b}=ab$$

問 2　次の分数を簡単せよ。

(1) $\dfrac{\frac{b}{a}}{1}$　　(2) $\dfrac{y}{\frac{1}{x}}$

(3) $\dfrac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$　　(4) $\dfrac{c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

(5) $\dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}}$　　(6) $\dfrac{\frac{1}{abc}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

＜整式 1 ＞

10 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 9 までの数字である。
8 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_8 = a \times 8^3 + b \times 8^2 + c \times 8 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 7 までの数字である。
2 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$$

と表される。ここで $a,\ b,\ c,\ d$ は 0 かまたは 1 である。
一般に x 進法では 4 桁の整数は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

の形になる。また 2 桁、3 桁の整数は、

$$2\text{ 桁} \cdots\ ax + b \qquad , \quad 3\text{ 桁} \cdots\ ax^2 + bx + c$$

の形になる。このように x 進法で整数を表すような式を x に関する**整式**という。これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を x に関する**分数式**という。

整式は式の形で区別する。
　x に関する 1 次式 $\cdots\ ax + b$ の形
　x に関する 2 次式 $\cdots\ ax^2 + bx + c$ の形
　x に関する 3 次式 $\cdots\ ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

ただし a には 0 でない数である。x に関する整式では、x 以外の文字 $(a, b, c, d$ 等) を**定数** という。ax^3 の a , bx^2 の b , cx の c
のように x との積になっている定数を**係数**という。

＜ 整式 2 ＞

x の整式は“ x 進法 ”よりもっと広い意味で用いる。たとえば x の 2 次式は一般に

$$ax^2 + bx + c$$

であるが、この係数 a, b や定数 c は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

例 1　$2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

このように整式は x の次数 (指数) の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順** に並べる」という。

例 2 (1)　$(3 - x + 2x^2) + (4x + 5 + 3x^2)$

$= (2x^2 - x + 3) + (3x^2 + 4x + 5)$

$= (2x^2 + 3x^2) + (-x + 4x) + (3 + 5)$

$= 5x^2 + 3x + 8$

筆算では

$$\begin{array}{lrrr} & 2x^2 & -\ x & +\ 3 \\ +) & 3x^2 & +\ 4x & +\ 5 \\ \hline & 5x^2 & +\ 3x & +\ 8 \end{array}$$

(2)　$(-4x + 3 + 5x^2) - (7 - 2x)$

$= (5x^2 - 4x + 3) - (-2x + 7)$

$= 5x^2 + (-4x - (-2x)) + (3 - 7)$

$= 5x^2 - 2x - 4$

筆算では

$$\begin{array}{lrrr} & 5x^2 & -\ 4x & +\ 3 \\ -) & & -\ 2x & +\ 7 \\ \hline & 5x^2 & -\ 2x & -\ 4 \end{array}$$

(3)　$(2x - 3)(4x + 5)$

$= (2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5$

$= 8x^2 - 12x + 10x - 15$

$= 8x^2 - 2x - 15$

筆算では

$$\begin{array}{lrrrl} & & 2x & -\ 3 & \\ \times) & & 4x & +\ 5 & \\ \hline & & 10x & -\ 15 & \cdots\cdots (2x-3)\times 5 \\ +) & 8x^2 & -\ 12x & & \cdots\cdots (2x-3)\times 4x \\ \hline & 8x^2 & -\ 2x & -\ 15 & \end{array}$$

(注)　整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問　次の計算をせよ。

(1)　$(3x - x^2 + 2) + (3 - 2x + 3x^2)$

(2)　$(x^2 + 6 - 2x) - (5 - x^2 + 3x)$

(3)　$(1 - x^2)x$

(4)　$(2x - 3)(1 + x)$

＜ 整式 3 ＞

x の整式の積は文字式の場合 (6 ページ) と同様に展開する。
そして最後の答は必ず降べきの順に並べる。

例 ① $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = (x+3)\times x+(x+3)\times 3 = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$

② $(2x+1)(3x+4) = (2x+1)\times 3x+(2x+1)\times 4 = 6x^2+3x+8x+4 = 6x^2+11x+4$

③ $(x-a)(x-b) = (x-a)\times x+(x-a)\times(-b) = x^2-ax-bx+ab = x^2-(a+b)x+ab$

問　次の計算をせよ。

(1)　$(x+2)^2$

(2)　$(x-2)^2$

(3)　$(x+a)^2$

(4)　$(x-a)^2$

(5)　$(x-a)(x+a)$

(6)　$(x+a)(x+b)$

(7)　$(x+a)(x-b)$

(8)　$(x+a)^3$

(9)　$(x-a)^3$

(10)　$(ax+b)(cx+d)$

(11)　$(ax+b)(cx-d)$

(12)　$(ax-b)(cx-d)$

(13)　$(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(14)　$(x+a)(x^2-ax+a^2)$

(15)　$(x-1)(x+1)(x^2+1)$

(16)　$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

＜ 因数分解 ＞

前ページで整式の積の展開を学んだ。逆に展開された式を
次数の低い整式の積の形にすることを**因数分解**という。
前ページの結果より

(I) $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$
(II) $x^2 + (a+b)x + ax = (x+a)(x+b)$
(III) $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$
(IV) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
(V) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$
(VI) $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$

がわかる。

例 (1) $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$
(2) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
(3) $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
(4) $8x^2 + 22x + 15 = (2x+3)(4x+5)$
(5) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$
(6) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x+4)^3$

