< 正規分布 2 >

正の数 σ と実数 m に対し

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

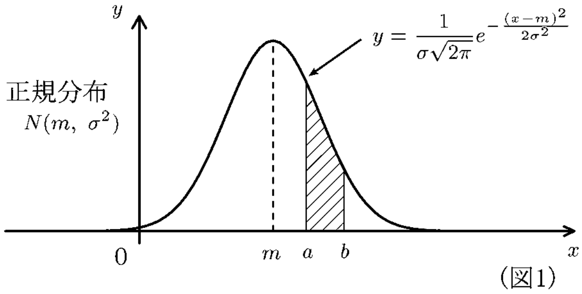
は平均 m，分散 σ^2 の確率密度関数である。確率変数 X がこの密度関数 $p(x)$ に従うとき，すなわち

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

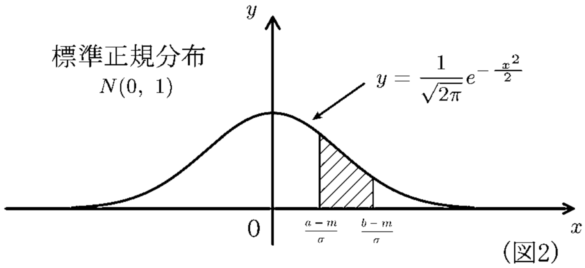
で表されるとき，X の分布を
「平均 m，分散 σ^2 の**正規分布** (Normal Distribution)」といい，記号 $N(m, \sigma^2)$ で表す。X を標準化した確率変数を

$$X^* = \frac{X-m}{\sigma}$$

とおくと， X^* の分布は平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0, 1)$ に従う。実際



(図1)



(図2)

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P\left(\frac{a-m}{\sigma} < X^* < \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

となる。$\left(\text{ここで } u = \dfrac{x-m}{\sigma} \text{ と変数変換している。}\right)$ 図 1 の斜線部分の面積が $P(a < X < b)$ であり，図 2 の斜線部分の面積と等しい。

例題 X が $N(30, 5^2)$ の正規分布に従うとき $P(25 \leqq X \leqq 40)$ を求めよ。

(解) X は連続分布なので $P(x = 25) = P(X = 40) = 0$ となる。$X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-30}{5}$ とおくと，X^* は標準正規分布に従うので

$$P(25 \leqq X \leqq 40) = P(25 < X < 40) = P\left(\frac{25-30}{5} < \frac{X-30}{5} < \frac{40-30}{5}\right)$$
$$= P(-1 < X^* < 2) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

となる。前のページの表より

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

となる。よって答は $P(25 \leqq X \leqq 40) = 0.8185$ である。

問 1 X が $N(10, 4^2)$ の正規分布に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(10 \leqq X \leqq 16)$, (2) $P(14 \leqq X \leqq 22)$, (3) $P(2 \leqq X \leqq 18)$

問 2 X が $N(m, \sigma^2)$ の分布に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(m - 1.96\sigma \leqq X \leqq m + 1.96\sigma)$ (2) $P(m - 2.58\sigma \leqq X \leqq m + 2.58\sigma)$