高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series A

$No.$ 11

内容

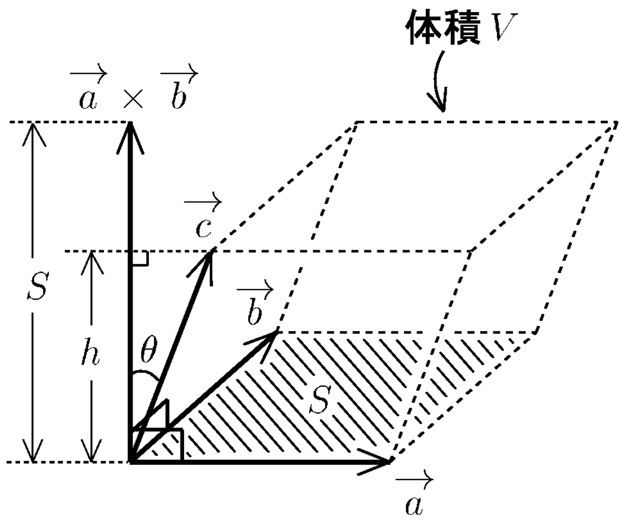
◎ 逆行列

◎ 固有値

◎ 空間のベクトル

◎ 内積と外積

◎ スカラー三重積



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜ 零因子 ＞

n 次の正方行列 A, B と零行列 O に対し、

$$AO = OA = O$$

が成り立つが、

「$AB = BA = O$ であっても $A \neq O\,,\, B \neq O$ の場合がある」

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、$A \neq O$ かつ $B \neq O$ にもかかわらず $AB = O$ となる。
この様な行列 A, B を**零因子**という。

問 1 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問 2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、
次の積を求めよ。

(1) $AB =$

(2) $AC =$

(3) $A(B - C) =$

問 3 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ のとき、次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

＜ 正則行列 ＞

n 次の正方行列 A と n 次の単位行列 I に対し、ある n 次正方行列 X が存在して、

$$AX = XA = I$$

となるとき、行列 A を**正則行列**という。この行列 X は A に対し一意的に定まる。X を A の**逆行列**といい

$$X = A^{-1}$$

と書く。

例 1 n 次の単位行列 I は任意の n 次正方行列 A に対して

$$AI = IA = A$$

である。特に $A = I$ の場合は

$$II = II = I$$

より、単位行列 I は正則行列であり、$I^{-1} = I$ となる。

例 2 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ とすると $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

より $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ である。

問 1 A, B が以下の場合に、積 AB と BA を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

$AB =$ $BA =$ $AB =$ $BA =$

例 3 零行列 O は正則行列でない。もし逆行列 X が存在すれば $XO = OX = I$ となるはずが、零行列 O との積はやはり零行列 O になり、$O = I$ となって矛盾が生じる。

例 4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し、積は $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

A は正則行列でない。もし A が正則行列であると仮定すれば逆行列 A^{-1} が存在して

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O$$

となって $B = O$ となり矛盾する。よって A は正則行列でない。

問 2 例 4 の場合に B が正則行列でないことを示せ。

＜ 逆行列1 ＞

例題　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ は正則行列である。 逆行列 A^{-1} を求め、 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を確かめよ。

(解) 逆行列を $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+5y & 2z+5w \\ x+4y & z+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

より

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z+5w=0 \\ z+4w=1 \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式を解くと、

$$x=\frac{4}{3}\ ,\ y=-\frac{1}{3}\ ,\ z=-\frac{5}{3}\ ,\ w=\frac{2}{3}$$

より

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

より A^{-1} が A の逆行列であることがわかる。

問　行列　$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ は正則行列である。逆行列　A^{-1} を求め、

$A^{-1}A=I$　を確かめよ。

< 逆行列 2 >

例題 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

であれば、行列 A は正則行列となる。このとき、

A の逆行列 A^{-1} を求め、$A^{-1}A = I$ を確かめよ。

＜ 逆行列3 ＞

２次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

であれば A は正則行列であり、前ページの結果より、
逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。実は $\det(A) = 0$ であれば、正則行列でないことがわかっている。