(注) (4) は $8x^2 = 2 \times 4 \times x^2$, $15 = 3 \times 5$ と考え (IV) 式と比較する。

問 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4x + 4$　　(2) $x^2 + 4x + 3$

(3) $x^2 - 64$　　(4) $2x^2 + 17x + 21$

(5) $x^3 - 64$　　(6) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

(7) $x^2 - 2ax + a^2$　　(8) $x^2 + (a-b)x - ab$

(9) $x^2 - (a+b)x + ab$　　(10) $acx^2 - (ad+bc)x + bd$

(11) $x^3 + a^3$　　(12) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

< 整式の除法 >

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。

これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{r@{\,}r} & 12 \\ \cline{2-2} 11\,) & 136 \\ & 11 \\ \cline{2-2} & 26 \\ & 22 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

となる。整式の除法も同様で
$x^2 + 3x + 6$ を $x + 1$ で割ると商が
$x + 2$ で余りが 4 である。これを式で書くと

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x + 1) + 4$$

かまたは

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$$

となる。

$$\begin{array}{r@{\,}rl} & x + 2 & \\ \cline{2-2} x + 1\,) & x^2 + 3x + 6 & \\ & x^2 + x\phantom{{}+6} & \cdots\ (x + 1) \times x \\ \cline{2-2} & 2x + 6 & \\ & 2x + 2 & \cdots\ (x + 1) \times 2 \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

例 2　右の筆算より

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{2x + 3} = 2x^2 - 4x + 9 - \frac{28}{2x + 3}$$

$$\begin{array}{r@{\,}rl} & 2x^2 - 4x + 9 & \\ \cline{2-2} 2x + 3\,) & 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1 & \\ & 4x^3 + 6x^2\phantom{{}+6x-1} & \cdots\ (2x + 3) \times 2x^2 \\ \cline{2-2} & -8x^2 + 6x\phantom{{}-1} & \\ & -8x^2 - 12x\phantom{{}-1} & \cdots\ (2x + 3) \times (-4x) \\ \cline{2-2} & 18x - 1 & \\ & 18x + 27 & \cdots\ (2x + 3) \times 9 \\ \cline{2-2} & -28 & \end{array}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{x^2 + 2x}{x + 1}$　　　(2) $\dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

(3) $\dfrac{3x^2 - x + 2}{x - 1}$　　　(4) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 8x + 5}{x - 2}$

＜ 平方根 1 ＞

正の数 a に対し、2 乗して a になる数を a の**平方根**という。
平方根は正と負の 2 個あるが、正の平方根を $\sqrt{a}$ で表わす。

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad , \quad x^2 = a$$

例 1 $\sqrt{2}$ ($\fallingdotseq 1.4142356\cdots$) は無理数であるが、

$$\sqrt{4} \qquad , \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

のように平方根が無理数とは限らない。

問 1　次の平方根はすべて無理数でない。根号を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{169}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{16}{64}}$　　(3) $\sqrt{0.04}$

正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad , \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成りたつ。

例 2　(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

(2) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

問 2　例 2 のように次を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$　　(2) $\sqrt{18} \times \sqrt{32}$

(3) $\sqrt{108}$　　(4) $\sqrt{147}$

例 3　$\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

問 3　次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{12}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

＜ 平方根 2 ＞

例 1
$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10} + \left(\sqrt{10}\right)^2$$
$$= 5 + 2\sqrt{50} + 10$$
$$= 15 + 2\times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}$$

(注) ここで文字式の展開式 $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ を用いた。

問 1　6 ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$　　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$　　(3) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$　　(5) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$　　(6) $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)$

例 2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$,　(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問 2　例 2 のように分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$　　(3) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$　　(5) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$

例 3　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1\qquad\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ を用いた。

問 3　次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+2}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

＜ 2次方程式 ＞

$a(\neq 0),\ b,\ c$ を係数とする 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は、$b^2-4ac \geqq 0$ であれば

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ (\text{解の公式})$$

によって求められる。

例 2 次方程式

$$4x^2-20x+24=0$$

の解は公式より

$$x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{20^2-4\times4\times24}}{2\times4}=\frac{20\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{20\pm4}{8}$$

$$\frac{20+4}{8}=3\ ,\ \frac{20-4}{8}=2 \qquad \underline{(\text{答})\ x=3 \text{ または } x=2}$$

(別解)

$$4x^2-20x+24=4(x^2-5x+6)=4(x-3)(x-2)$$

と因数分解されるから

$$\begin{aligned}4x^2-20x+24=0 &\Leftrightarrow 4(x-3)(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow x-3=0 \text{ または } x-2=0\\ &\Leftrightarrow \underline{x=3 \text{ または } x=2}\end{aligned}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+2x-8=0$

(2) $3x^2-2x-1=0$

(3) $x^2-7x+6=0$

(4) $2x^2+9x+4=0$

(5) $x^2-x-2=0$

(6) $3x^2+x-4=0$

＜数列＞

　ある規則に従って並んでいる数の列を**数列**という。数列の各数を**項**といい、最初の項から順に、**第 1 項**、**第 2 項**、$\cdots$、**第 n 項**と呼ぶ。特に第 1 項を**初項**という。

例　次の数列

$$1,\ \ 4,\ \ 9,\ \ 16,\ \ 25,\ \ \cdots$$

は初項が 1、第 2 項が 4、第 3 項が 9 であるが、これを

$$1,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ 4^2,\ \ 5^2,\ \ \cdots$$

