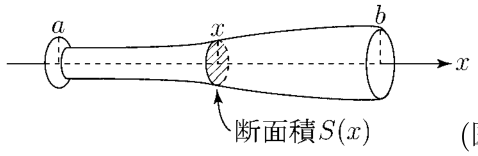
< 質量と重心 2 >

例 野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 (x 軸) に垂直な断面の断面積 $S(x)$ がわかっている場合，この立体の体積 V は

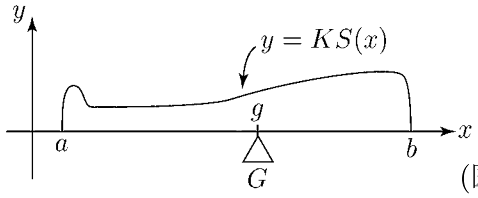
$$V = \int_a^b S(x)dx$$



(図 1)

であった。もしこのバットの材質が均一であれば，その質量 M は体積の定数倍 (K 倍) になると考えられるので

$$M = KV = \int_a^b KS(x)dx$$



(図 2)

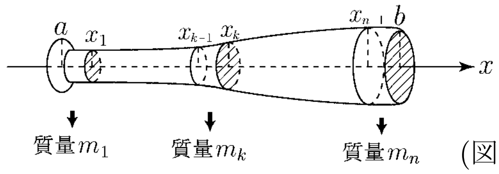
と表される。この場合被積分関数 $KS(x)$ をこの立体の**質量分布の密度関数**という。
この立体の重心 G の位置 g(図 2) を求めたい。
区間 $[a, b]$ を n 等分して，その分点を

$$a = x_0,\ x_1, \cdots, x_n = b$$

とおき，それぞれ

$$m_1,\ m_2,\ \cdots, m_n$$

の質量がかかっているとする (図 3)。



(図 3)

このとき $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ とすると

$$m_k = K\int_{x_k-1}^{x_k} S(x)dx \fallingdotseq KS(x_k)\Delta x \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。前ページの結果より

$$g = \frac{1}{M}\{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\} \fallingdotseq \frac{1}{M}\{x_1KS(x_1) + \cdots + x_nKS(x_n)\}\Delta x$$

である。$n \to \infty$ とすれば定積分の区分求積法による定義から

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\int_a^b xKS(x)dx} \quad \textbf{(重心)}$$

となる。

問 図 2 のように数直線の a から b までの区間に質量がある場合，質量分布の密度関係を $f(x)$ とすると，全質量 M は

$$M = \int_a^b f(x)dx$$

である。重心の座標 g を M と $f(x)$ を使って表せ。