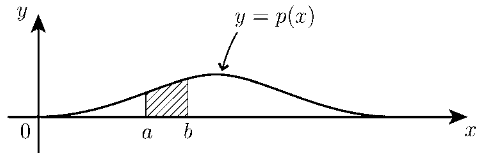
＜ 連続分布 3 ＞

確率変数 X と定数 $a, b(a<b)$ に対し,「 X が a より大きく b より小さい確率 」を $P(a<X<b)$ と略記する。今ある確率密度関数 $p(x)$ があって

$$(*)\quad \boxed{P(a<X<b)=\int_a^b p(x)dx} \quad \text{(連続分布の確率)}$$



で定まるとき,「 確率変数 X は **密度** $p(x)$ **の連続分布** に従う 」という。$y=p(x)$ のグラフが右図のような場合には $P(a<X<b)$ は図の斜線部分の面積である。
$p(x)$ は確率密度関数 $\left(p(x)\geqq 0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1\right)$ であるから

$$(1)\quad \boxed{P(-\infty<X<\infty)=1} \quad \text{(全事象の確率 1)}$$

であり，また任意の定数 a に対し,

$$(2)\quad \boxed{P(X=a)=\int_a^a p(x)dx=0} \quad \text{(1 点 } a \text{ である確率 0)}$$

となる。(1) 式は確率変数 X がどんな場合でも成り立つ式であるが，(2) 式は連続分布特有の性質である。

(注 1)　サイコロ投げで出た目の数を X とすると $P(X=1)=P(X=2)=\cdots=P(X=6)=\dfrac{1}{6}$ であり (2) 式は成り立たない。このような場合 X は**離散分布**という。

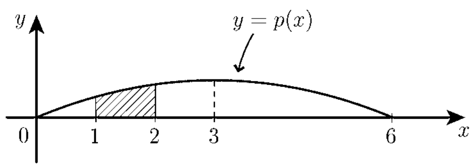
(注 2)　$F(x)=P(X\leqq x)$ を X の**分布関数**をいう。$(*)$ 式のような場合は，前ページ問 2 のように $y=F(x)$ のグラフが「連続」になるので「連続分布」という。注 1 のような場合は連続にならない。

確率変数 X が密度 $p(x)$ に従う場合 (=$(*)$ 式で確率が定まる場合) に，X の平均と分散は $p(x)$ の平均と分散で定める。

$$\boxed{m=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx}\ \text{(平均)}\quad ,\quad \boxed{v=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2p(x)dx}\ \text{(分散)}$$

例　X が密度

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{36}x(6-x) & : \ 0\leqq x\leqq 6\\ 0 & : \ \text{その他}\end{cases}$$



に従う場合，P28 例より

平均 $m=3$,　分散 $v=\frac{9}{5}$

である。また　$P(1<X<2)=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{36}x(6-x)dx=\frac{1}{36}\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{5}{27}$

問　$p(x)$ が P28 問 (2) の場合に平均 m と分散 v を求め，$P(1<X<2)$ を計算せよ。