＜独立確率変数 2 ＞

例 1 前ページ例 2 の場合，平均は

$$E[X]=1\ ,\quad E[Y]=\frac{1}{2}\ ,\quad E[X+Y]=\frac{3}{2}$$

$X+Y$	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

であり分散は

$$V(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{4}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ ,\quad V(Y)=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$V(X+Y)=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

となる。

一般に 2 つの確率変数 X と Y に対して

$$\boxed{E[X+Y]=E[X]+E[Y]}\ \text{(確率変数の和の平均)}$$

が成り立つ。さらに X と Y が独立ならば

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}\ \text{(独立確率変数の和の分散)}$$

が成り立つ。(証明略)

3 個以上の確率変数についても同様な結果が成り立つ。

n 個の独立な試行によって定まる n 個の確率変数 $X_1,\cdots,X_n$ に対し

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\times P(X_2=x_2)\times\cdots\times P(X_n=x_n)$$

がすべての実数値 $x_1,\cdots,x_n$ に対して成立する。このとき確率変数列 $X_1,\cdots,X_n$ は互いに**独立**という。このとき上と同様に

$$\boxed{\begin{aligned}&E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]\\&V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\end{aligned}}\quad\left(\begin{array}{l}\text{独立確率変数列の和}\\\text{の平均と分散}\end{array}\right)$$

が成り立つ。

例 2 サイコロを 3 回振る。確率変数 X_1,X_2,X_3 を以下のように定める

X_1 : 1 回目 1 の目が出れば $X_1=1$，そうでなければ $X_1=0$

X_2 : 2 回目 1 の目が出れば $X_2=1$，そうでなければ $X_2=0$

X_3 : 3 回目 1 の目が出れば $X_3=1$，そうでなければ $X_3=0$

X_1,X_2,X_3 は互いに独立である。またその確率分布は全て同じであるので右表のように書いた。

$X_k(k=1,2,3)$ の確率分布

X_k	0	1	計
確率	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E[X_k]=0\times\frac{5}{6}+1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad,\quad V(X_k)=\left(0-\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}\qquad(k=1,2,3)$$

より

$$E[X_1+X_2+X_3]=E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$V(X_1+X_2+X_3)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{5}{12}$$

問 サイコロを n 回振る。例 2 のように $X_1,X_2,\cdots,X_n$ を定めるとき和の平均と分散を求めよ。

$E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=$ 　　　　　　　　，　$V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=$