と書き直すと、第 n 項は n^2 であることがわかる。

第 n 項が n についての式で書けるとき、これを**一般項**と言う。
第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

例題　数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 4$　　(2) $a_n = 3 \times 2^n$

(解) (1) $a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4$

(2) $a_1 = 6,\ a_2 = 12,\ a_3 = 24,\ a_4 = 48$

問　数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3 - n$

(解) $a_1 =$　　　　, $a_2 =$　　　　, $a_3 =$　　　　, $a_4 =$

(2) $a_n = n^2 - n$

(解) $a_1 =$　　　　, $a_2 =$　　　　, $a_3 =$　　　　, $a_4 =$

(3) $a_n = \dfrac{3}{n}$

(解) $a_1 =$　　　　, $a_2 =$　　　　, $a_3 =$　　　　, $a_4 =$

(4) $a_n = 16 \times (0.25)^n$

(解) $a_1 =$　　　　, $a_2 =$　　　　, $a_3 =$　　　　, $a_4 =$

＜ 等差数列 ＞

数列の各項と1つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を**等差数列**といい、前の項との差を**公差**という。

例 1 奇数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は初項1、公差2の等差数列である。

例 2 数列

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots$$

は初項4、公差3の等差数列である。一般項を a_n とすると

$$a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_3 = 10,\ a_4 = 13,\ a_5 = 16$$

であるが、

$$\begin{aligned} a_2 &= 4+3 \\ a_3 &= 4+3\times 2 \\ a_4 &= 4+3\times 3 \\ a_5 &= 4+3\times 4 \end{aligned}$$

と考えると、一般項は $a_n = 4+3\times(n-1)$ である。

問 1 初項が a、公差が d の等差数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

(答) $a_n =$

問 2 例1の一般項 a_n を求めよ。

(解)

＜ 等差数列の和 ＞

例題 1 から 100 までの和を求めよ。

(解) $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ を逆に並べて、加えると 101 が 100 個できる。

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
 & S & = & 1 & + & 2 & + \cdots + & 99 & + & 100 \\
+) & S & = & 100 & + & 99 & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S & = & 101 & + & 101 & + \cdots + & 101 & + & 101 & = 101 \times 100
\end{array}$$

よって $S = \dfrac{101 \times 100}{2} = 5050$ である。

問 1 1 から n までの和

$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ を求めよ。

(解)

問 2 $n+1$ から $2n$ までの和

$S = (n+1) + (n+2) + \cdots + \{n + (n-1)\} + 2n$ を求めよ。

(解)

< 等比数列 1 >

数列の各項と一つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。

例 1 数列

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160,\ \cdots$$

は、前の項を 2 倍してできる数列であるから、初項 5、公比 2 の等比数列である。

問 1 次の等比数列の初項と公比を求めよ。

(1) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$　　初項 $=$　　　, 公比 $=$

(2) $8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \cdots$　　初項 $=$　　　, 公比 $=$

(3) $9,\ -3,\ 1,\ -\dfrac{1}{3},\ \cdots$　　初項 $=$　　　, 公比 $=$

(4) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$　　初項 $=$　　　, 公比 $=$

問 2 次の数列が等比数列になるように $\boxed{\quad}$ に適当な数を入れよ。

(1) $2,\ 6,\ \boxed{\qquad},\ 54,\ \boxed{\qquad}$

(2) $8,\ \boxed{\qquad},\ \boxed{\qquad},\ -1$

< 等比数列 2 >

例　数列

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\quad 48,\quad 96,\quad \cdots$$

は初項3、公比 2 の等比数列で、一般項を a_n とすると、
$a_1 = 3,\quad a_2 = 3 \times 2,\quad a_3 = 3 \times 2^2,\quad a_4 = 3 \times 2^3,\quad a_5 = 3 \times 2^4,\quad \cdots$
であるから、

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

になる。

(注)　$2^0 = 1$(ゼロ乗 $= 1$) であるから、$n = 1$ のとき $a_1 = 3 \times 2^0 = 3$

問 1　初項 a, 公比 r の等比数列

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\quad ar^4,\quad \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。　　　　　(答) $a_n =$
(ヒント)　$a_1 = a$, $a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$

問 2　次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad \cdots$　　　　　(答) $a_n =$

(2)　$27,\quad -9,\quad 3,\quad -1,\quad \dfrac{1}{3},\quad \cdots$　　　　　(答) $a_n =$

< 等比数列の和 >

例題 初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解) S に公比 3 をかけて、S から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{rcl} S &=& 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\ -)\ 3S &=& \qquad 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\ \hline -2S &=& 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \times 3^{100} \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \dfrac{5(3^{100} - 1)}{2}$

問 1 例題と同じ数列で、第 n 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$$

を求めよ。

(解)

問 2 初項 a、公比 r の等比数列の第 n 項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

を求めよ。

(解)

＜数列の極限 1＞

項がかぎりなく続く数列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ \cdots$$

を**無限数列**という。この無限数列において、a_n を第 n 項または一般項といい、上の無限数列を、単に $\{a_n\}$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ の極限のようす、つまり n をかぎりなく大きくしていくとき、項 a_n の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

