＜ 二項分布 ＞

例 1 サイコロを 4 回振る。1 の目の出る回数を X とすると，15 ページより X の確率分布は右表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
確率	${}_4C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^4$	${}_4C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^3$	${}_4C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^2$	${}_4C_3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^1$	${}_4C_4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^0$	1

前ページ例 2 のように

$$\boxed{X_k : k \text{ 回目に } 1 \text{ の目が出れば } X_k = 1, \text{ そうでなければ } X_k = 0} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと，4 回振って 1 の目が出る回数 X は

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

と表される。X_1, X_2, X_3, X_4 は互いに独立であり，$E[X_k] = \dfrac{1}{6}$, $V(X_k) = \dfrac{5}{36}$
より

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = 4 \times \frac{5}{36} = \frac{5}{9}$$

例 2 サイコロを n 回振る。1 の目の出る回数を X とすると，1 の目が k 回出る確率は

$$P(X = k) = {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \quad , (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

となる。例 1 と同様にして，X の平均と分散は

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = n \times \frac{1}{6}$$

$$V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = n \times \frac{5}{36} = n \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

となる。

一般にある試行において事象 A の起こる確率を p $(0 < p < 1)$ とする。
この試行を n 回くり返すとき，事象 A の起こる回数を X とすると，k 回起こる確率は

$$\boxed{P(X = k) = {}_nC_k \; p^k (1 - p)^{n-k}} \; , (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

となる。X の確率分布がこの式を満たすとき，確率 p に対する次数 n の **二項分布** (Binomial distribution) といい $B(n, p)$ で表す。例 2 と同様に考えると X の平均と分散は

$$\boxed{E[X] = np} \text{ (平均)} \quad , \quad \boxed{V(X) = np(1 - p)} \text{ (分散)}$$

である。4 ページの二項定理で $a = 1 - p$, $b = p$ とおくと $(a + b)^n = 1^n = 1$ より

$$\boxed{1 = {}_nC_0 p^0 (1 - p)^n + {}_nC_1 p^1 (1 - p)^{n-1} + {}_nC_2 p^2 (1 - p)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1} p^{n-1} (1 - p)^1 + {}_nC_n p^n (1 - p)^0}$$

となるから二項分布の各確率の和が 1 であることがわかる。

問 コインを 7 回投げる。表の出る回数を X とすると，X の確率分布は二項分布 $B\left(7 \, , \, \dfrac{1}{2}\right)$ である。このとき次の値を求めよ。

(1) $P(X = 0)$ (2) $P(X = 3)$ (3) $E[X]$ (4) $V(X)$