高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series **A**

No. **12**

内容

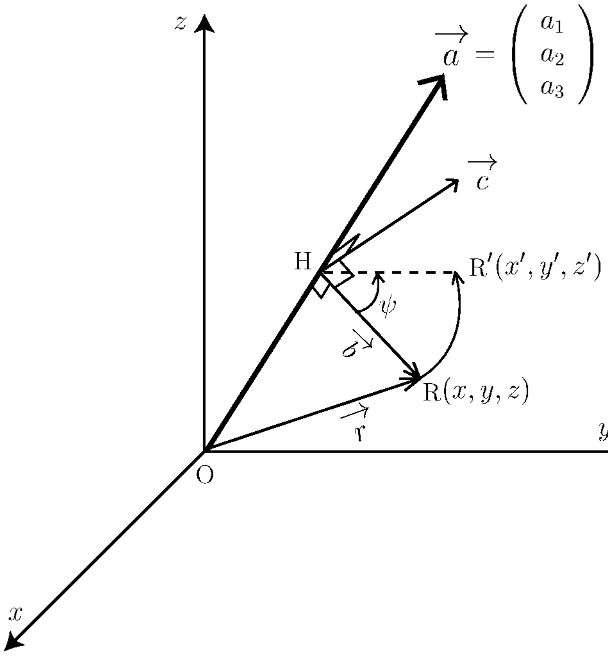
◎ 空間の回転

◎ 2変数関数

◎ 偏微分

◎ 体積

◎ 重積分



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜ベクトル三重積1＞

ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ に対して $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の外積と $\overrightarrow{c}$ の外積 $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ を**ベクトル三重積**という。次の等式が成立する。

$$(*) \quad \boxed{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) \overrightarrow{a}}$$

ただし $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ との内積である。

[証明] $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{c} = c_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + c_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + c_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ に対し $(*)$ 式を証明したい。

問1 以下の計算を実行し、$(*)$ 式の左辺を $\{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ の形にせよ。

$$(*) \text{ の左辺} = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \times \overrightarrow{c}$$

$$= \left\{(a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right\} \times \left\{c_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + c_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + c_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right\}$$

$$=$$

問2 以下の計算を実行し、$(*)$ 式の右辺を $\{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \{\quad\}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ の形にせよ。

$$(*) \text{ の右辺} = \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) \overrightarrow{a}$$

$$= (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)(b_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}})$$

$$=$$

問 1 と問 2 の結果より $(*)$ の左辺 $=$ $(*)$ の右辺が分かる。従って $(*)$ 式が証明された。

＜ベクトル三重積2＞

前ページより

(1) $\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}}$

が分かった。同様にして

(2) $\boxed{\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}}$

が成立する。

問1 (2) 式を証明したい。外積の性質 $\vec{\Box}\times\vec{\triangle} = -\vec{\triangle}\times\vec{\Box}$ と (1) 式 $\left(\vec{\Box}\times\vec{\triangle}\right)\times\vec{\bigcirc} = \left(\vec{\bigcirc}\cdot\vec{\Box}\right)\vec{\triangle} - \left(\vec{\triangle}\cdot\vec{\bigcirc}\right)\vec{\Box}$ を使って (2) 式の右辺を導け。

左辺 $= \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = -\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a} =$

例 $\vec{a} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} - 2\vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{b} = -\vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}} + 4\vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{c} = 5\vec{\boldsymbol{i}} - 3\vec{\boldsymbol{j}} - 6\vec{\boldsymbol{k}}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} &= \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\\
&= \left(5\times 3 - 3\times 1 + (-6)\times(-2)\right)\vec{b} - \left(-1\times 5 + 2\times(-3) + 4\times(-6)\right)\vec{a}\\
&= 24\vec{b} - (-35)\vec{a}\\
&= 24\left(-\vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}} + 4\vec{\boldsymbol{k}}\right) + 35\left(3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} - 2\vec{\boldsymbol{k}}\right)\\
&= 81\vec{\boldsymbol{i}} + 83\vec{\boldsymbol{j}} + 26\vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\\
&= \left(5\times 3 + (-3)\times 1 + (-6)\times(-2)\right)\vec{b} - \left(-3\times(-1) + 1\times 2 + (-2)\times 4\right)\vec{c}\\
&= 24\vec{b} - (-9)\vec{c}\\
&= 24\left(-\vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}} + 4\vec{\boldsymbol{k}}\right) + 9\left(5\vec{\boldsymbol{i}} - 3\vec{\boldsymbol{j}} - 6\vec{\boldsymbol{k}}\right)\\
&= 21\vec{\boldsymbol{i}} + 21\vec{\boldsymbol{j}} + 42\vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

問2 $\vec{a} = \vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{b} = 4\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{c} = -\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} + 5\vec{\boldsymbol{k}}$ に対し、以下のベクトル三重積を $\{\quad\}\vec{\boldsymbol{i}} + \{\quad\}\vec{\boldsymbol{j}} + \{\quad\}\vec{\boldsymbol{k}}$ の形にせよ。

(1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

(2) $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}$

(3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

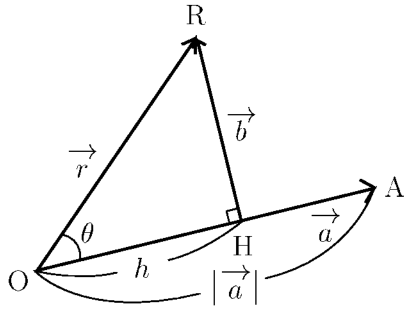
(4) $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

＜ 直交系 ＞

3 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに直交しているとき、すなわち

$$\vec{a} \perp \vec{b},\quad \vec{b} \perp \vec{c},\quad \vec{c} \perp \vec{a} \quad \left(\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0\right)$$

であるとき、$\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ は直交系であるという。



例 空間の 3 点 O,A,R に対し、点 R から線分 OA に下した垂線の足を H とする。

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}},\quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{HR}}$

とし、線分 OH の長さを h、$\vec{a}$ と $\vec{r}$ のなす角を θ とする。このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{r} = |\vec{a}||\vec{r}|\cos\theta = |\vec{a}|h,\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{h}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

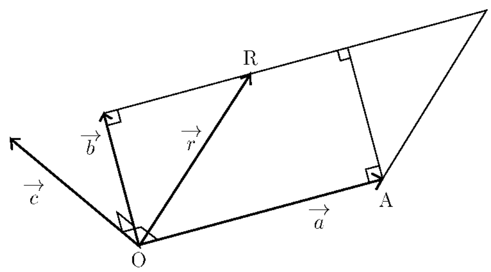
となる。従って

$$\boxed{\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{HR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{r} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}}$$

と表される。このとき $\vec{a} \perp \vec{b}$ である。さらに

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ とおくと $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$ となり

$\left\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right\}$ は直交系である。



(注) 上の例で

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{r}}$$

となる。これは右図より外積の幾何学的意味から分かる。

式で表すと $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ より

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \left\{\vec{r} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}\right\} = \vec{a} \times \vec{r} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|^2}\right)\left(\vec{a} \times \vec{a}\right) = \vec{a} \times \vec{r}$$

問 上の例で $|\vec{a}| = 1$ であるとき以下の問に答えよ。

(1) $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{r}$ で表せ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 1$ を用いてベクトル三重積 $\left(\vec{a} \times \vec{r}\right) \times \vec{a}$ を簡単にせよ。

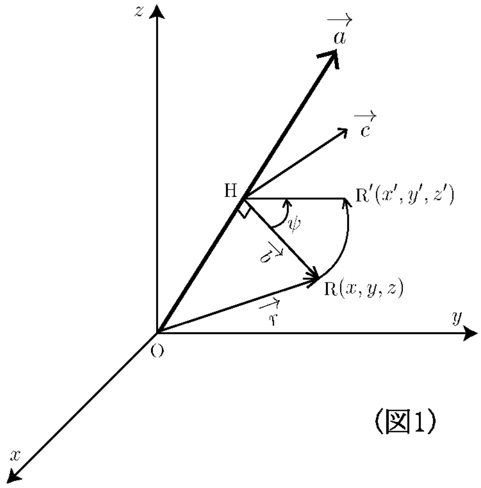
(3) $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ であることを幾何学的に証明せよ。

＜空間の回転1＞

座標空間の原点Oを始点とするベクトル $\overrightarrow{a}$ を中心軸として、空間の任意の点を角度 ψ だけ回転させる。点 $\mathrm{R}(x, y, z)$ が回転によって点 $\mathrm{R}'(x', y', z')$ に移動したとする。x', y', z' を x, y, z で表したい。計算の都合上 $\overrightarrow{a}$ は単位ベクトルとする。すなわち

$$|\overrightarrow{a}| = 1$$

と仮定する。図1のように点Rから $\overrightarrow{a}$ に下した垂線の足をHとする。



(図1)

問1 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{r}$ で表せ。(ヒント $\cdots$ 前ページの例参照)

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} =$

問2 $\overrightarrow{\mathrm{HR}} = \overrightarrow{b}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{r}$ で表せ。

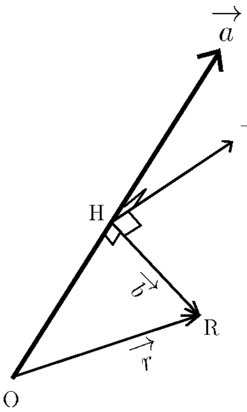
$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{HR}} =$

問3 $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ とする (図2)。

$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{r}$ で表せ。

(ヒント $\cdots$ 前ページの (注) 参照)

$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} =$



(図2)

問4 $|\overrightarrow{c}|$ を $|\overrightarrow{b}|$ で表せ。

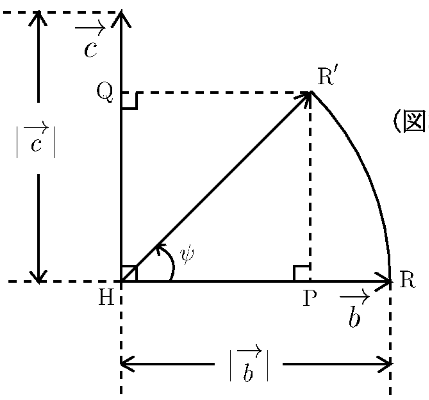
$|\overrightarrow{c}| =$

問5 点Pと点Qの位置を図3のようにとる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を $\overrightarrow{b}$ と角度 ψ で表せ。