例 $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対し、

$$\det(A) = 8 \times 3 - 10 \times 2 = 4 \neq 0$$

より A は正則行列で

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

となる。実際

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{4} - \frac{10}{2} & \frac{40}{2} + 20 \\ \frac{6}{4} - \frac{3}{2} & -\frac{10}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{4} - \frac{10}{2} & \frac{30}{4} - \frac{15}{2} \\ -\frac{8}{2} + 4 & -\frac{10}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 行列 A が以下の場合に、A が正則行列かどうかを判定し、正則行列ならば逆行列 A^{-1} を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

＜固有値 1 ＞

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \left(\text{すなわち} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \right)$$

を満たす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定数 λ が存在するとき、

λ を (A の) **固有値**、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を (λ に対する) **固有ベクトル**という。

例　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

であるから

$$\begin{cases} 1\text{ 行目} \ : \ 3x + 2y = \lambda x \\ 2\text{ 行目} \ : \ x + 4y = \lambda y \end{cases}$$

より、連立方程式

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

が導かれる。ワークブック No.10 の 38 ページより、

連立方程式 (2) が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を

もつためには、係数行列式が 0 でなければならない。

従って (2) の係数行列式 = 0 より

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 \times 1 = 0 \cdots\cdots\cdots \ (3)$$

とおいて、λ について整理すると

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \cdots\cdots\cdots \ (4)$$

より、$\lambda = 2$ と $\lambda = 5$ が求まる。これが A の固有値である。

(注)　固有値は 2 個あるとは限らない。1 個の場合もあるし、共役な複素数の場合もある。

問　行列 A が以下の場合に、A の固有値を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

＜固有値 2＞

一般に n 次の正方行列 A に対し

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

をみたす零ベクトルでない縦ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と定数 λ が存在するとき、

λ を (A の) **固有値**、$\boldsymbol{x}$ を (λ に対する) **固有ベクトル**という。
２次の場合には、固有値 λ を求めるために、前ページの (3) 式をみたす λ を求めれば良い。一般の場合にも同様なことが成り立つ。

n 次の正方行列 A の固有値 λ は、$\det(A-\lambda I)=0$ の解である。

ここで I は n 次の単位行列である。n 次方程式 $\det(A-\lambda I)=0$ を
固有方程式という。

例　3 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)(2-\lambda)-2\} = -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3)$$

であるから

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3)=0 \iff \lambda=1,0,3$$

よって A の固有値は $\lambda=0$、$\lambda=1$、$\lambda=3$ である。

問　行列 A が以下の場合に A の固有値を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

＜固有ベクトル＞

例 6 ページの例より、行列 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=2$ と $\lambda=5$ であった。この固有値に対する固有ベクトルを求めたい。固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は連立方程式

$$(*)\begin{cases}(3-\lambda)x+2y=0\\ x+(4-\lambda)y=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}3-\lambda&2\\1&4-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

の $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解である。

(1) $\lambda=2$ のとき、連立方程式 $(*)$ は

$$\begin{cases}x+2y=0\\ x+2y=0\end{cases}$$

より $x+2y=0$ であれば何でも良い。この 1 つの解として $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ をとれば、それが固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルである。実際 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となる。

(2) $\lambda=5$ のとき、連立方程式 $(*)$ は

$$\begin{cases}-2x+2y=0\\ x-y=0\end{cases}$$

より、$x-y=0$ であれば何でも良い。この 1 つの解として $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ をとれば、それが固有値 $\lambda=5$ に対する固有ベクトルである。実際 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となる。

以上をまとめると

固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda=5$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

問 行列 A が以下の場合に、各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}3&3\\1&5\end{pmatrix}$　　(3) $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$

< 行列の対角化 >

前ページの例より、行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2$ と $\lambda = 5$

であり、固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$、

固有値 $\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であっ

た。この固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を並べた行列を

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\det(P) = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3$ より逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $P^{-1}AP$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、対角行列になる。このとき対角成分の 2 と 5 が
行列 A の固有値となっている。このような行列 P をえらび
$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを**行列の対角化**
という。

問 行列 A が以下の場合に、例のように固有ベクトルを並べた行列 P を作り、P の逆行列 P^{-1} を求め、$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

＜行列の n 乗＞

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、固有方程式

$$\det(A-\lambda \mathrm{I})=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