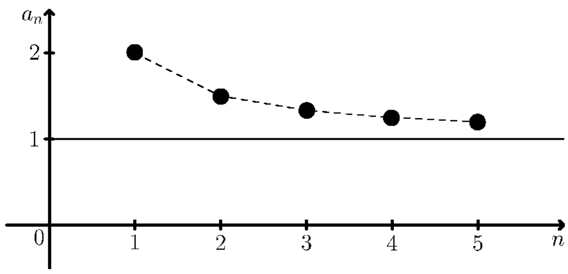
n をかぎりなく大きくすることを、$n \to \infty$ と表す。

（注）記号 ∞ は「無限大」と読む。

例 1 数列

$$\frac{2}{1}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n+1}{n}\ ,\ \cdots$$

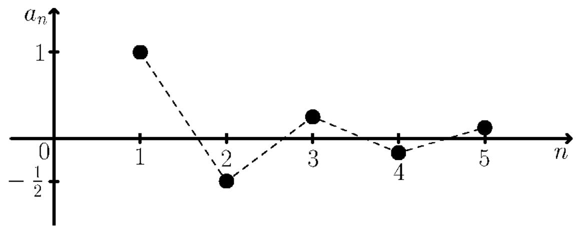
の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \dfrac{n+1}{n}$ の値は減少しながら、1 にかぎりなく近づいていく。



例 2 数列

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \cdots\ ,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ ,\ \cdots$$

の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ の値は増減を繰り返しながら、0 に限りなく近づいていく。



問 次の数列の極限の様子を調べよ。

$$1\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{4}{6}\ ,\ \frac{5}{8}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n+1}{2n}\ ,\ \cdots$$

< 数列の極限 2 >

無限数列 $\{a_n\}$ において、$n \to \infty$ のとき、a_n の値が一定の数 α に限りなく近づく場合に $\{a_n\}$ は α に **収束する** といい、

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という。

例 1 前ページの例より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

例 2 $n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{n} \to 0$ であるから、グラフを見なくても

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2 + \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

等がわかる。

例 3 $n \to \infty$ のとき $\dfrac{2}{n} \to 0,\ \dfrac{1}{n^2} \to 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{2}{n}}{3 + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+3} =$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n+3n^2}{4n-5n^2} =$

< 関数の極限 >

関数 $f(x)$ において、x が a 以外の値を取りながら、a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づくことを、

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と表し、α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。a に近づく変数は x 以外でもよい。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 5} \left(x^2 - 3x\right) = 10, \quad \lim_{x \to 1} \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{h+3}{2h+1} = 3$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

例 3 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$

(注) 例 2、例 3 は $x = 1$ や $h = 0$ を代入すると分母が 0 となり計算ができないので、約分してから $x = 1$ や $h = 0$ を代入する。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} =$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} =$

(4) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2 - 1^2}{h} =$

＜平均の変化率＞

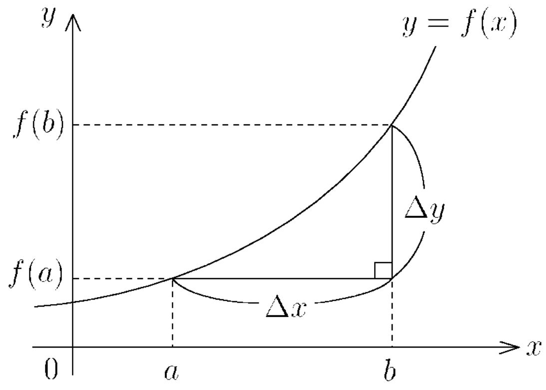
関数 $y = f(x)$ について、x の値が a から b に変わるとき、

x の値は $\Delta x = b - a$

y の値は $\Delta y = f(b) - f(a)$

だけ変化する。
(Δ はギリシャ文字で、デルタと読む)

Δx を **x の増分**
Δy を **y の増分**　という。



また y の増分の、x の増分に対する比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を x が a から b まで変わるときの $f(x)$ の **平均変化率** という。

例　$f(x) = x^2$ に対し、x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

問 1　関数 $f(x)$ が以下の場合に、x が 1 から 7 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x) = 5x$,　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

(2)　$f(x) = \dfrac{1}{8}x^2$,　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

問 2　関数 $f(x)$ が以下の場合に、x が a から b まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x) = 5x$,　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

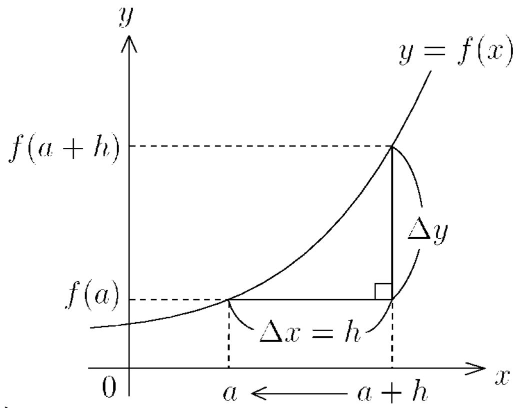
(2)　$f(x) = \dfrac{x^2}{b + a}$,　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

< 微分係数 1 >

関数 $y = f(x)$ に対し，x の値が
a から $a+h$ に変わるときの
平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を考える。



ここで x の増分 $\Delta x = h$ をかぎりなく 0
に近づけたとき，平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が，あるきまった数に近づくならば、
その極限値を，関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における **微分係数** といい，
$f'(a)$ で表す。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \qquad (x = a \text{ における微分係数})$$