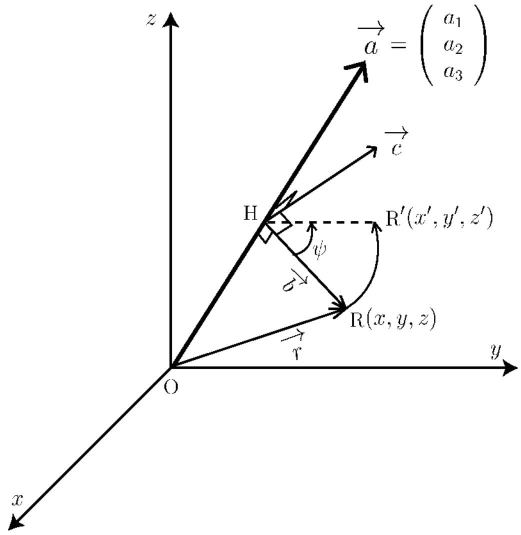
(2) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ を $\overrightarrow{c}$ と角度 ψ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HR}'}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ と角度 ψ で表せ。



(図3)

< 空間の回転2 >



右図で $\left|\overrightarrow{a}\right|=1$ のとき、前ページの結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{a}$$
$$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{r}-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{a}$$
$$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{r}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HR'}}=(\cos\psi)\overrightarrow{b}+(\sin\psi)\overrightarrow{c}$$

となる。従って ψ 回転によって移動した点 $\mathrm{R}'(x',y',z')$ の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HR'}}=\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{a}+(\cos\psi)\left(\overrightarrow{r}-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{a}\right)+(\sin\psi)\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{r}\right)$$
$$=(1-\cos\psi)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{a}+(\cos\psi)\overrightarrow{r}+(\sin\psi)\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{r}$$

となる。

問1 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+a_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+y\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+z\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}$ を $\{\ \ \}\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\{\ \ \}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+\{\ \ \}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ の形にせよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=$

問2 $\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=x'\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+y'\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+z'\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と表される。問 1 の結果を整理して、x',y',z' を x,y,z の一次式 $\{\ \ \}x+\{\ \ \}y+\{\ \ \}z$ の形にせよ。

$x'=$

$y'=$

$z'=$

問3 以下の場合に x',y',z' を x,y,z で表せ。

(1) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ のとき

$x'=$

$y'=$

$z'=$

(2) $\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\psi=120^\circ=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$x'=$

$y'=$

$z'=$

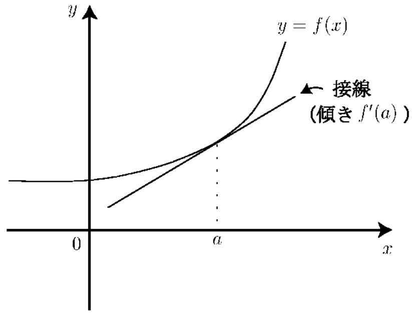
< 微分の復習 >

空間の運動について調べるためにはベクトルに関する微分積分（ = ベクトル解析）の知識が必要になる。このような数学的知識は流体力学や電気・磁気学等の物理学の原理を理解し応用するために必要不可欠である。このベクトル解析を勉強するためには、まず多変数関数の微分・積分の知識が必要になる。そこで次ページ以降で 2 変数関数の微分・積分の原理を理解することを目標とする。
このページでは、1 変数関数の微分の復習をする。

[**導関数の定義**]

x の関数 $f(x)$ の導関数は

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$



[**微分係数**]

導関数 $f'(x)$ の $x = a$ における値 $f'(a)$ を $x = a$ における $f(x)$ の微分係数という。
$f'(a)$ は $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾きを意味する（右上図)。

[**微分の公式**] （ k や n は定数）

(1) $(k)' = 0$, (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, (3) $(\sin x)' = \cos x$, (4) $(\cos x)' = -\sin x$

(5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, (6) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$, (7) $(a^x)' = a^x \log a$, (8) $(e^x)' = e^x$

(9) $(f(x) \times g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ （積の微分）

(10) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ （商の微分）

(11) $y = f(g(x))$ のとき $u = g(x)$ とおくと $y = f(u)$ より

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (f(u))' \times (g(x))' = f'(u) \times g'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$ （合成関数の微分）

例 (1) $\dfrac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$, (2) $\dfrac{d}{du}(\cos(u)) = -\sin(u)$, (3) $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}$

(4) $x = \cos(4t)$ を t で微分する場合は、 $u = 4t$ とおくと $x = \cos(u)$ より

$$\frac{d}{dt}(\cos(4t)) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \times \frac{du}{dt} = \left(\frac{d}{du}(\cos(u))\right) \times \left(\frac{d}{dt}(4t)\right) = -\sin(u) \times 4 = -4\sin(4t)$$

問 以下の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(3x^2 - x + 6\right) =$

(2) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y^2 + 2y - 1}\right) =$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left((x^2 - 1)^6\right) =$

(4) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{-t}\right) =$

(5) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin(1 - x^2)\right) =$

(6) $\dfrac{d}{dy}\left(\log(2y - 1)\right) =$

＜ 2変数関数 ＞

例1 1. たて $x\,cm$, よこ $y\,cm$ の長方形の面積を $z\,cm^2$ とすると、

$$z = x \times y$$

である。

2. 底面が半径 $x\,cm$ の円で、高さが $y\,cm$ の円柱の体積を $z\,cm^3$ とすると、

$$z = \pi x^2 y$$

である。

一般に 2 つの変数 x と y の値が与えられると、それに応じ、もう一つの変数 z の値が定まるとき、 z を x, y の関数と呼び、1 変数の関数 $y = f(x)$ の場合にならって、

$$z = f(x, y)$$

のように書き表す。 x と y を**独立変数**、 z を**従属変数**という。

例2 $f(x, y) = \pi x^2 y$ の場合、

$x = 1$, $y = 3$ のときの関数の値は $f(1, 3) = \pi \times 1^2 \times 3 = 3\pi$

$x = 2$, $y = 5$ のときの関数の値は $f(2, 5) = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$

問 $f(x, y)$ が以下の場合に、それぞれの関数の値を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - x^2 y + 3y^2$, $f(1, 2) =$

(2) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 2}{2y - 1}$, $f(3, 11) =$

(3) $f(x, y) = \cos x \log y$, $f(\pi, e) =$

(4) $f(x, y) = x^y$, $f(5, -1) =$

＜偏導関数 1 ＞

2 変数関数 $z=f(x,y)$ と定数 b に対し、 $y=b$ のとき、 $F(x)=f(x,b)$ とおくと、 $F(x)$ は x の関数である。この導関数 $F'(x)$ を $f_x(x,b)$ と書く、すなわち

$$f_x(x,b)=F'(x)=\frac{d}{dx}f(x,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,b)-f(x,b)}{h}$$

である。

例 $f(x,y)=x^3-3x^2y+2xy^2-4y^3$ の場合

$y=0$ のとき　$f(x,0)=x^3$　より　$f_x(x,0)=(x^3)'=3x^2$

$y=1$ のとき　$f(x,1)=x^3-3x^2+2x-4$　より

$f_x(x,1)=(x^3-3x^2+2x-4)'=3x^2-6x+2$

$y=2$ のとき　$f(x,2)=x^3-6x^2+8x-32$　より

$f_x(x,2)=(x^3-6x^2+8x-32)'=3x^2-12x+8$

一般に $y=b$ のとき　$f(x,b)=x^3-3bx^2+2b^2x-4b^3$　より

$f_x(x,b)=(x^3-3bx^2+2b^2x-4b^3)'=3x^2-6bx+2b^2$

問 2 変数関数 $f(x,y)$ が以下の場合に、$f(x,0),f(x,1),f(x,2),f(x,b)$ および $f_x(x,0),f_x(x,1),f_x(x,2),f_x(x,b)$ を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^2-3x+4xy+2y^2-y+1$

$f(x,0)=$, $f_x(x,0)=$

$f(x,1)=$, $f_x(x,1)=$

$f(x,2)=$, $f_x(x,2)=$

$f(x,b)=$, $f_x(x,b)=$

(2) $f(x,y)=x^3-2x^2y^3+3xy^4-y^5$

$f(x,0)=$, $f_x(x,0)=$

$f(x,1)=$, $f_x(x,1)=$

$f(x,2)=$, $f_x(x,2)=$

$f(x,b)=$, $f_x(x,b)=$

< 偏導関数 2 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対して、 $y = b$ のとき、 x の関数 $f(x, b)$ の導関数は

$$f_x(x, b) = \frac{d}{dx} f(x, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, b) - f(x, b)}{h}$$

であった。この関数 $f_x(x, b)$ は定数 b によって変わる。すなわち、これを b の関数とみて、 b を変数 y に変えたもの、すなわち

$$\boxed{f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}}$$

を $f(x, y)$ の**変数 x に関する偏導関数**という。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合、

$f(x, b) = x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3$ であるから、

$f_x(x, b) = (x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3)' = 3x^2 - 6xb + 2b^2$ より

$f_x(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^2$ となる。

問 2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に $f(x, b), f_x(x, b), f_x(x, y)$ を求めよ。

(1) $f(x, y) = 1 - 3x + 5xy - y^3$

$f(x, b) =$

$f_x(x, b) =$

$f_x(x, y) =$

(2) $f(x, y) = 3x^4 - 2x^2y + xy^3 - 7y^5$

$f(x, b) =$

$f_x(x, b) =$

$f_x(x, y) =$

＜ 偏導関数 3 ＞

2 変数関数　$z = f(x, y)$ と定数 a に対し, $x = a$ のとき,$G(y) = f(a, y)$ とおくと, $G(y)$ は y の関数である。この導関数 $G'(y)$ を $f_y(a, y)$ と書く。すなわち,

$$f_y(a, y) = G'(y) = \frac{d}{dy} f(a, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, y+h) - f(a, y)}{h}$$

