# < 確率変数の平均と分散 2 >

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 確率 $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

(表 1)

**例 1** 表 1 のような確率分布をした確率変数 $X$ の期待値は

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

である。$X$ に対し

$$Y = 6X + 4$$

とおくと $Y$ も確率変数でありその期待値は表 2 より

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| $Y = 6X + 4$ | 10 | 16 | 22 | |
| 確率 $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

(表 2)

$$E[Y] = 10 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{3} + 22 \times \frac{1}{6} = 14$$

となる。一方 $6E[X] + 4 = 6 \times \frac{5}{3} + 4 = 14$ より

$$E[Y] = E[6X + 4] = 6E[X] + 4$$

が成り立つ。

一般に確率変数 $X$ と定数 $a, b$ に対し

$$\boxed{E[aX + b] = aE[X] + b} \quad (a \text{ と } b \text{ は定数})$$

が成り立つ。

確率分布が表 3 である確率変数 $X$ の平均を $m$，分散を $v$ とする。すなわち

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

(表 3)

$$m = E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

$$v = (x_1 - m)^2p_1 + (x_2 - m)^2 + \cdots + (x_n - m)^2p_n$$

である。$X$ に対し

$$(X - m)^2$$

| $(X-m)^2$ | $(x_1-m)^2$ | $(x_2-m)^2$ | $\cdots$ | $(x_n-m)^2$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

(表 4)

も確率変数であり，その確率分布は表 4 になる。これから $(X - m)^2$ の期待値が $v$

$$\boxed{E\left[(X-m)^2\right] = (x_1 - m)^2p_1 + (x_2 - m)^2p_2 + \cdots + (x_n - m)^2p_n = v}$$

(**「 $X$の分散」=「$(X-m)^2$の平均」** )

であることがわかる。$X$ の分散を記号 $V(X)$ で書くと

$$\boxed{V(X) = E\left[(X-m)^2\right] = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]} \quad (\boldsymbol{X}\textbf{の分散})$$

となる。ここで $m = E[X]$ である。

**例 2** 平均 $m$ 分散 $v$ の確率変数 $X$ に対し $Y = 6X + 4$ とおくと $E[Y] = E[6X + 4] = 6E[X] + 4 = 6m + 4$ より $Y$ の平均は $6m + 4$ である。$Y$ の分散は

$$V(Y) = E\left[\left(Y - E[Y]\right)^2\right] = E\left[\left(6X + 4 - (6m + 4)\right)^2\right] = E\left[6^2(X-m)^2\right] = 6^2E\left[(X-m)^2\right] = 36v$$

**問** 平均 $m$，分散 $v$ の確率変数 $X$ と定数 $a$，$b$ に対し，$Y = aX + b$ とおく。$E[Y]$ と $V(Y)$ を求めよ。