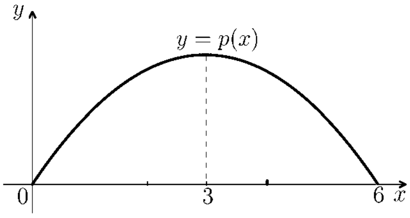
＜確率密度関数 1＞

非負な関数で，実数全体の積分が 1 になる関数を**確率密度関数**という。
すなわち

$$\boxed{p(x)\ :\ \text{確率密度関数}\ \Leftrightarrow\ p(x)\ \geqq\ 0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx\ =\ 1}$$

例 1　定数 $k > 0$ に対し



$$p(x) = \begin{cases} kx(6-x) & :\ 0 \leqq x \leqq 6 \\ 0 & :\ \text{その他} \end{cases}$$

とおく。$p(x)$ が確率密度関数とすると

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^6 kx(6-x)dx = k\int_0^6 (6x-x^2)dx = k\left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 36k$$

より　　$k = \dfrac{1}{36}$

確率密度関数 $p(x)$ に対し，前ページの重心 g に相当する値を**平均**という。

$M = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ になるから，$p(x)$ の平均を m とすると

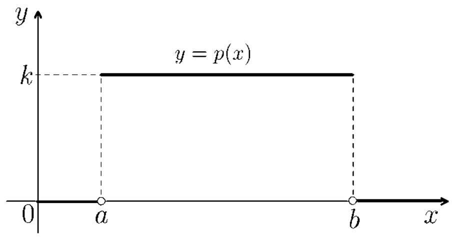
$$\boxed{m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx}\ \text{(確率密度関数}\ p(x)\ \text{の}\textbf{平均}\text{)}$$

例 2　例 1 の関数 $p(x)$ の平均を m とすると，

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^6 x\frac{1}{36}x(6-x)dx = \frac{1}{36}\int_0^6 (6x^2-x^3)dx = \frac{1}{36}\left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 3$$

問　定数 k に対し，以下の関数 $p(x)$ が確率密度関数になるように k の値を求め，その平均 m を求めよ。

(1)　$p(x) = \begin{cases} k & :\ a \leqq x \leqq b \\ 0 & :\ \text{その他} \end{cases}$



(2)　$p(x) = \begin{cases} kx(2-x) & :\ 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & :\ \text{その他} \end{cases}$