が重根をもつ場合は行列 A を対角化できない。しかし固有方程式が異なる 2 根を持つ場合は前ページのようにして行列 A を対角化できる。
この場合には A の n 乗 A^n を次のようにして求めることができる。

例 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の n 乗 A^n を求めたい。前ページの例から A を対角化して B になったとすると

$$P^{-1}AP=B$$

ただし

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。ここで B は対角行列であるから

$$B^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$$

より

$$B^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\quad\cdots\ (1)$$

となる。一方

$$B^2=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)=\left(P^{-1}A\right)\left(PP^{-1}\right)(AP)=\left(P^{-1}A\right)I\,(AP)=P^{-1}A^2P$$

$$B^3=\left(P^{-1}AP\right)^2\left(P^{-1}AP\right)=\left(P^{-1}A^2P\right)\left(P^{-1}AP\right)=\left(P^{-1}A^2\right)\left(PP^{-1}\right)(AP)=P^{-1}A^3P$$

より帰納的に

$$B^n=P^{-1}A^nP\quad\cdots\ (2)$$

がわかる。 (1) = (2) より

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\Leftrightarrow A^n=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

より

$$A^n=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 2^n & 5^n \\ -2^n & 5^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}+5^n}{3} & \frac{-2^{n+1}+2\times 5^n}{3} \\ \frac{-2^n+5^n}{3} & \frac{2^n+2\times 5^n}{3} \end{pmatrix}$$

問 以下の場合に A^n を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$　　(3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^n=$　　　　$A^n=$　　　　$A^n=$

＜ 平面の一次変換 1 ＞

座標平面上の任意の点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ に移す変換が、
$a,\ b,\ c,\ d$ を定数として、$x,\ y$ の一次式

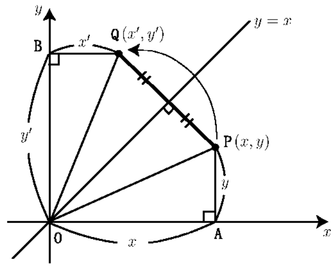
$$(1)\begin{cases} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{cases}$$

で表されている場合に、**一次変換**という。(1) を行列で表すと

$$(2)\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、一次変換 (1) を (2) 式、又は単に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表す。

例1 直線 $y = x$ に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移動したとすれば、右図より $\triangle\mathrm{OAP}$ と $\triangle\mathrm{OBQ}$ は合同だから



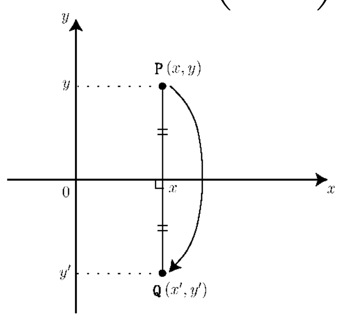
$$x' = y\ ,\quad y' = x$$

となる。よって

$$\begin{cases} x' = 0\times x + 1\times y \\ y' = 1\times x + 0\times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

例2 x 軸に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移動したとすると
右図より



$$x' = x\ ,\quad y' = -y$$

であるから

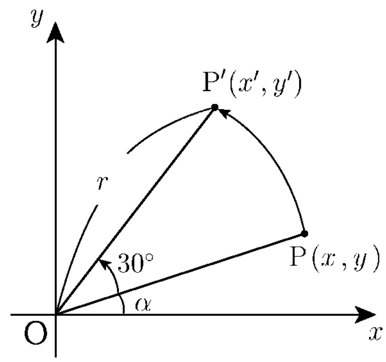
$$\begin{cases} x' = 1\times x + 0\times y \\ y' = 0\times x + (-1)\times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

問 平面上の点を原点に関して対称に移動する一次変換を A とする。 A を表す行列を求めよ。

< 平面の一次変換 2 >

例 座標平面上の点を原点 O を中心として反時計まわりに角度 30° だけ回転移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移動したとする。(x', y') を (x, y) で表したい。
右図のように原点からの距離を $\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = r$ とし、線分 OP と x 軸との角度を α とする。このとき



$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\sin\alpha \quad , \quad x' = \cos(\alpha + 30^\circ) \quad , \quad y' = r\sin(\alpha + 30^\circ)$$

