< 連続分布 4 >

確率変数 X が確率密度関数 $p(x)$ の分布に従う場合，すなわち

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx \qquad \big(a\ ,\ b\ \ (a < b)\ \text{は任意の定数}\big)$$

である場合，その平均を

$$\boxed{E[X] \ = \ m \ = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx} \quad \textbf{(平均)}$$

と書くことにする。この平均値 m に対し，$(X-m)^2$ も確率変数であり，その平均は 19 ページと同様に

$$E[(X-m)^2] \ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x)dx$$

となる。従って確率変数 X の分散は

$$\boxed{v \ = \ E[(X-m)^2] \ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x)dx} \quad \textbf{(分散)}$$

と表される。ただし $m = E[X]$ である。
今定数 α , β に対し，

$$E[\alpha X + \beta] \ = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta)p(x)dx \ = \ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

となるが $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E[X]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \ 1$ より

$$\boxed{E[\alpha X + \beta] \ = \ \alpha E[X] + \beta} \qquad (\alpha, \beta\ \text{は定数})$$

が成り立つ。

例 平均 m，分散 v である確率変数 X に対し，

$$Y = 3X + 5$$

とおくと，Y も確率変数である。Y の平均を m_Y とすると

$$m_Y = E[Y] = E[3X+5] = 3E[X] + 5 = 3m + 5$$

となる。Y の分散を v_Y とすると

$$\begin{aligned} v_Y = E[(Y - m_Y)^2] &= E[\big(3X + 5 - (3m+5)\big)^2] = E[9(X-m)^2] \\ &= 9E[(X-m)^2] = 9v \end{aligned}$$

問 平均 m，分散 v である確率変数 X に対し

$$Y = \frac{X - m}{\sqrt{v}}$$

とおく。Y の平均 m_Y と分散 v_Y を求めよ。