高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series A

No. 11

解答

＜1ページ. 零因子＞

問1の解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問2の解答

(1) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

(2) $AC = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

(3) $A(B-C) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

問3の解答

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

< 2ページ. 正則行列 >

問1の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問2の解答

もしBが正則行列であると仮定すれば、逆行列B^{-1}が存在し、

$$A = IA = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA) = B^{-1}O = O$$

となって$A = O$ (零行列) となり矛盾する。

よってBは正則行列でない。

< 3ページ. 逆行列 1 >

問の解答

逆行列を $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y & 5z+3w \\ 4x+2y & 4z+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5z+3w=0 \\ 4z+2w=1 \end{cases}$ これを解くと $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ w=-\frac{5}{2} \end{cases}$

よって $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & -3+3 \\ 10-10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

となり A^{-1} が A の逆行列であることがわかる。

< 4ページ. 逆行列 2 >

問の解答

逆行列を $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases}$

これを解くと

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{ad-bc} \\ y = \dfrac{-c}{ad-bc} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{-b}{ad-bc} \\ w = \dfrac{a}{ad-bc} \end{cases}$$

となる。よって

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

＜ 5ページ. 逆行列 3 ＞

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 6 - 5 \neq 0$ より A は正則行列で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 16 - 16 = 0$ より A は正則行列ではない

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 25 - 24 \neq 0$ より A は正則行列で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 12 + 12 \neq 0$ より A は正則行列で

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

＜ 6 ページ. 固有値 1 ＞

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

(答) $\lambda = 2\ ,\ 5$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

(答) $\lambda = 1 \pm i$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0$$

(答) $\lambda = 2$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1 = 0$$

(答) $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$

＜ 7ページ. 固有値 2 ＞

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$

(答) $\lambda = 2\ ,\ 6$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) - 0 = 0$$

(答) $\lambda = 1\ ,\ 4\ ,\ 6$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 6) = 0$$

(答) $\lambda = 3\ ,\ 3 \pm \sqrt{3}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) + 8\lambda = 0$$

$$\lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$$

(答) $\lambda = 0\ ,\ \pm 3$

$<$ 8ページ. 固有ベクトル $>$

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

固有値　$\lambda = 2\ ,5$

固有値$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値$\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

固有値　$\lambda = 2\ ,6$

固有値$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値$\lambda = 6$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

固有値　$\lambda = 1\ ,4$

固有値$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

< 9ページ.行列の対角化 >

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

< 10ページ. 行列の n 乗 >

問の解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^n+2\times 5^n}{3} & \frac{-2^{n+1}+2\times 5^n}{3} \\ \frac{-2^n+5^n}{3} & \frac{2^{n+1}+5^n}{3} \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n + 6^n & -3 \times 2^n + 3 \times 6^n \\ -2^n + 6^n & 2^n + 3 \times 6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\times 2^n+6^n}{4} & \frac{-3\times 2^n+3\times 6^n}{4} \\ \frac{-2^n+6^n}{4} & \frac{2^n+3\times 6^n}{4} \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times 4^n & -2 + 2 \times 4^n \\ -1 + 4^n & 2 + 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 4^n}{3} & \frac{-2+2\times 4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} \end{pmatrix}$$

< 11 ページ. 平面の一次変換 1 >

問の解答

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

< 12 ページ. 平面の一次変換 2 >

問の解答

(1) $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

< 13ページ. 平面の一次変換 3 >

問１の解答

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix}$$

問２の解答

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad , \quad \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

＜ 14 ページ. 平面の一次変換 4 ＞

問１の解答

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

問２の解答

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad , \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

＜ 15ページ. 平面のベクトルと平行四辺形の面積 1 ＞

問の解答

(1) $S^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2$

(2) $S^2 = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) - (a_1b_1 - a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

(3) $S = \left|\ a_1b_2 - a_2b_1\ \right|$

< 16 ページ. 平面のベクトルと平行四辺形の面積 2 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$S = |\ 15 + 2\ | = 17$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$S = |\ -6 + 7\ | = 1$

< 17 ページ. 平面のベクトルと行列式 >

問の解答

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

より四角形 OACB は平行四辺形だから公式より

$$S = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13$$

＜ 18ページ. 空間のベクトル 1 ＞

問1の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$

問2の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{FA}} = -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

(6) $\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

< 19 ページ. 空間のベクトル 2 >

問 1 の解答

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

問 2 の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

< 20 ページ. 空間のベクトル 3 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

< 21 ページ. 空間のベクトル 4 >

問の解答

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix}$$

＜ 22 ページ. 空間のベクトル 5 ＞

問 1 の解答

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ (2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

(3) $k\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$

問 2 の解答

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{16+0+9} = 5$$

(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

(3) $3\overrightarrow{a} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\left|3\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{81+9+36} = 3\sqrt{14}$$

(4) $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$$

< 23 ページ. 空間座標と距離 >

問 1 の解答

(1) $\mathrm{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

問 2 の解答

(1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$

中心 $(1\ ,\ 2\ ,\ 3)$, 半径 $= 4$

(2) $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 5$

中心 $(0\ ,\ 1\ ,\ -3)$, 半径 $= \sqrt{5}$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

中心 $(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$, 半径 $= 3$

＜ 24 ページ. ベクトルの内積 1 ＞

問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}} = 1 \times 1 \times 0 = 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} = 1 \times \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}} = 1 \times \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}} = 1 \times \sqrt{2} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(6) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}} = 1 \times 1 \times (-1) = -1$