である。

例　$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$　の場合

$x = 0$ のとき　$f(0, y) = -4y^3$　より

$$f_y(0, y) = (-4y^3)' = -12y^2$$

$x = 1$ のとき　$f(1, y) = 1 - 3y + 2y^2 - 4y^3$　より

$$f_y(1, y) = (1 - 3y + 2y^2 - 4y^3)' = -3 + 4y - 12y^2$$

$x = 2$ のとき　$f(2, y) = 8 - 12y + 4y^2 - 4y^3$　より

$$f_y(2, y) = (8 - 12y + 4y^2 - 4y^3)' = -12 + 8y - 12y^2$$

$x = a$ のとき　$f(a, y) = a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3$　より

$$f_y(a, y) = (a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3)' = -3a^2 + 4ay - 12y^2$$

問　2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に、$f(0, y), f(1, y), f(2, y), f(a, y)$ および $f_y(0, y), f_y(1, y), f_y(2, y), f_y(a, y)$ を求めよ。

(1)　$f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 2y^2 - y + 1$

$f(0, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(0, y) =$

$f(1, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(1, y) =$

$f(2, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(2, y) =$

$f(a, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(a, y) =$

(2)　$f(x, y) = x^3 - 2x^2y^3 + 3xy^4 - y^5$

$f(0, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(0, y) =$

$f(1, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(1, y) =$

$f(2, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(2, y) =$

$f(a, y) =$ 　　　　　　　　, $f_y(a, y) =$

< 偏導関数 4 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対して, $x = a$ のとき,y の関数 $f(a, y)$ の導関数は

$$f_y(a, y) = \frac{d}{dy} f(a, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, y + h) - f(a, y)}{h}$$

であった。この関数 $f_y(a, y)$ は定数 a によって変わる。すなわち, これを a の関数とみて, a を変数 x に変えたもの, すなわち

$$\boxed{f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}}$$

を $f(x, y)$ の**変数 y に関する偏導関数**という。

例　$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$　の場合

$f(a, y) = a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3$　であるから,

$f_y(a, y) = (a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3)' = -3a^2 + 4ay - 12y^2$　より

$f_y(x, y) = -3x^2 + 4xy - 12y^2$　となる。

問　2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に,$f(a, y), f_y(a, y), f_y(x, y)$ を求めよ。

(1)　$f(x, y) = 1 - 3x + 5xy - y^3$

$f(a, y) =$

$f_y(a, y) =$

$f_y(x, y) =$

(2)　$f(x, y) = 3x^4 - 2x^2y + xy^3 - 7y^5$

$f(a, y) =$

$f_y(a, y) =$

$f_y(x, y) =$

< 偏微分 1 >

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し、変数 x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めることを、**x について偏微分する**という。

偏導関数の定義

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

から、

$$\boxed{x\text{ について偏微分}} = \boxed{y\text{ を定数と考え、}x\text{ だけについて微分する}}$$

といえる。

例 $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ のとき

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x^3)' - 3 \times (x^2)' \times y + 2 \times (x)' \times y^2 - 4y^3 \times (1)' \\ &= 3x^2 - 3 \times 2x \times y + 2 \times 1 \times y^2 - 4y^3 \times 0 \\ &= 3x^2 - 6xy + 2y^2 \end{aligned}$$

(注) x について偏微分するとき、x のつかない項 (y だけの項) は、偏微分すると 0 になる。

問 次の関数を x について偏微分せよ。

(1) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 2y + 5$

$f_x(x,y) =$

(2) $f(x,y) = x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - x^2y^3 - 2xy^4 + 3y^5$

$f_x(x,y) =$

(3) $f(x,y) = e^{-x} + \cos x \sin(2y) - x \log\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{y}{2x}$

$f_x(x,y) =$

< 偏微分 2 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めることを、**y について偏微分する**という。

偏導関数の定義

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

から、

$$\boxed{y \text{ について偏微分}} = \boxed{x \text{ を定数と考え、} y \text{ だけについて微分する}}$$

といえる。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ のとき

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^3 \times (1)' - 3x^2 \times (y)' + 2x \times (y^2)' - 4 \times (y^3)' \\ &= x^3 \times 0 - 3x^2 \times 1 + 2x \times 2y - 4 \times 3y^2 \\ &= -3x^2 + 4xy - 12y^2 \end{aligned}$$

(注) y について偏微分するとき、y のつかない項 (x だけの項) は、偏微分すると 0 になる。

問 次の関数を y について偏微分せよ。

(1) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 2y + 5$

$f_y(x, y) =$

(2) $f(x, y) = x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - x^2y^3 - 2xy^4 + 3y^5$

$f_y(x, y) =$

(3) $f(x, y) = e^{-x} + \cos x \sin(2y) - x \log\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{y}{2x}$

$f_y(x, y) =$

＜ 偏微分 3 ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し、x に関する偏導関数を

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

等の記号で表わす (すべて同じ意味である)。ここで記号 ∂ はデルとかラウンドディーなどと呼ばれる。
同様にして、$z = f(x,y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

などの記号で表わす。

(注)　1 変数関数 $y = f(x)$ の微分の場合は $\dfrac{dy}{dx}$ の記号を使うが、2 変数以上の関数の偏微分の場合は、$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ のように、d のかわりに ∂ を用いる。

例

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1}$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^n) = 0$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(y^n) = 0$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(y^n) = ny^{n-1}$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\cos x\right) \times \sin y = -\sin x \sin y$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin y) = \cos x \times \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\sin y\right) = \cos x \cos y$

(4) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right) = \sqrt{y} \times \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}$

問　次の偏導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3xy^2 + 2y^3)$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3xy^2 + 2y^3)$

$=$　　　　$=$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x}{y^2}\right) =$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x}{y^2}\right) =$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^{-y}) =$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^{-y}) =$

＜ 偏微分 4 ＞

2 変数関数 f と 1 変数関数 g との合成関数

$$z = g\Big(f(x,y)\Big)$$

を偏微分する場合、

$$u = f(x,y) \text{ とおくと、 } z = g(u)$$

より、 1 変数関数の合成関数の微分と同じように、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ。

例 $z = \sin(x^2 + 3xy)$ の場合、

$u = x^2 + 3xy$ とおくと $z = \sin u$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} &= (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (2x + 3y) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times (2x + 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} &= (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (3x) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times 3x \end{aligned}$$

問 次の関数を偏微分せよ。

(1) $z = \left(x - y^2\right)^5$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(2) $z = \sqrt{1 - 2x + y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(3) $z = e^{1-x+3y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(4) $z = \sin\big(x^2 - x\log y\big)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

< 偏微分 5 >

偏導関数の記号に慣れる練習をする。

例 (1) $f(x,y)=x^3-5xy^2+y^4$ のとき、

$$f_x(x,y)=3x^2-5y^2\ ,\quad f_y(x,y)=-10xy+4y^3$$

(2) $z=e^{x+3y}$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+3y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3e^{x+3y}$$

(3) $z=\log(1+x^2+y^4)$ のとき、

$$z_x=\frac{2x}{1+x^2+y^4},\quad z_y=\frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$$

問 以下の偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^2-xy^2+3y^4$ のとき、

$f_x(x,y)=$, $f_y(x,y)=$

(2) $f(x,y)=\cos(1-xy^2)$ のとき、

$f_x(x,y)=$, $f_y(x,y)=$

(3) $z=\dfrac{1}{2x-xy}$ のとき、

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^4}}$ のとき、

$z_x=$, $z_y=$

(5) $z=e^{2x-y^3}$ のとき、

$z_x=$, $z_y=$

＜ 2 階偏導関数 1 ＞

2 変数関数 $z = f(x,y)$ を x に関して 2 回偏微分したもの、すなわち $f_x(x,y)$ の x に関する偏導関数を

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}z\Big) = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_x(x,y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(f(x,y)\Big)$$

等の記号で表し、 x に関する 2 階偏導関数という。
同様に、 $z = f(x,y)$ を y に関して 2 回偏微分したもの、すなわち $f_y(x,y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial y}z\Big) = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_y(x,y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(f(x,y)\Big)$$

等の記号で表し、 y に関する 2 階偏導関数という。

例 (1) $f(x,y) = x^5 - 4x^3y^2 + 2xy^3 - y^6$ のとき

$f_x(x,y) = 5x^4 - 12x^2y^2 + 2y^3$, $f_y(x,y) = -8x^3y + 6xy^2 - 6y^5$

より

$f_{xx}(x,y) = 20x^3 - 24xy^2$, $f_{yy}(x,y) = -8x^3 + 12xy - 30y^4$

(2) $z = \sin(2x+3y)$ のとき

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x+3y)$

より

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\sin(2x+3y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9\sin(2x+3y)$

問 2 変数関数が以下の場合に、次の 2 階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y) = 2x^3 - x^2y + 3xy^2 - y^3$

$f_{xx}(x,y) =$, $f_{yy}(x,y) =$

(2) $z = \cos\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$

＜ 2 階偏導関数 2 ＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、 x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ をさらに y に関して偏微分したものを

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x(x, y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big(f(x, y)\Big)$$

等の記号で表す。同様に、 $z = f(x, y)$ の y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ をさらに x に関して偏微分したものを

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x, y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(f(x, y)\Big)$$

等の記号で表す。

(注) $z_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ の x のように、 z(又は f) に近い方の変数が先に偏微分する変数である。

例 (1) $f(x, y) = x^6 - 5x^4 y + 3x^2 y^3 - 5y^4$ のとき

$f_x(x, y) = 6x^5 - 20x^3 y + 6xy^3$ より $f_{xy}(x, y) = -20x^3 + 18xy^2$

$f_y(x, y) = -5x^4 + 9x^2 y^2 - 20y^3$ より $f_{yx}(x, y) = -20x^3 + 18xy^2$

(2) $z = \log(x^2 + 3y^2)$ のとき

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + 3y^2}$ より $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\dfrac{12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6y}{x^2 + 3y^2}$ より $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}$

