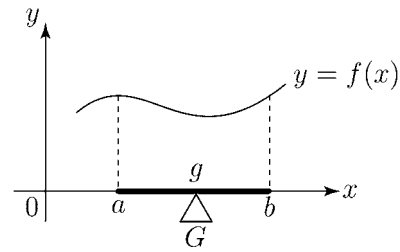


< 質量と重心 3 >

数直線の区間 $[a, b]$ に質量があるとき, その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば, 全質量 M と重心の座標 g は

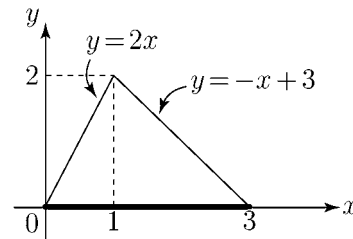


$$M = \int_a^b f(x)dx, \quad g = \frac{1}{M} \int_a^b xf(x)dx$$

で表される。 $f(x)$ を単に密度関数とか重み関数などという。

例 数直線上の区間 $[0, 3]$ に質量があり, その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 & : 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



である場合, 全質量 M と重心の座標 g は

$$M = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^3 (-x + 3)dx = [x^2]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = 3$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{M} \int_0^3 xf(x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x \times 2x dx + \frac{1}{3} \int_1^3 x \times (-x + 3)dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

問 数直線上の区間 $[0, 2]$ に質量があり, その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = -x^2 + 2x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

である場合, 全質量 M と重心の座標 g を求めよ。

