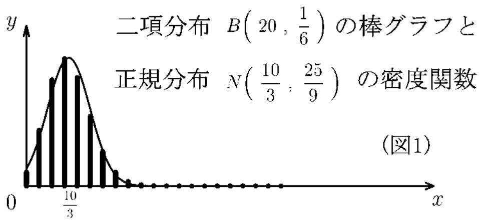
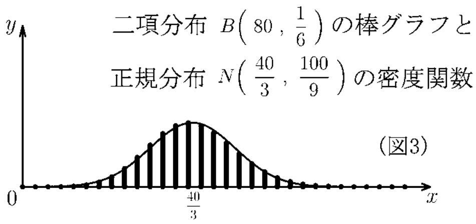
# < 二項分布の正規近似 >

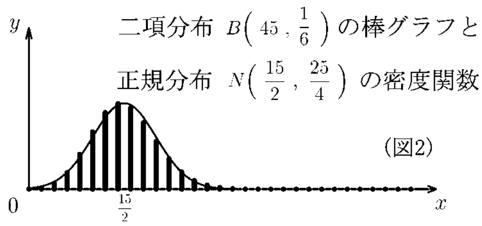
**例 1** サイコロを 20 回投げて 1 の目の出た回数を $X$ とする。$X$ の分布は二項分布 $B\left( 20\ ,\ \frac{1}{6} \right)$ より 平均 $m = 20 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$ , 分散 $v = 20 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{9}$ である。図 1 は $X$ の確率分布を棒グラフにしたものと，平均 $\frac{10}{3}$ 分散 $\frac{25}{9}$ の正規分布 $N\left( \frac{10}{3}\ ,\ \frac{25}{9} \right)$ の密度関数を重ねて描いたもの。




**例 2** サイコロを 45 回投げて 1 の目の出た回数を $X$ とする。$X$ の分布は二項分布 $B\left( 45\ ,\ \frac{1}{6} \right)$ より 平均 $m = 45 \times \frac{1}{6} = \frac{15}{2}$ , 分散 $v = 45 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{4}$ である。図 2 は $X$ の確率分布を棒グラフにしたものと，平均 $\frac{15}{2}$ 分散 $\frac{25}{4}$ の正規分布 $N\left( \frac{15}{2}\ ,\ \frac{25}{4} \right)$ の密度関数を重ねて描いたもの。




**例 3** サイコロを 80 回投げて 1 の目の出た回数を $X$ とする。$X$ の分布は二項分布 $B\left( 80\ ,\ \frac{1}{6} \right)$ より 平均 $m = 80 \times \frac{1}{6} = \frac{40}{3}$ , 分散 $v = 80 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{100}{9}$ である。図 3 は $X$ の確率分布を棒グラフにしたものと，平均 $\frac{40}{3}$ 分散 $\frac{100}{9}$ の正規分布 $N\left( \frac{40}{3}\ ,\ \frac{100}{9} \right)$ の密度関数を重ねて描いたもの。




**例 4** サイコロを $n$ 回投げて 1 の目の出た回数を $X$ とする。$X$ の分布は二項分布 $B\left( n\ ,\ \frac{1}{6} \right)$ より

平均 $m = n \times \frac{1}{6} = \frac{n}{6}$ ， 分散 $v = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5n}{36}$ ， 標準偏差 $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{5n}{36}}$ である。

$n$ が大きくなると $X$ の分布は平均 $\frac{n}{6}$ 分散 $\frac{5n}{36}$ の正規分布 $N\left( \frac{n}{6}\ ,\ \frac{5n}{36} \right)$ に近づく。

すなわち正規分布で近似できる。$a < b$ に対し十分大きな $n$ に対して以下のように近似できる。

$$P(a \leqq X \leqq b) \fallingdotseq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx = \int_{\boldsymbol{a^*}}^{\boldsymbol{b^*}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ただし

$$\boldsymbol{a^*} = \frac{a-m}{\sigma} = \frac{a - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}} \quad , \qquad \boldsymbol{b^*} = \frac{b-m}{\sigma} = \frac{b - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}$$

一般に確率変数 $X$ が二項分布 $\boldsymbol{B(\ n\ ,\ p\ )}$ に従うとき，$n$ が十分大きければ，$X$ の分布は平均 $np$，分散 $np(1-p)$ の正規分布 $\boldsymbol{N\left(\ np\ ,\ np(1-p)\ \right)}$ で近似できる。

$$\boxed{P(\ a \leqq X \leqq b\ ) \fallingdotseq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}} dx = \int_{\boldsymbol{a^*}}^{\boldsymbol{b^*}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \quad \left( \boldsymbol{a^*} = \frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \ \ ,\ \ \boldsymbol{b^*} = \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

(注) より正確な近似を求めるときは，次の近似式を使う。

$$P(\ a \leqq X \leqq b\ ) \fallingdotseq \int_{\boldsymbol{(a-0.5)^*}}^{\boldsymbol{(b+0.5)^*}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \left( \boldsymbol{(a-0.5)^*} = \frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad , \quad \boldsymbol{(b+0.5)^*} = \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

**問** 例 3 の場合に $P(10 \leqq X \leqq 20)$ の値を (注) の近似式を用いて近似せよ。