(注) $f_{xy}(x, y)$ と $f_{yx}(x, y)$ が連続の場合には、両者は等しい。

問 2 変数関数が以下の場合に、次の 2 階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^4 + x^2 y - 3xy^3 + 2y^5$

$f_{xy}(x, y) =$, $f_{yx}(x, y) =$

(2) $z = \cos(4x)\sin(y^2)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

＜偏微分係数＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_x(a, b)$ を、**点 (a, b) における x に関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

である。同様に y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_y(a, b)$ を、**点 (a, b) における y に関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}$$

となる。

例　$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3$ のとき

$$f_x(x, y) = 2x - 4y \ , \ f_y(x, y) = -4x + 3y^2$$

より $(x, y) = (1, 3)$ における偏微分係数は、

$$f_x(1, 3) = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10 \ , \ f_y(1, 3) = -4 \times 1 + 3 \times 3^2 = 23$$

である。

問　2 変数関数が以下の場合に、次の偏微分係数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - xy^3$

$f_x(2, 1) =$ 　　　　　　　　　　　　, $f_y(2, 1) =$

(2) $f(x, y) = \cos(2x)\sin(4y)$

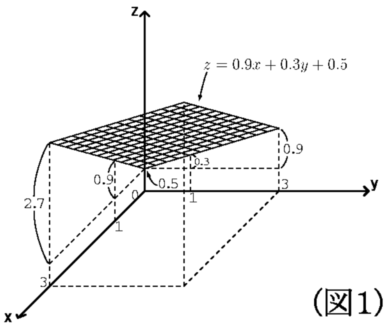
$f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) =$ 　　　　　　　　　　　　, $f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) =$

(3) $f(x, y) = e^{-x}\log(y^2)$

$f_x(1, e) =$ 　　　　　　　　　　　　, $f_y(1, e) =$

＜ 2 変数関数のグラフ ＞

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。とくに $f(x, y)$ が x と y の一次式の場合は平面を表す。



(図1)

例 1 $f(x, y) = 0.9x + 0.3y + 0.5$
の場合、$z = f(x, y)$ のグラフは図 1 のように

x 軸方向の傾きが 0.9

y 軸方向の傾きが 0.3

z 切片が 0.5

の平面を表す。

問 1 $f(x, y)$ が以下の場合に、$z = f(x, y)$ の表す平面について、x 軸方向の傾き、y 軸方向の傾き、z 切片を答えよ。

(1) $f(x, y) = x - y - 2$

x 軸方向の傾き=

y 軸方向の傾き=

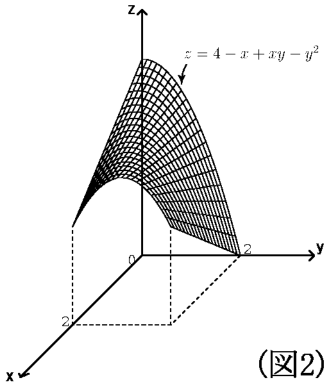
z 切片=

(2) $f(x, y) = mx + ny + k$

x 軸方向の傾き=

y 軸方向の傾き=

z 切片=



(図2)

例 2 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が

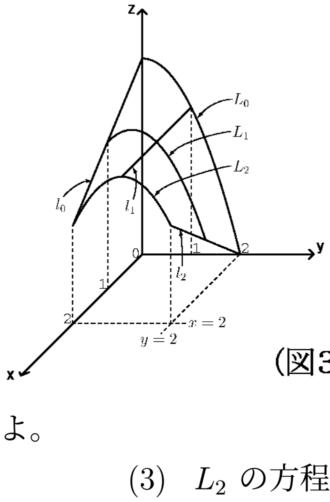
$$f(x, y) = 4 - x + xy - y^2$$

の場合、$z = f(x, y)$ のグラフは図 2 のような場合である。
この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 L_a とし、又平面 $y = b$ との共通部分を曲線 ℓ_b とする。(図 3)

(1) $x = 0$ のとき、$f(0, y) = 4 - y^2$ より
曲線 L_0 の方程式は
$x = 0,\ z = 4 - y^2$ である。

(2) $x = 1$ のとき、$f(1, y) = 3 + y - y^2$ より
曲線 L_1 の方程式は
$x = 1,\ z = 3 + y - y^2$ である。

(3) $y = 0$ のとき、$f(x, 0) = 4 - x$ より
曲線 ℓ_0 の方程式は
$y = 0,\ z = 4 - x$ となり、
直線であることがわかる。



(図3)

問 2 例 2 の場合に曲線 ℓ_1, ℓ_2, L_2 の方程式を求めよ。

(1) ℓ_1 の方程式

$y =$

$z =$

(2) ℓ_2 の方程式

$y =$

$z =$

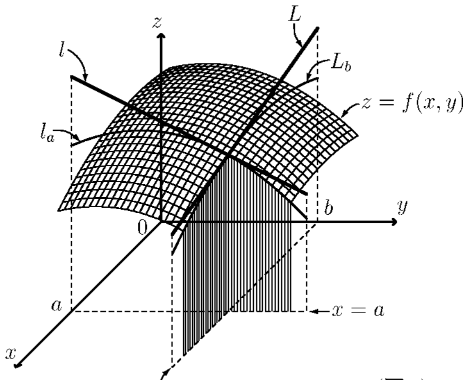
(3) L_2 の方程式

$x =$

$z =$

< 偏微分係数の幾何学的意味 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面と平面 $y = b$ との共通部分を曲線 L_b とする (図 1)。曲線 L_b を xz 平面の方から見ると、図 2 のような曲線になる。 このとき、この曲線 $z = f(x, b)$ の $x = a$ における接線 L の傾きが $f_x(a, b)$ である。

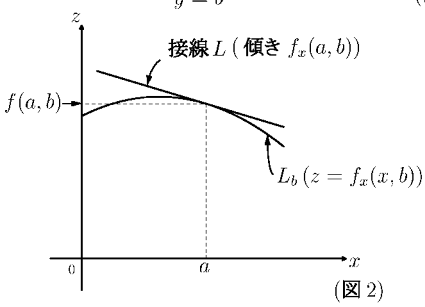


(図 1)

$$\boxed{f_x(a, b) = \text{接線 } L \text{ の傾き}}$$

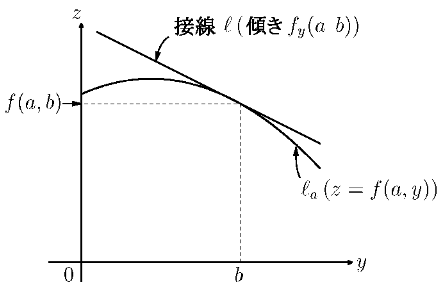
> 接線 L の方程式
> $y = b, \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$

つまり $f_x(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における $\boldsymbol{x}$ **軸方向の傾き** を意味する。



(図 2)

同様にして、この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 ℓ_a とする (図 1)。ℓ_a のグラフは図 3 のような曲線である。この曲線 $z = f(a, y)$ の $y = b$ における接線 ℓ の傾きが $f_y(a, b)$ である。



(図 3)

$$\boxed{f_y(a, b) = \text{接線 } \ell \text{ の傾き}}$$

> 接線 ℓ の方程式
> $x = a, \quad z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$

つまり $f_y(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における $\boldsymbol{y}$ **軸方向の傾き** を意味する。

問 $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2 + y + 5$, $(a, b) = (3, 2)$ のとき、$f_x(a, b), f_y(a, b)$ を求め、接線 L と ℓ の方程式を求めよ。

$f_x(3, 2) =$

接線 L の方程式

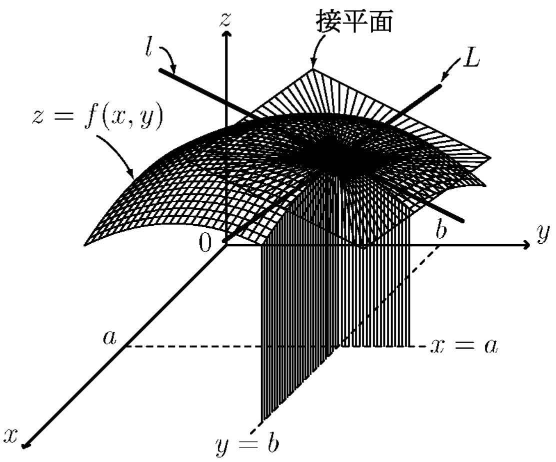
$y = 2$
$z =$

$f_y(3, 2) =$

接線 ℓ の方程式

$x = 3$
$z =$

＜ 接平面 ＞



2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面に接する平面を**接平面**という。
接点が $(a, b, f(a, b))$ であるとき、この接平面は x 軸方向の接線 L と y 軸方向の接線 ℓ を含む。それぞれの方程式は

L : $y = b,\ \ z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$
ℓ : $x = a,\ \ z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$

である。今接平面の方程式を

$$z = mx + ny + k$$

とおくと、

(1) x 軸方向の傾き $= m = f_x(a, b)$
(2) y 軸方向の傾き $= n\ = f_y(a, b)$

であり、$(x, y) = (a, b)$ のとき $z = f(a, b)$ より

$$f(a, b) = ma + nb + k$$

であるから

(3) z 切片 $= k = f(a, b) - ma - nb$

となる。(1), (2), (3) より接平面の方程式は

$$\boxed{z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)} \quad \text{(接平面の方程式)}$$

となる。

例題 $f(x, y) = x^2 - xy$ のとき $(x, y) = (3, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

(解) $f_x(x, y) = 2x - y,\quad f_y(x, y) = -x$ より
$f_x(3, 1) = 5,\qquad f_y(3, 1) = -3,\qquad f(3, 1) = 6$
だから接平面の方程式は
$z = 5(x - 3) - 3(y - 1) + 6$ より $\underline{\text{(答)}\ z = 5x - 3y - 6}$

問 $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$ のとき、$(x, y) = (1, -1)$ における接平面の方程式を求めよ。

＜ 2 変数関数の一次近似 ＞

1 変数関数の一次近似式は曲線を接線で近似した。この考え方を 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合にも適応する。2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面の $(x, y) = (a, b)$ における接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

