＜ 独立確率変数 1 ＞

例 1 サイコロを 2 回投げる。確率変数 X と Y を

X： 1 回目の出た目の数

Y： 2 回目の出た目の数

とする。今「1 回目に 3 の目が出てかつ 2 回目に 4 の目が出る確率」を単に

$$P(X=3,\ Y=4)$$

と書くことにすると

$$P(X=3,\ Y=4)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=P(X=3)\times P(Y=4)$$

となる。以下同様にして全ての $1 \leqq i, j \leqq 6$ に対し

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)\times P(Y=j) \qquad (1\leqq i\leqq 6,\ 1\leqq j\leqq 6)$$

がなりたつ。

一般に 2 つの確率変数 X と Y に対し

$$\boxed{P(X=x,\ Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y)}$$

が全ての x,y に対し成り立つとき,「X と Y は **独立**」という。

例 1 の場合 X は 1 回目の試行によって定まり，Y は 2 回目の試行によって定まる。1 回目の試行と 2 回目の試行が独立だから，X と Y は独立になる。

このように 独立な試行によって定まる確率変数は独立になる。

例 2 10 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げる。

X ： 10 円硬貨の表の枚数

Y ： 100 円硬貨の表の枚数

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(表 1)

Y	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(表 2)

10 円硬貨を投げることと 100 円硬貨を投げることは互いに独立な試行である。従って X と Y は独立。よって

$$P(X=0,\ Y=1)=P(X=0)\times P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1,\ Y=0)=P(X=1)\times P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

問 1 例 2 の結果を表 3 に記した。表 3 を X と Y の**同時確率分布**という。表 3 を完成せよ。

X	0	0	1	1	2	2	計
Y	0	1	0	1	0	1	
確率		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$				1

(表 3)

問 2 例 2 の場合，表 3 より

$$P(X+Y=1)=P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=0)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

となる。表 4 を完成せよ。

$X+Y$	0	1	2	3	計
確率		$\frac{3}{8}$			1

(表 4)