例　$f(x) = 5x^2$ の $x = 3$ における微分係数 $f'(3)$ を求める。

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(3+h)^2 - 5 \times 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) - 5 \times 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{30h + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (30 + 5h) = 30 \end{aligned}$$

問　$f(x)$ と a が以下の場合に $f'(a)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = x^3$,　　$a = 2$,　$f'(2) =$

(2)　$f(x) = -x$,　　$a = -1$,　$f'(-1) =$

＜ 微分係数 2 ＞

例　関数 $f(x) = 3x^2$ に対し、次の微分係数を求める。

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \times (1+h)^2 - 3 \times 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + 3h) = 6$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \times (2+h)^2 - 3 \times 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (12+3h) = 12$$

以下同様に $f'(3),\ f'(4)$ 等を求めたい。
そこで一般に $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めておく。

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \times (a+h)^2 - 3 \times a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6ah + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6a+3h) = 6a$$

であるから、$f'(a) = 6a$ より、$f'(3) = 6 \times 3 = 18$　$f'(4) = 6 \times 4 = 24$ 等が求まる。
このように、同じ関数のいくつかの微分係数は、ひとつひとつを計算しなくても、

$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めておいて、
a に必要な値を代入することによって求められる。

問　関数 $f(x) = x^3$ に対して、次の問を求めよ。

(1)　$f'(a)$ を求めよ。

$f'(a) =$

(2)　$f'(-1), f'(0), f'(1), f'(2)$ を求めよ。

$f'(-1) =$　　　　$f'(0) =$　　　　$f'(1) =$　　　　$f'(2) =$

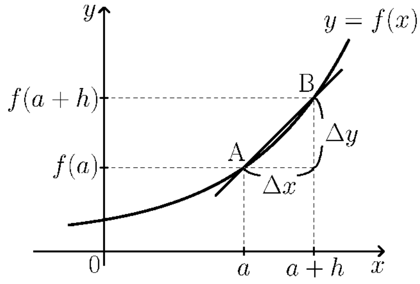
< 接線の傾き >

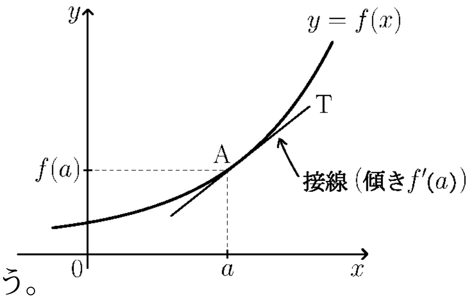
微分係数の意味を関数のグラフについて考えてみる。
関数 $y = f(x)$ のグラフ上に、x 座標が、それぞれ、
a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると、$y = f(x)$
の $x = a$ から $x = a+h$ までの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は、
直線 AB の傾きを表す。ここで h を 0 に近づけると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \longrightarrow f'(a) \quad (h \to 0 \text{ のとき})$$

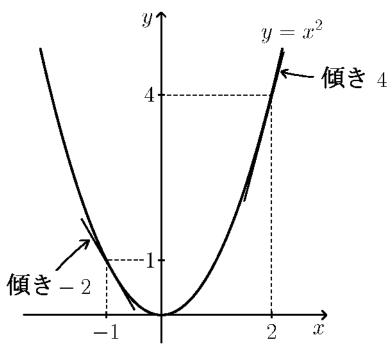
であるから、直線 AB は、傾きが $f'(a)$ であるような
直線 AT に限りなく近づいていく。この直線 AT を
点 A における曲線 $y = f(x)$ の**接線**といい、点 A を**接点**という。





関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は、この関数のグラフ上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の傾きである。

例　関数 $f(x) = x^2$ の微分係数は $f'(a) = 2a$ であるから、
点 $(2,\ 4)$ における接線の傾きは $f'(2) = 2 \times 2 = 4$
点 $(-1,\ 1)$ における接線の傾きは $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$
である。



問　関数 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3$ に対して、次の問に答えよ。

(1)　微分係数 $f'(a)$, $g'(a)$ を求めよ。

$f'(a) =$　　　　　　　　　　　　　　　　,　　$g'(a) =$

(2)　$x = -1$, 1 のとき、$f(x)$, $g(x)$ のとりうる座標と、その座標における接線の傾きを求めよ。

＜ 導関数 1 ＞

例 1　関数 $f(x)=x^2-5x$ に対し、$f(a)=a^2-5a$ であるから微分係数 $f'(a)$ は、

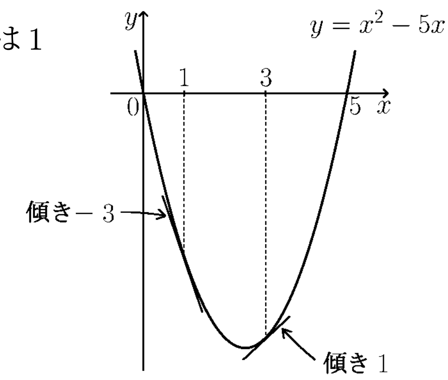
$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\big((a+h)^2-5(a+h)\big)-(a^2-5a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2a-5+h)=2a-5$$