である。曲面 $z = f(x, y)$ は、$(x, y) = (a, b)$ の近くでは接平面によって近似できるから、

$$\boxed{(x, y) \fallingdotseq (a, b) \text{ のとき } \quad f(x, y) \fallingdotseq f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)} \qquad (*)$$

がなりたつ。この式を $f(x, y)$ の **一次近似式** という。

$$x - a = \varDelta x \ , \ y - b = \varDelta y$$

とおくと、この近似式は

$$\boxed{\begin{array}{l} \varDelta x \fallingdotseq 0 \\ \varDelta y \fallingdotseq 0 \end{array} \text{ のとき } \quad f(a + \varDelta x\ , b + \varDelta y) \fallingdotseq f_x(a, b)\varDelta x + f_y(a, b)\varDelta y + f(a, b)} \qquad (**)$$

となる。この式も一次近似式という。

例題 $f(x, y) = \sin x \log y$ のとき $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(解) $f_x(x, y) = \cos x \log y \quad , \quad f_y(x, y) = \dfrac{\sin x}{y}$ より $(**)$ 式は

(答) $\sin(a + \varDelta x) \log(b + \varDelta y) \fallingdotseq (\cos a \log b)\varDelta x + \left(\dfrac{\sin a}{b}\right)\varDelta y + \sin a \log b$

問 $f(x, y)$ が以下の場合に $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^5 y^{-2}$, $(a + \varDelta x)^5 (b + \varDelta y)^{-2} \fallingdotseq$

(2) $f(x, y) = (\sin x) y \sqrt{y}$, $\sin(a + \varDelta x)(b + \varDelta y)\sqrt{b + \varDelta y} \fallingdotseq$

(3) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{a + \varDelta x}{(b + \varDelta y)^2} \fallingdotseq$

＜ 2変数合成関数の微分1 ＞

2 変数関数 $z=f(x,y)$ に対し、x と y が t の関数

$$x=x(t) \quad , \quad y=y(t)$$

である場合は

$$z=f\big(x(t),\ y(t)\big)$$

は t の関数である。そこで t に関する導関数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f\big(x(t),\ y(t)\big)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\big(x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\big)-f\big(x(t),\ y(t)\big)}{\Delta t}$$

を求めたい。そこで

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \Delta x=x(t+\Delta t)-x(t),\ \Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$$

とおくと

$$x(t+\Delta)=x+\Delta x, \quad y(t+\Delta t)=y+\Delta y$$

となるから

$$\frac{f\big(x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\big)-f(x,y)}{\Delta t}=\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta t}$$

となる。ここで前ページの一次近似式 $(**)$ で $(a,b)=(x,y)$ とおくと

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta t}\fallingdotseq f_x(x,\ y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,\ y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

で近似できる。よって

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f\big(x(t),\ y(t)\big)=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{f_x(x,\ y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,\ y)\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}$$

が成り立つ。

問 $\Delta t\to 0$ のとき $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\to\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\to\dfrac{dy}{dt}$

を利用して, $\dfrac{d}{dt}f\big(x(t),\ y(t)\big)$ を $f_x(x,\ y)$, $f_y(x,\ y)$, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ で表せ。

＜ 2変数合成関数の微分2 ＞

2 変数合成関数 $z = f\big(x(t),\ y(t)\big)$ の変数 t に関する導関数は前ページの結果より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f\big(x(t), y(t)\big) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

となる。ここで

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \ f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

より

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}}$$

が成り立つ。

例題　2 変数関数 $f(x, y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(1 + 2t,\ 4 + 3t)$　　(2) $\dfrac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

(解)　(1) $x = 1 + 2t,\ y = 4 + 3t,\ z = f(x, y)$ とおくと

$$\frac{d}{dt}f(1 + 2t,\ 4 + 3t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$
$$= f_x(x, y) \times 2 + f_y(x, y) \times 3$$
$$= 2f_x(1 + 2t, 4 + 3t) + 3f_y(1 + 2t, 4 + 3t)$$

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = f(x, y)$ とおくと、θ に関する微分だから、r を定数とみて

$$\frac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{d\theta}$$
$$= f_x(x, y) \times (-r\sin\theta) + f_y(x, y) \times (r\cos\theta)$$
$$= -r\sin\theta f_x(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + r\cos\theta f_y(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

問　2 変数関数 $f(x, y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(3 + 5t,\ 1 - t)$　　(2) $\dfrac{d}{dr}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$=$　　$=$

＜ 全微分 ＞

x と y の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、x と y が t の関数のときは、前ページより

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

がなりたつ。ここで形式的に両辺に dt をかけると

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy} \quad \cdots\cdots (*)$$

となる。$(*)$ 式の右辺を、x と y の 2 変数関数 z の**全微分**という。Δz を z の増分というのに対し、dz を z の**微小増分**又は**無限小増分**という。

例 1 $z = x^2y^3$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$$

より z の全微分は

$$\underline{dz = 2xy^3\ dx\ +\ 3x^2y^2\ dy}$$

問 1 z が以下の場合に、z の全微分を求めよ。

(1) $z = 2x^3 - y^5$

$dz =$

(2) $z = \dfrac{\sin y}{x}$

$dz =$

x が変数 u と v の 2 変数関数 $x = x(u, v)$ である場合は $(*)$ と同様に

$$\boxed{dx = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv} \quad \cdots\cdots (**)$$

を、u と v の 2 変数関数 x の全微分という。

例 2 $x = u^5(2 + v^3)$ のとき

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 5u^4(2 + v^3) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3u^5v^2$$

より x の全微分は

$$\underline{dx = 5u^4(2 + v^3)\ du\ +\ 3u^5v^2\ dv}$$

問 2 x と y が以下の場合、変数 u と v に関する全微分を 求めよ。

(1) $x = u - v$

$dx =$

(2) $y = 2u\,(u - v^2)$

$dy =$

＜ヤコビアン＞

x と y がともに変数 u と v の 2 変数関数

$$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

である場合、x と y の全微分は、前ページより

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \end{aligned}$$

となる。これを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

となる。(2) は u と v の微小増分の組 (du, dv) を x と y の微小増分の組 (dx, dy) に移す変換と考えられる。この変換行列を**ヤコビ行列** ($Jacob$ 行列) といい、その行列式を

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

で表し、関数 (1) の**関数行列式**または**ヤコビアン** ($Jacobian$) という。

例　u と v の関数 x, y が

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 4u + 5v \end{cases}$$

のときヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$$

問　x と y が以下の場合にヤコビアンを求めよ。

(1) $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

＜ 積分の練習 ＞

1. 不定積分

$$\boxed{\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C}$$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq -1, a \neq 0$)

(1) $\displaystyle\int dx =$ (2) $\displaystyle\int x^n dx =$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx =$ (5) $\displaystyle\int \cos x dx =$ (6) $\displaystyle\int e^x dx =$

(7) $\displaystyle\int (ax+b)^3 dx =$ (8) $\displaystyle\int \sin(ax+b) dx =$ (9) $\displaystyle\int e^{ax+b} dx =$

2. 定積分

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

問 2 次の定積分の値をを求めよ。(ただし $a, b, c,$ は 0 でない定数)

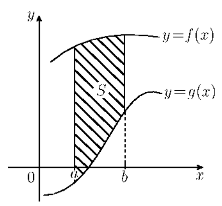
(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x)dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2y + y^3)dy$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2} (ax^2 + bx)dx$ (4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (ay + by^2 + cy^3)dy$

3. 面積

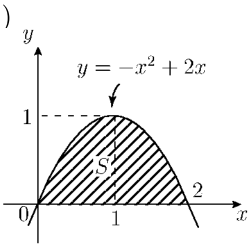
$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき右図斜線部分の面積 S は

$$\boxed{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx}$$



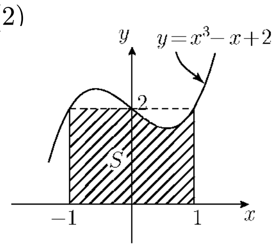
問 3 以下の図の斜線部分の面積 S を求めよ。

(1)



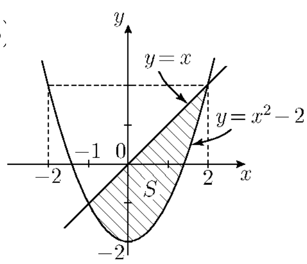
$S =$

(2)



$S =$

(3)



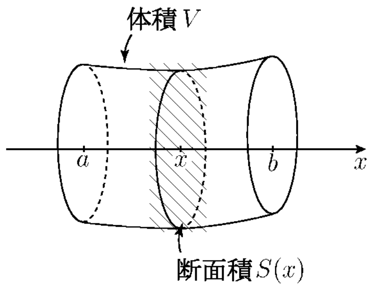
$S =$

＜ 体積 1 ＞

ある立体が図 1 のように基準線 (x 軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき断面積 $S(x)$ がわかっていれば、図 1 の立体の体積 V は

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



(図 1)

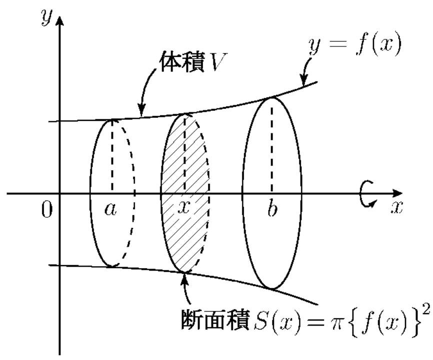
図 2 のように、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V は、断面が半径 $f(x)$ の円であるから

$$S(x) = \pi\big\{f(x)\big\}^2$$

より

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi\big\{f(x)\big\}^2 dx}$$

となる。

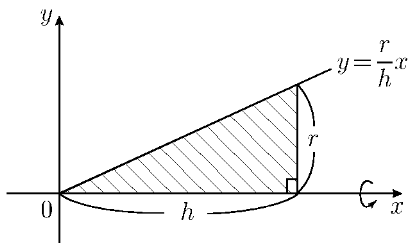


(図 2)

例　底面が半径 r の円で高さ h の円錐の体積 V を求めたい。この円錐は図 3 の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体であるから