< 25 ページ. ベクトルの内積 2 >

問 1 の解答

$\mathrm{OA}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\mathrm{OB}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

問 2 の解答

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{2b_1a_1 + 2b_2a_2 + 2b_3a_3\right\} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

問 3 の解答

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

< 26ページ. ベクトルの内積 3 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{4+2+15}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{16+1+25}} = \frac{21}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta = 30^\circ$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{-4+0+0}{\sqrt{4+0+4}\sqrt{4+0+0}} = \frac{-4}{\sqrt{8}\sqrt{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta = 135^\circ$

(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{-1-1-1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -1$$

$\theta = 180^\circ$

< 27 ページ. 平面の方程式 1 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix} = 3x + 2y + z - 7 = 0$

(答) $3x + 2y + z - 7 = 0$

(2) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-q_1 \\ y-q_2 \\ z-q_3 \end{pmatrix} = a(x-q_1)+b(y-q_2)+c(z-q_3) = 0$

(答) $ax + by + cz - (aq_1 + bq_2 + cq_3) = 0$

< 28 ページ. 平面の方程式 2 >

問の解答

(1) $x - 2y + 3z = 0$

原点 (0 , 0 , 0) を通り $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面

(2) $2x + y + 3z = 1$

$2x + (y - 1) + 3z = 0$

点 (0 , 1 , 0) を通り $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面

(3) $z = \dfrac{10 - 5x - 3y}{7}$

$5(x - 2) + 3y + 7z = 0$

点 (2 , 0 , 0) を通り $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に垂直な平面

< 29 ページ. 空間の平行四辺形 1 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$S^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2$$
$$= (1+4+9) \times (4+9+16) - (2+6+12)^2 = 6$$

$$S = \sqrt{6}$$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \times (1+1+0) - (a_1 - a_2 + 0)^2$$
$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2)$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2$$

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2}$$

< 30 ページ. 空間の平行四辺形 2 >

問 1 の解答

$$S^2 = \{a_1b_2 - a_2b_1\}^2 + \{a_2b_3 - a_3b_2\}^2 + \{a_3b_1 - a_1b_3\}^2$$

問 2 の解答

$$S^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2$$

問 3 の解答

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2}$$

＜ 31 ページ. 外積 1 ＞

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 + 6 + 12 = 20$$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 - 3 + 0 = -2$$

＜ 32 ページ. 外積 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = 1 - 6 + 5 = 0$$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = -6 + 8 - 2 = 0$$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = -2 + 0 + 2 = 0$$

問 2 の解答

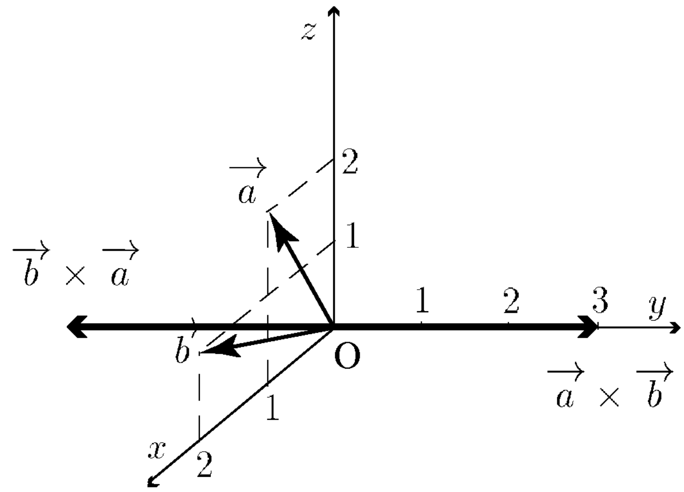
$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

＜ 33 ページ. 外積 3 ＞

問の解答

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



< 34 ページ. 外積 4 >

問の解答

(1) $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) $$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(3) $$\left(k\overrightarrow{a}\right) \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2k \\ -11k \\ 5k \end{pmatrix}$$

(4) $$\overrightarrow{a} \times \left(3\overrightarrow{a}\right) = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

< 35ページ. 平行六面体の体積 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 18 - 5 + 14 = 27$$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

＜ 36 ページ. スカラー三重積 1 ＞

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 6 - 12 = -12$$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 56 + 36 - 63 - 24 - 20 = 0$$

＜ 37 ページ. スカラー三重積 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{c} = -\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$

(2) $\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = -\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$

問 2 の解答

(1) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 0$

< 38 ページ. 右手系と左手系 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 12 = -9$$

$\left\{\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{b}\ ,\ \overrightarrow{c}\right\}$ は左手系

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 40 + 3 - 6 + 15 = 52$$

$\left\{\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{b}\ ,\ \overrightarrow{c}\right\}$ は右手系

＜ 39 ページ. 基本ベクトルによる計算 1 ＞

問 1 の解答

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

問 2 の解答

(1) $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 6\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

(2) $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} = 9\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 8\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

問 3 の解答

(1) $\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

(2) $\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}$

(3) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3 - 8 - 1 = -6$

問 4 の解答

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 8\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

＜ 40 ページ. 基本ベクトルによる計算 2 ＞

問の解答

(1) $$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) $$\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) \times \left(\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(5) $$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$