である。加法定理から

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + 30^\circ) = r\{\cos\alpha\cos 30^\circ - \sin\alpha\sin 30^\circ\} \\ &= (r\cos\alpha)\cos 30^\circ - (r\sin\alpha)\sin 30^\circ = x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ \\ y' &= r\sin(\alpha + 30^\circ) = r\{\sin\alpha\cos 30^\circ + \cos\alpha\sin 30^\circ\} \\ &= (r\sin\alpha)\cos 30^\circ + (r\cos\alpha)\sin 30^\circ = y\cos 30^\circ + x\sin 30^\circ \end{aligned}$$

であるから、この変換は

$$\begin{cases} x' = x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ \\ y' = x\sin 30^\circ + y\cos 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり一次変換である。この一次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問 次の一次変換を表す行列を求めよ。(回転は全て反時計回りとする)

(1) 原点中心, 45° 回転

(2) 原点中心, 90° 回転

(3) 原点中心, 120° 回転

(4) 原点中心, θ 回転

< 平面の一次変換 3 >

2 つの一次変換 A, B がある。今、点 (x, y) が A によって点 (x', y') に移り、さらに B によって (x', y') が点 (x'', y'') に移ったとすると

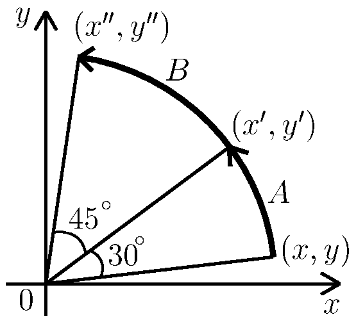
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、A にひき続き B を行う一次変換は行列 B と A の積 BA で表される。

例 原点を中心として $30°$ 回転の一次変換を A、$45°$ 回転を B とする。A にひき続き B を行う一次変換は



$$BA = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° & -\cos 45° \sin 30° - \sin 45° \cos 30° \\ \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° & -\sin 45° \sin 30° + \cos 45° \cos 30° \end{pmatrix}$$

となる。

問 1 加法定理

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$
$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

を使って、例の一次変換 BA を、$\cos 75°$ と $\sin 75°$ だけで表せ。

$$\mathrm{BA} =$$

問 2 次の行列の積を計算することによって、 $\cos 105°$ と $\sin 105°$ の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$\cos 105° =$ $\qquad\qquad$, $\sin 105° =$

＜平面の一次変換4＞

一次変換 A が逆行列 A^{-1} を持つ場合を考える。

点 $(x\ ,\ y)$ が A によって $(x'\ ,\ y')$ に移ったとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。この両辺に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (A^{-1}A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より、行列 A^{-1} は $(x'\ ,\ y')$ を $(x\ ,\ y)$ に移す一次変換を意味する。これを一次変換 A の**逆変換**という。

例　原点を中心として 30° 回転の一次変換を A とすると、

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である。ここで $\det(A) = \cos^2(30^\circ) + \sin^2(30^\circ) = 1$ より逆変換は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

（注）　三角関数の性質 $\cos(-\theta) = \cos\theta\ ,\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$

より、上の例の A^{-1} は、$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix}$

と表される。すなわち 30° 回転の逆変換は -30° 回転である。

問1　原点中心 45° 回転の一次変換を A とする。A の逆変換を求めよ。

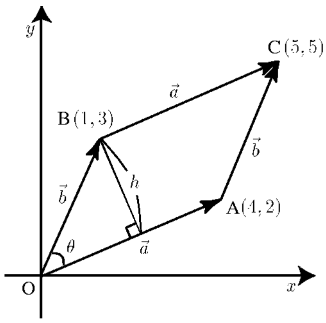
問2　次の行列の積を計算することによって、 $\cos 15^\circ$ と $\sin 15^\circ$ の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$\cos 15^\circ =$ 　　　　　　　　,　$\sin 15^\circ =$

< 平面のベクトルと平行四辺形の面積 1 >

例　平面上の 2 つのベクトル



$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の始点を

原点 O にもってくると、終点は A$(4,2)$, B$(1,3)$ となる。このとき $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形 OACB の面積を求めたい。