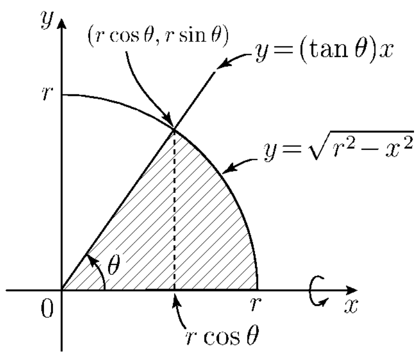
$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \ = \ \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{\pi r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{\pi}{3}r^2 h$$



(図 3)

問　図 4 の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体の体積 V を θ を用いて (出来るだけ簡単に) 表せ。(ヒント $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$)



(図 4)

＜ 体積 2 ＞

例　平面 $z = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y + 2$ と xy 平面、 yz 平面、 xz 平面及び平面 $x = 3$ と平面 $y = 4$ で囲まれた立体の体積 V を求めたい。

図２のように、x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とすると、$S(x)$ は図３の斜線部分の面積であるから、x を定数と考えて、y で積分すれば

$$S(x) = \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + 2\right) dy$$

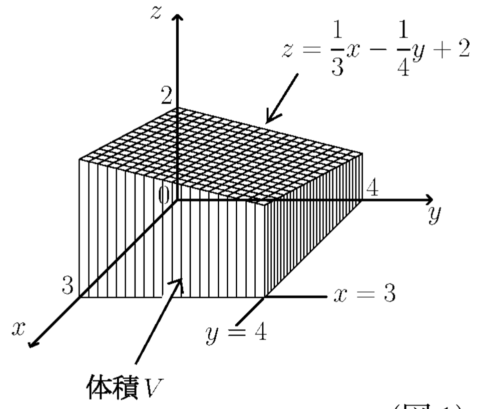
$$= \left[\frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 + 2y\right]_{y=0}^{y=4}$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{4^2}{8} + 2 \times 4 - 0 = \frac{4}{3}x + 6$$

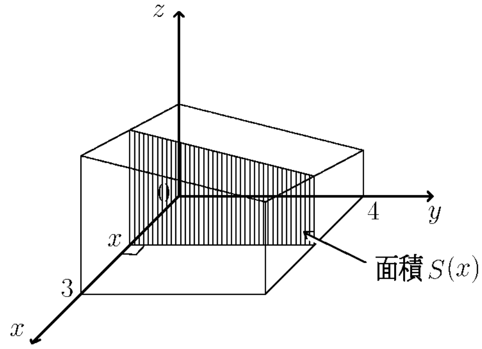
となる。よって体積 V は

$$V = \int_0^3 S(x)\ dx$$

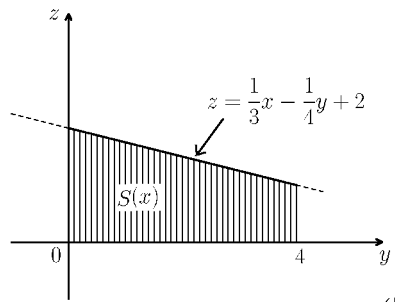
$$= \int_0^3 \left(\frac{4}{3}x + 6\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^2 + 6x\right]_0^3 = 24$$



(図 1)

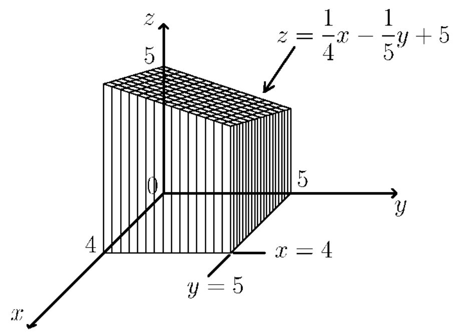


(図 2)



(図 3)

問　平面 $z = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{5}y + 5$ と xy 平面、 yz 平面、 xz 平面及び平面 $x = 4$ と平面 $y = 5$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ。



< 体積 3 >

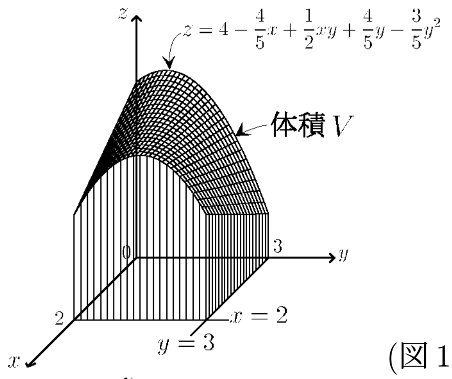
例　曲面 $z = 4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2$ と xy 平面、yz 平面、xz 平面および平面 $x = 2$ と平面 $y = 3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めたい。

図 2 のように、x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とおくと、$S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積であるから、x を定数と考えると、

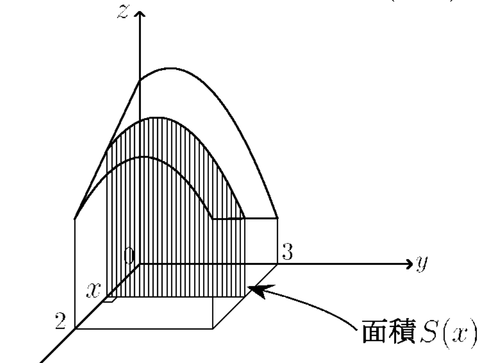
$$
\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^3 \left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2\right) dy \\
&= \left[4y - \frac{4}{5}xy + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{2}{5}y^2 - \frac{1}{5}y^3\right]_{y=0}^{y=3} \\
&= 12 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{4}x + \frac{18}{5} - \frac{27}{5} - 0 \\
&= \frac{51}{5} - \frac{3}{20}x
\end{aligned}
$$

である。よって体積 V は

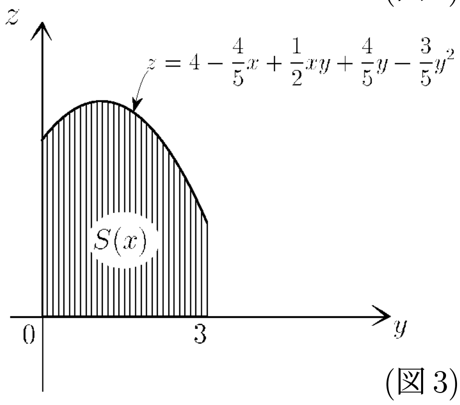
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 S(x)dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{51}{5} - \frac{3}{20}x\right) dx = \left[\frac{51}{5}x - \frac{3}{40}x^2\right]_0^2 = \frac{201}{10}
\end{aligned}
$$



(図 1)

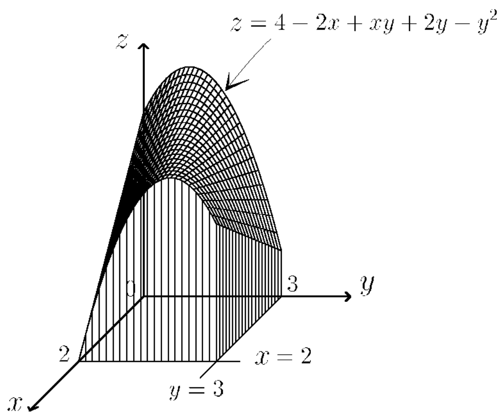


(図 2)



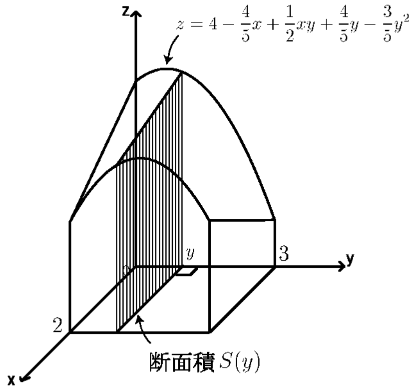
(図 3)

問　曲面 $z = 4 - 2x + xy + 2y - y^2$ と xy 平面、yz 平面、xz 平面および平面 $x = 2$ と平面 $y = 3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めよ。

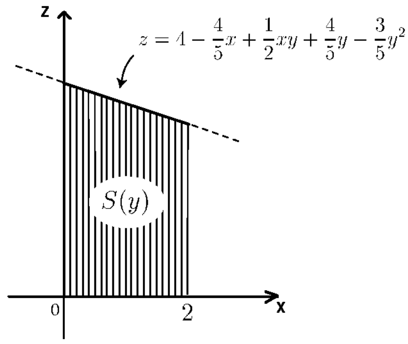


＜体積 4 ＞

例　立体の体積 V を求めるのに、前ページでは、x 軸に垂直な平面で切りとった断面積を x について積分して、V を求めた。 前ページと同じ立体の体積 V を求めるのに、今度は y 軸に垂直な平面で切りとった断面積を使う。



y 軸の座標が y である平面で切りとった断面の面積を $S(y)$ とすると、$S(y)$ は右図のような斜線部分の面積だから、y を定数と考えて、x で積分すれば、



$$S(y) = \int_0^2 \left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2\right) dx$$

$$= \left[4x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{4}{5}yx - \frac{3}{5}y^2x\right]_{x=0}^{x=2}$$

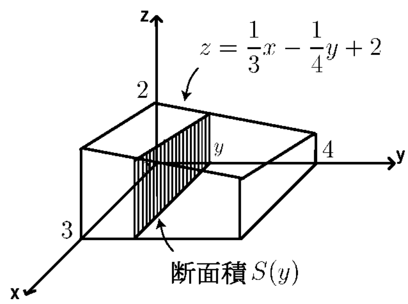
$$= 8 - \frac{8}{5} + y + \frac{8}{5}y - \frac{6}{5}y^2 - 0 = \frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2$$

となる。よって体積 V は

$$V = \int_0^3 S(y)dy = \int_0^3 \left(\frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{32}{5}y + \frac{13}{10}y^2 - \frac{2}{5}y^3\right]_0^3 = \frac{96}{5} + \frac{117}{10} - \frac{54}{5} - 0 = \frac{201}{10}$$