となる。$f'(a)=2a-5$ は $x=a$ における接線の傾きを意味する。
たとえば

$f'(1)=2\times1-5=-3$ より $x=1$ における接線の傾きは -3

$f'(3)=2\times3-5=1$ より $x=3$ における接線の傾きは 1



である。$f'(a)=2a-5$ は、a をいろいろな値をとる変数とみれば、a の関数になっている。

そこで、$f'(a)=2a-5$ の a を x でおきかえた

$$f'(x)=2x-5$$

を、関数 $f(x)=x^2-5x$ の**導関数**という。

一般に関数 $f(x)$ に対して、$x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を a の関数とみて、a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\qquad\big(f(x)\text{ の導関数}\big)$$

を、関数 $f(x)$ の導関数という。

例 2　$f(x)=x^2-3x+2$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\big((x+h)^2-3(x+h)+2\big)-(x^2-3x+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-3)=2x-3$$

問　$f(x)=-x^2+x$ の導関数を求めよ。

＜ 導関数 2 ＞

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **について微分する**、あるいは、単に**微分する**という。

例題　関数 $f(x) = x^3$ を微分せよ。

(解)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

ここで $h \to 0$ のとき $3xh \to 0$ 、 $h^2 \to 0$ だから

$$f'(x) = 3x^2$$

問　次の関数を微分せよ。

(1)　$f(x) = x^2$,　　$f'(x) =$

(2)　$f(x) = x$,　　$f'(x) =$

(3)　$f(x) = 1$,　　$f'(x) =$

< パスカルの三角形 >

例 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

問 1　次の展開式を求めたい。$\Box$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$= \Box \times a^4 + \Box \times a^3b + \Box \times a^2b^2 + \Box \times ab^3 + \Box \times b^4$$

(2) $(a + b)^5 = (a + b)\left(\Box \times a^4 + \Box \times a^3b + \Box \times a^2b^2 + \Box \times ab^3 + \Box \times b^4\right)$

$$= \Box \times a^5 + \Box \times a^4b + \Box \times a^3b^2 + \Box \times a^2b^3 + \Box \times ab^4 + \Box \times b^5$$

問 2　$(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。以下の $\Box$ の中に適当な数字を入れよ。

$(a+b)^0 = 1$ ·································· 1

$(a+b)^1 = 1\times a + 1\times b$ ·································· 1　1

$(a+b)^2 = 1\times a^2 + 2\times ab + 1\times b^2$ ·································· 1　2　1

$(a+b)^3 = 1\times a^3 + 3\times a^2b + 3\times ab^2 + 1\times b^3$ ·································· 1　3　3　1

$(a+b)^4 = \Box \times a^4 + \Box \times a^3b + \Box \times a^2b^2 + \Box \times ab^3 + \Box \times b^4$ ············ $\Box\ \Box\ \Box\ \Box\ \Box$

$(a+b)^5 = \Box \times a^5 + \Box \times a^4b + \Box \times a^3b^2 + \Box \times a^2b^3 + \Box \times ab^4 + \Box \times b^5$ $\Box\ \Box\ \Box\ \Box\ \Box\ \Box$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a+b)^6 = \Box \times a^6 + \Box \times a^5b + \Box \times a^4b^2 + \Box \times a^3b^3 + \Box \times a^2b^4 + \Box \times ab^5 + \Box \times b^6$

＜ 導関数 3 ＞

例　$f(x) = x^4$ を微分したい。4 乗の展開式

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

を使うと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

問 1　$f(x) = x^5$ を微分せよ。

問 2　$f(x) = x^6$ を微分せよ。

< 導関数 4 >

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を y' や記号 $\dfrac{dy}{dx}$ で表すこともある。

例えば、 $f(x) = x^2$ のとき、 $f'(x) = 2x$ だから、

$y = x^2$ の導関数は $y' = 2x$

と表すこともある。これを更に略して、

$$\boxed{\left(x^2\right)' = 2x}$$

と記す。

問 1　表を完成し、右の $\boxed{\quad}$ に適当な文字を入れよ。

y	x	x^2	x^3	x^4
y'		$2x$		

$\left(x\right)' = \boxed{\quad}$

$\left(x^3\right)' = \boxed{\quad}$

$\left(x^4\right)' = \boxed{\quad}$

問 2　上の問から、一般に $y = x^n$ の導関数を類推せよ。

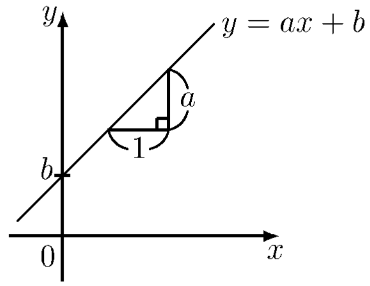
$\left(x^n\right)' =$

問 3　傾き a 、切片 b の直線 $y = ax + b$ に対し、
導関数 y' を求めたい。 $f(x) = ax + b$ とおくと、

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

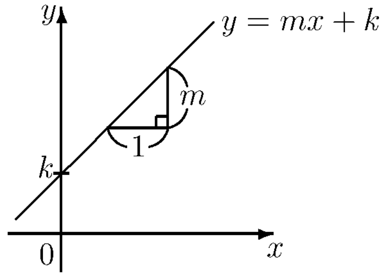
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h}$$

