< 連続分布 5 >

平均 m，分散 v である確率変数 X に対し，$\sigma = \sqrt{v}$ を X の**標準偏差**という。
このとき

$$\boxed{X^* = \frac{X-m}{\sigma}} \quad \text{(標準化された確率変数)}$$

とおくと，前ページ問の結果より X^* は平均 0，分散 1 の確率変数である。
X^* を X の**標準化された確率変数**という。

例 X が密度 $p(x)$ に従う確率変数で，平均 5，分散 9 であるとする。
このとき標準偏差は $\sigma = \sqrt{9} = 3$ である。標準化された確率変数 $X^* = \dfrac{X-5}{3}$ の密度関数を求めたい。今任意の定数 $a, b (a < b)$ に対して

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$$

である。よって

$$P(a < X^* < b) = P\left(a < \frac{X-5}{3} < b\right) = P(3a+5 < X < 3b+5) = \int_{3a+5}^{3b+5} p(x)dx$$

となる。ここで $y = \dfrac{x-5}{3}$ とおくと，$x = 3y+5$ であり，$\dfrac{dx}{dy} = 3$ より $dx = 3dy$ であるから置換積分法より

$$\int_{3a+5}^{3b+5} p(x)dx = \int_a^b p(3y+5)3dy$$

となる。よって

$$P(a < X^* < b) = \int_a^b 3p(3y+5)dy = \int_a^b 3p(3x+5)dx$$

であるから，X^* の密度関数は $3p(3x+5)$ である。

問 X が密度 $p(x)$ に従う確率変数で，平均 m，分散 v，標準偏差 $\sigma = \sqrt{v}$ であるとする。このとき標準化された確率変数 $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ の密度関数を求めよ。