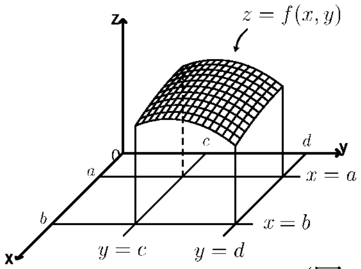
問　右図の立体の体積 V を求めたい。y 軸に垂直な平面で切りとった断面の面積 $S(y)$ を求め、V を $S(y)$ を積分することによって求めよ。



$S(y) =$

$V =$

＜ 累次積分 1 ＞



(図1)

2 変数関数 $f(x, y)$ が

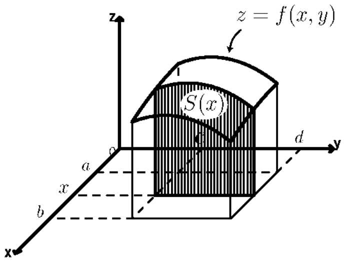
$$a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$$

の範囲で正 (プラス) であるとき、曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面、および平面 $x = a, x = b, y = c, y = d$ で囲まれた部分の体積を V とする。図 2 より

$$V = \int_a^b S(x)dx, \quad S(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

だから

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx$$



(図2)

となる。この種の積分を **累次積分**（るいじ）または **逐次積分**（ちくじ）という。
この積分を計算するには、まず x を定数と思って y に関する定積分を計算して、x の関数 $S(x)$ が得られたら、この関数を x で積分すればよい。

例

$$\int_1^2 \left\{ \int_2^3 (4 - x + xy + y^2)dy \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[(4 - x)y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left((4 - x) \times 3 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{3} \right) - \left((4 - x) \times 2 + \frac{4}{2}x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \frac{31}{3} + \frac{3}{2}x \right\} dx = \left[\frac{31}{3}x + \frac{3}{4}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{151}{12}$$

問 次の累次積分を計算せよ。

$$\int_2^3 \left\{ \int_1^2 (2xy - y^2)dy \right\} dx$$

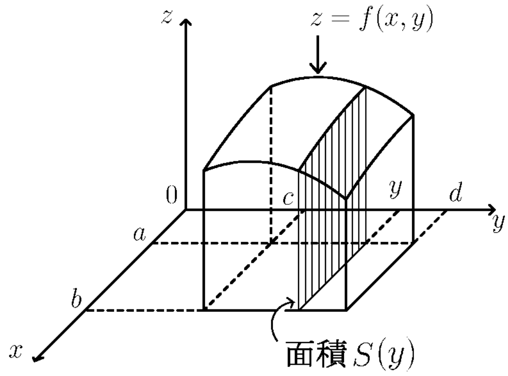
＜ 累次積分 2 ＞

$f(x,y)>0$ のとき、曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面及び平面 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の体積 V は、前ページより

$$V=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

であった。一方、右図より

$$V=\int_c^b S(y)dy、S(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$



だから、

$$V=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$$

である。よって

$$\boxed{\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy}$$

が成り立つ。これを累次積分の**順序交換可能性**という。

例 $\displaystyle\int_2^3\left\{\int_1^2\left(4-x+xy+y^2\right)dx\right\}dy=\int_2^3\left\{\int_1^2\left(4+y^2+(y-1)x\right)dx\right\}dy$

$$=\int_2^3\left\{\left[\left(4+y^2\right)x+(y-1)\times\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=2}\right\}dy$$

$$=\int_2^3\left\{\left(\left(4+y^2\right)\times 2+(y-1)\times\frac{4}{2}\right)-\left(\left(4+y^2\right)+(y-1)\times\frac{1}{2}\right)\right\}dy$$

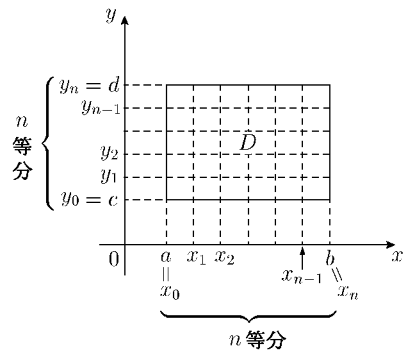
$$=\int_2^3\left\{y^2+\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}\right\}dy=\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4}y^2+\frac{5}{2}y\right]_{y=2}^{y=3}=\frac{151}{12}$$

問 次の累次積分を計算せよ。

$$\int_1^2\left\{\int_2^3\left(2xy-y^2\right)dx\right\}dy$$

＜長方形領域の 2 重積分＞

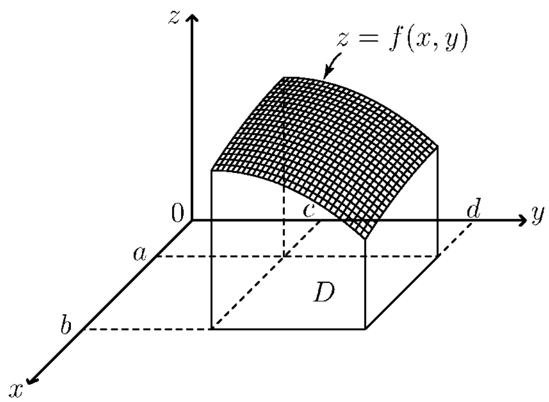
xy 平面上の長方形領域 $D = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ における 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 2 重積分を

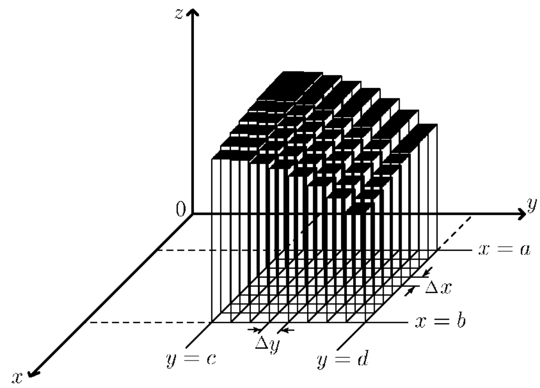


$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y}$$

$$\left(\text{ただし } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ \Delta y = \frac{d-c}{n}\right)$$

で定義する。$f > 0$ ならば左図の立体の体積を意味し、それを右図の小長方体の和で近似している。





体積を累次積分で求めたように、$D = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ ならば

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x, y)dy\right\} dx = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x, y)dx\right\} dy}$$

が成立する。

例　$D = \big\{(x, y) : 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3\big\}$ のとき

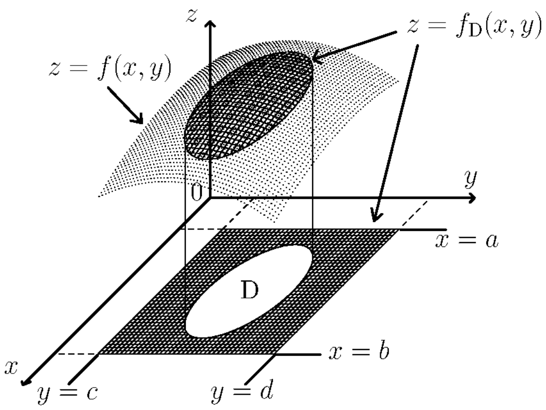
$$\iint_D (1 + 2xy)\, dxdy = \int_1^2 \left\{\int_0^3 (1 + 2xy)\, dy\right\} dx = \int_1^2 \left\{\Big[y + xy^2\Big]_{y=0}^{y=3}\right\} dx$$

$$= \int_1^2 \Big\{(3 + 9x) - 0\Big\} dx = \left[3x + \frac{9}{2}x^2\right]_1^2 = (6 + 18) - \left(3 + \frac{9}{2}\right) = \frac{33}{2}$$

問　$D = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 2,\ -1 \leqq y \leqq 1\}$ のとき、次の 2 重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \left(2xy - y^2\right) dxdy$$

＜一般領域の２重積分１＞



xy 平面上の有界領域 D に対し、 D が領域 $\{(x,y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ に含まれる様に定数 a、b、c、d をとる。

一般の２変数関数 $f(x,y)$ に対して、領域 D における２重積分を次式で定義する。

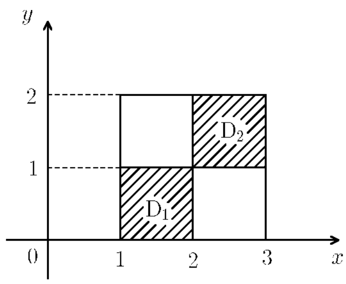
$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f_{\mathrm{D}}(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_{\mathrm{D}}(x,y)dx \right\} dy}$$

ただし、

$$f_{\mathrm{D}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & : \ (x,y) \text{ が D の点} \\ \\ 0 & : \text{ それ以外} \end{cases}$$

である。右上図では、上部の曲面が $z = f(x,y)$ を表し、 D 以外で 0 になっている濃い曲面が $z = f_{\mathrm{D}}(x,y)$ である。 $f > 0$ のとき、 D における２重積分の値は、底面が D である柱上の立体の体積を意味する。

例　右図の斜線部分を領域 D とする。今、



$\mathrm{D}_1 = \{\ (x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 2\ ,\ 0 \leqq y \leqq 1\ \}$
$\mathrm{D}_2 = \{\ (x,y)\ :\ 2 \leqq x \leqq 3\ ,\ 1 \leqq y \leqq 2\ \}$
と置くと、 D は D_1 と D_2 の和集合であるから、２重積分の定義より、

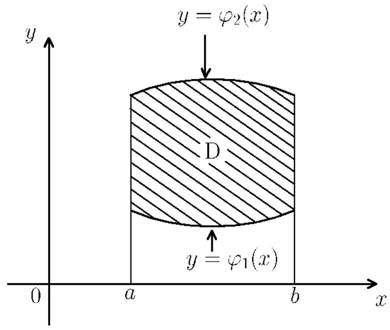
$$\iint_{\mathrm{D}} (x+y)dxdy = \iint_{\mathrm{D}_1} (x+y)dxdy + \iint_{\mathrm{D}_2} (x+y)dxdy$$