である。この計算を完成し、y' を求め、
y' は元の直線の何を意味するか答えよ。



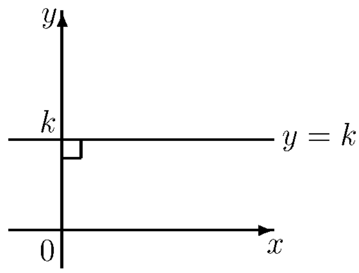
(解)　$y' =$

＜ 導関数 5 ＞



問 1　関数 $y = mx + k$　(m と k は定数)
のグラフは、傾き m 、切片 k の直線を表す。
これを微分せよ。

(解)　$(mx + k)' =$



問 2　関数 $y = k$　(k は定数) のグラフは、
傾き 0 (ゼロ) の直線を表す。
これを微分せよ。

(解)　$(k)' =$

例　関数 $y = x^3$ の導関数は $y' = 3x^2$ である。つまり

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

である。これを利用して、 $5x^3$ を微分する。

$$\left(5x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^3 - 5x^3}{h} = \lim_{h \to 0} 5 \times \left\{ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right\}$$

$$= 5 \times \left(x^3\right)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

同様にして、 $7x^3$ を微分する。

$$\underline{\left(7x^3\right)' = 7 \times \left(x^3\right)' = 7 \times 3x^2 = 21x^2}$$

問 3　$\left(x^3\right)' = 3x^2$ を利用して kx^3　(k は定数) を微分せよ。

(解)　$\left(kx^3\right)' =$

問 4　$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を利用して、kx^n (k は定数) を微分せよ。

(解)　$\left(kx^n\right)' =$

問 5　$\{f(x)\}' = f'(x)$ を利用して、$kf(x)$ (k は定数) を微分せよ。

(解)　$\left\{kf(x)\right\}' =$

＜ 導関数 6 ＞

例 $\left(x^2\right)' = 2x$、$\left(x^3\right)' = 3x^2$、すなわち

$$\left(x^2\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

を利用して $x^2 + x^3$ を微分する。

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x^3\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{(x+h)^2 + (x+h)^3\right\} - \left\{x^2 + x^3\right\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right\} \\ &= \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 2x + 3x^2\end{aligned}$$

同様に

$$\underline{\left(x^2 - x^3\right)' = \left(x^2\right)' - \left(x^3\right)' = 2x - 3x^2}$$

問 1 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $(k)' = 0$ (k は定数) を利用して、次の関数を微分せよ。

(1) $\left(x^4 + x^5\right)' =$

(2) $\left(x^2 - x\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}x^2 - 1\right)' =$

(4) $\left(x^n - x^{n+1} + k\right)' =$

問 2 一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して、次の式を $f'(x)$ と $g'(x)$ の式で表せ。

(1) $\left\{f(x) + g(x)\right\}' =$

(2) $\left\{f(x) - g(x)\right\}' =$

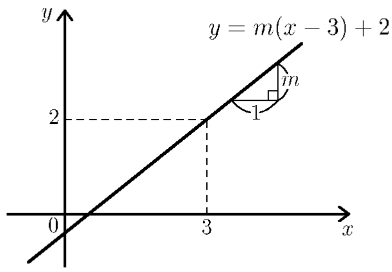
＜接線の方程式＞

例 1　m を定数とする関数

$$y = m(x-3)+2$$

は、$x=3$ のとき $y=2$ であるから、

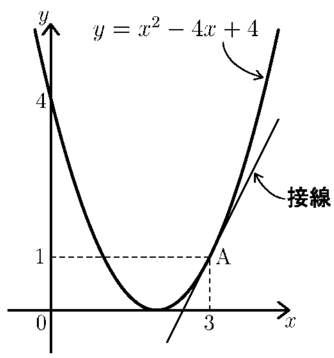
点 $(3,2)$ を通り、傾き m の直線の方程式を意味する。



問 1　a, b, m を定数とする。**点 (a,b) を通り、傾き m の直線**の方程式を求めよ。
(答)

例 2　関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフ上の点 A$(3,1)$ における接線の方程式を求めたい。

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ とおくと、接線の傾き m は $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ である。



$$f'(x) = (x^2-4x+4)' = \underbrace{(x^2)'}_{2x} - 4 \times \underbrace{(x)'}_{1} + \underbrace{(4)'}_{0} = 2x - 4$$

より

$$f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$$

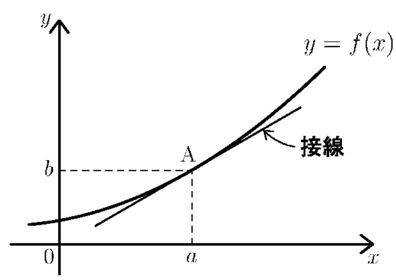
となる。点 A$(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y = m(x-3)+1$ だから

$$y = 2(x-3)+1 = 2x-5$$

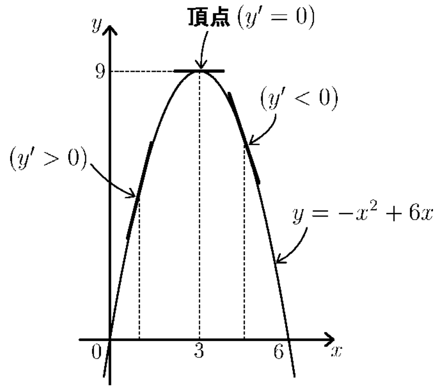
より、接線の方程式は $\boldsymbol{y = 2x - 5}$ となる。

問 2　$y = x - x^2$ 上の点 A$(0,0)$ における接線の方程式を求めよ。

問 3　一般の関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 A(a,b) における接線の傾きは $f'(a)$ である。接線の方程式を求めよ。