が成り立つ。

問　例の計算を完成せよ。

$$\iint_{\mathrm{D}} (x+y)dxdy =$$

＜一般領域の2重積分2＞



xy 平面上の領域 D が、2つの曲線 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ と2つの直線 $x=a$, $x=b$ とで囲まれているとき、すなわち

D $=\{\ (x,y)\ :\ a\leqq x\leqq b\ ,\varphi_1(x)\leqq y\leqq\varphi_2(x)\ \}$

となっているとき、2変数関数 $f(x,y)$ の D における重積分は、累次積分

$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right\}dx}$$

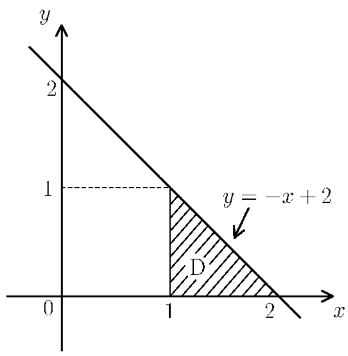
によって計算される。

例　領域 D が、右図の斜線部分であるとき、

D は、

D $=\{\ (x,y)\ :\ 1\leqq x\leqq 2\ ,\ 0\leqq y\leqq -x+2\}$

と表されるから、



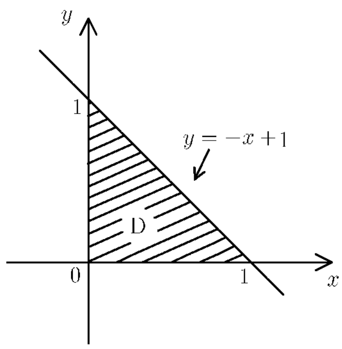
$$\iint_{\mathrm{D}}(x+y)dxdy=\int_1^2\left\{\int_0^{-x+2}(x+y)dy\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left\{\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=-x+2}\right\}dx=\int_1^2\left\{x(-x+2)+\frac{1}{2}(-x+2)^2-0\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left\{-\frac{1}{2}x^2+2\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{5}{6}$$

問　D が右図の斜線部分であるとき、2重積分

$\iint_{\mathrm{D}}\left(x^3-2xy^2\right)dxdy$　の値を求めよ。



< 一般領域の2重積分 3 >

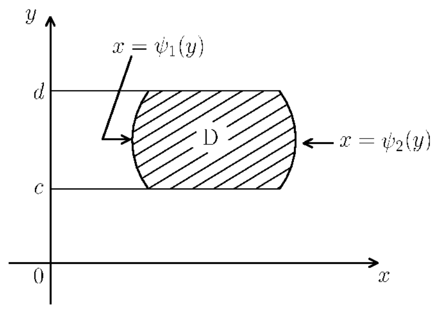
xy 平面上の領域 D が

$\mathrm{D} = \{\ (x, y)\ :\ c \leqq y \leqq d\ ,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$

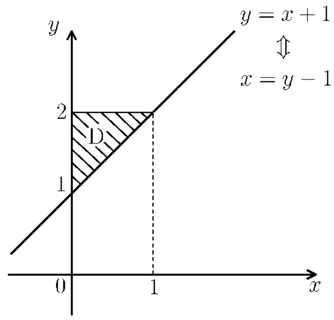
と表されているとき、2変数関数 $f(x, y)$ の D における重積分は、累次積分

$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right\} dy}$$

によって計算される。



例　領域 D が右図の斜線の部分であるとき、D は $\mathrm{D} = \{(x, y)\ :\ 1 \leqq y \leqq 2\ ,\ 0 \leqq x \leqq y - 1\ \}$ と表されるから、



$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2 + y\right) dxdy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{y-1} \left(x^2 + y\right) dx \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 + xy \right]_{x=0}^{x=y-1} \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \frac{1}{3}(y-1)^3 + y^2 - y \right\} dy$$

$$= \left[\frac{1}{12}(y-1)^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=2} = \left(\frac{1}{12} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{12}$$

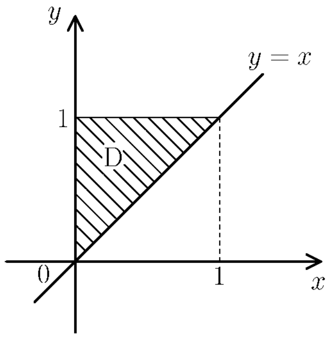
(注)　$\mathrm{D} = \{\ (x, y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ x + 1 \leqq y \leqq 2\ \}$　と考えて

$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2 + y\right) dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x+1}^2 \left(x^2 + y\right) dy \right\} dx$$

を計算しても同じ答が出るが、この場合は例の様にやる方が累次積分の計算が楽になる

問　D が右図の斜線部分であるとき、2重積分

$\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (y^2 - 2x)dxdy$　の値を求めよ。

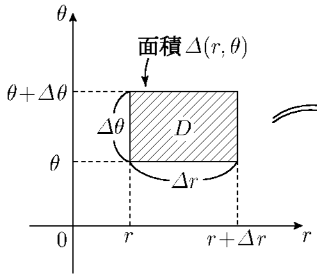


＜面積比＞

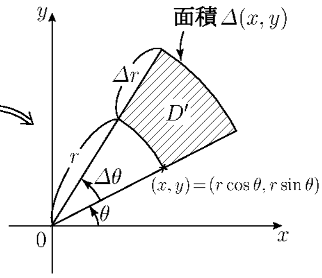
例 極座標変換

$$(1)\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

は図 1 のような (r,θ) 平面上の長方形領域 D を図 2 のような (x,y) 平面上の領域 D' に移す。領域 D の面積を $\Delta(r,\theta)$、領域 D' の面積を $\Delta(x,y)$ とすると、D と D' の面積比は



(図 1)



(図 2)

$$\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(r,\theta)} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta\theta)(r+\Delta r)^2 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)r^2}{(\Delta r)(\Delta\theta)} = r + \frac{1}{2}(\Delta r) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで $\Delta r \to 0, \Delta\theta \to 0$ の極限を $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ と書くことにすれば、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \frac{\Delta(x,y)}{\Delta(r,\theta)} = \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) = r \quad \cdots\cdots(3)$$

となる。一方 27 ページの問 (2) の結果から、(1) のヤコビアンは $J = r$ だから

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

この例から一般に u と v の関数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ に対して、微小領域の面積比をヤコビアンの絶対値

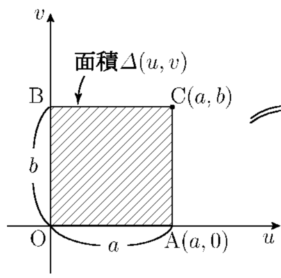
$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{の絶対値}} \quad \cdots\cdots(4)$$

で定義する。
(注) ヤコビアンは負になる場合もあるので、面積比を表すために絶対値をつける。

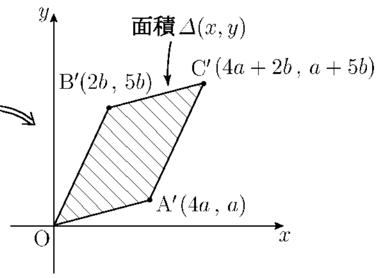
問 一次変換

$$\begin{cases} x = 4u + 2v \\ y = u + 5v \end{cases}$$

によって uv 平面上の長方形領域 OABC(図 3) は、xy 平面上の平行四辺形領域 OA′B′C′(図 4) に移る。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \begin{pmatrix} 4a \\ a \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \begin{pmatrix} 2b \\ 5b \end{pmatrix}$ となる。



(図 3)



(図 4)

(1) $\Delta(u,v),\ \Delta(x,y)$ を a, b で表し、その比 $\dfrac{\Delta(x,y)}{\Delta(u,v)}$ を求めよ。

$$\left((\text{ヒント})\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{の作る平行四辺形の面積は} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値}\right)$$

(2) ヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を計算し、面積比 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ。

＜重積分の変数変換＞

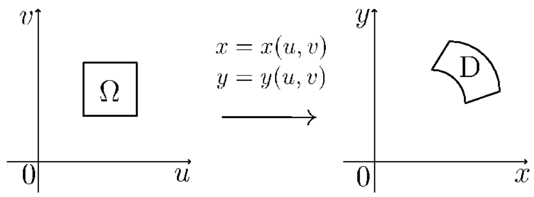
一変数関数の定積分の置換積分

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f\big(x(u)\big)\frac{dx}{du}du} \qquad \begin{pmatrix} x = x(u) \\ a = x(\alpha)\ ,\ b = x(\beta) \end{pmatrix}$$

と同様に２変数関数 $f(x,y)$ に対し、x と y が u と v の関数であり、

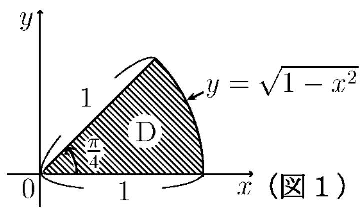
$$x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)$$

によって、uv 平面上の領域 Ω が xy 平面上の領域Dに移されるとき、



$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega} f\big(x(u,v)\ ,\ y(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv}$$

が成り立つ。ここで $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は前ページの面積比である。



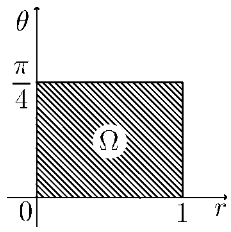
（図１）

例　領域Dが図１の場合に $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めたい。

極座標変換

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の長方形領域 Ω(図2) は xy 平面上の領域 D(図1) に移される。前ページより



（図２）

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \quad , \quad -x^2 - y^2 = -r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2$$

であるから

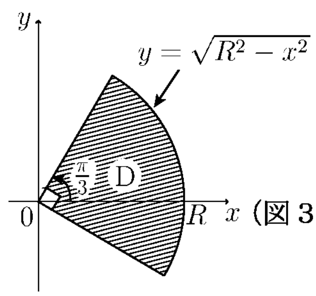
$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\Omega} e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}drd\theta = \iint_{\Omega} e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=1}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1-e^{-1})d\theta = \frac{\pi}{8}(1-e^{-1})$$

問　xy 平面上の領域Dが図３の場合に次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$



（図３）