＜関数の増減 1＞



例 2 次関数 $y=-x^2+6x$ の導関数は

$$y'=-2x+6=-2(x-3)$$

となる。x の範囲によって y' のプラス、マイナスを場合分けする。

(1) $y'=0$ となる x の値は $x=3$ である。
このとき、$x=3$ における接線の傾き y' は 0(ゼロ) である。すなわち、2 次関数の頂点を意味する。

$x=3$ のとき $y=9$ より、頂点の座標は $(3,9)$ である。

(2) $y'>0$ となる x の範囲は $x<3$ である。
このとき、接線の傾き y' はプラスであるから、グラフは右上がり ($\nearrow$) になる。y の値は (x の増加とともに) **増加**する。

(3) $y'<0$ となる x の範囲は $x>3$ である。
このとき、接線の傾き y' はマイナスであるから、グラフは右下がり ($\searrow$) になる。y の値は (x の増加とともに) **減少**する。

以上 (1),(2),(3) をまとめて、右の表にした。
このような表を**増減表**という。増減表を作れば、グラフのだいたいの様子がわかる。
2 次関数の場合は、頂点の座標がわかる。
この場合の頂点の座標は $(3,9)$ である。

x	$x<3$	3	$3<x$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	9	$\searrow$

問 次の 2 次関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2+2x+1$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

頂点 (　　,　　)

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

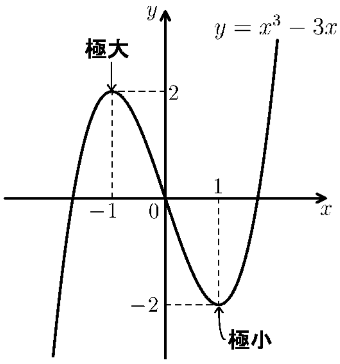
頂点 (　　,　　)

＜関数の増減 2 ＞

例 関数 $y = x^3 - 3x$ の導関数は

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

となる。この関数の増減表を以下のようにして作る。



(1) $y' = 0$ となる x の値は $x = \pm 1$ である。
そこで $x = 1$ と $x = -1$ で範囲を分ける。

(2) $x > 1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = 2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

(3) $-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
(たとえば $x = 0$ のとき $y' = -3 < 0$ であるから)

(4) $x < -1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = -2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

$(x < -1)$　$(-1 < x < 1)$　$(1 < x)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右の増減表で、x の範囲は省略した。このように書く時は常に右の方が x の値の大きい範囲であると約束することにする。この表をもとにグラフを描くと、上図のようになる。

(ア) $x = -1$ の近くでは、$x = -1$ のとき y は最大になる。
このような場合 **極大** といい $\underline{x = -1 \text{ のとき極大値 } y = 2}$ と書く。

(イ) $x = 1$ の近くでは、$x = 1$ のとき y は最小になる。
このような場合 **極小** といい $\underline{x = 1 \text{ のとき極小値 } y = -2}$ と書く。

(注) 極大値と極小値とをあわせて、**極値**という。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = 4 - 12x + x^3$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$
$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

(2) $y = 4x - x^2 - 2x^3$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$
$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

＜ 最大最小 1 ＞

例題 次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

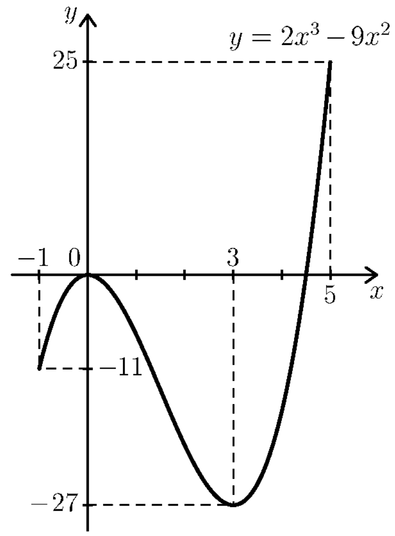
$$y = 2x^3 - 9x^2 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq 5\right)$$

(解) $y' = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$

より $-1 \leqq x \leqq 5$ における増減表は

次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25



よって、この関数は

$x = 5$ のとき、最大値 $y = 25$ をとり、

$x = 3$ のとき、最小値 $y = -27$ をとる。

(注) $x = 0$ のとき、極大であるが最大ではない。

$x = 3$ のときは極小かつ最小になっている。

最大や最小は定義域によって違ってくる。

問 次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、

最大値と最小値を求めよ。

$$y = 6x^4 - 4x^3 - 6x^2 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq 2\right)$$

(解)

x	-1		2
y'	$\times$		$\times$
y			

(答) $x =$ 　　のとき最大値 $y =$

$x =$ 　　のとき最小値 $y =$

< 最大最小 2 >

例題　たて 3 cm , よこ 8 cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 x cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y\,\mathrm{cm}^3$ を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？

(解)　容器のたては $3-2x(\mathrm{cm})$, よこは $8-2x(\mathrm{cm})$, 高さは $x(\mathrm{cm})$ だから、容積 $y(\mathrm{cm}^3)$ は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから、x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り、y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x=\frac{2}{3}\text{ のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

(答)　$x=\dfrac{2}{3}(\mathrm{cm})$ のとき、最大容積 $y=\dfrac{200}{27}(\mathrm{cm}^3)$ をとる。

問　一辺 $6a$ cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 $y(\mathrm{cm}^3)$ を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？

x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、y の最大値を求めよ。

(解)