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角を θ、平行四辺形の高さを h とすると

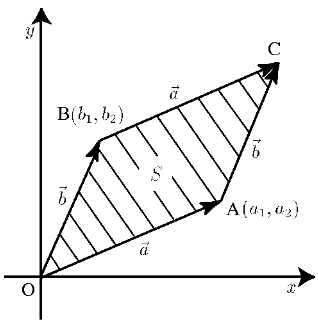
$$\frac{h}{\mathrm{OB}} = \sin\theta \quad \text{より} \quad h = \mathrm{OB} \times \sin\theta$$

だから、面積 S は、$S = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \sin\theta$ である。よって

$$\begin{aligned} S^2 &= \mathrm{OA}^2 \times \mathrm{OB}^2 \times \sin^2\theta = |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 \times (1 - \cos^2\theta) \\ &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - (|\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta)^2 \\ &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \\ &= (4^2 + 2^2) \times (1^2 + 3^2) - (4 \times 1 + 2 \times 3)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

よって　$S = 10$　である。

問　平面上の 2 つのベクトル



$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、

A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C$(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ をとると、四角形 OACB は平行四辺形となる。この平行四辺形の面積 S を求めたい。

(1) S^2 を $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2) S^2 を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

(3) S を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

＜ 平面のベクトルと平行四辺形の面積 2 ＞

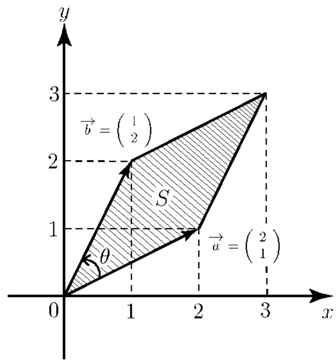
平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は、前ページの結果より $S^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$ だから

$$\boxed{S = (a_1b_2 - a_2b_1) \text{ の絶対値}}$$

である。

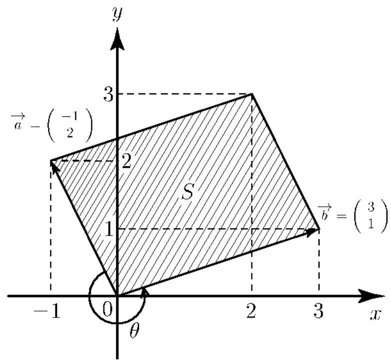
例 1　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は

$S = |2 \times 2 - 1 \times 1| = |3| = 3$



例 2　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は

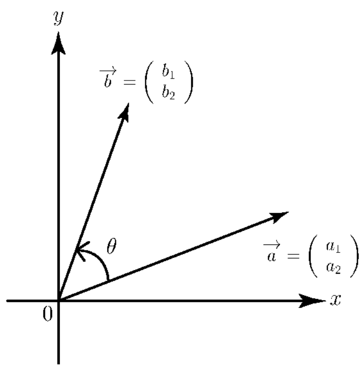
$S = |(-1) \times 1 - 2 \times 3|$
$\quad = |-7| = 7$



一般に 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を右図のように ($\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ に向かって反時計回りに) 計ると

$$\boxed{a_1b_2 - a_2b_1 = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \sin\theta}$$

となる。例 1 の場合は $\sin\theta > 0$ より $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ であるが例 2 の場合は $\sin\theta < 0$ より $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$ となる。



問　次の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

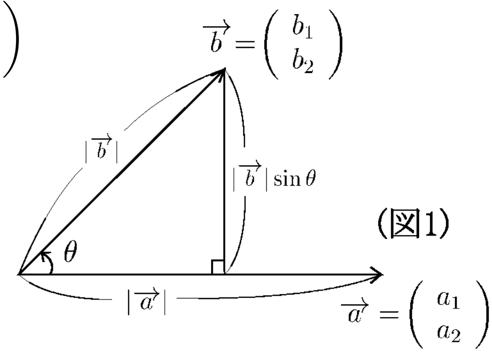
$S =$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$S =$

＜平面のベクトルと行列式＞

平面上の 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を図 1 のように ($\vec{a}$ から $\vec{b}$ にむかって反時計回りに) 計ると、前ページより

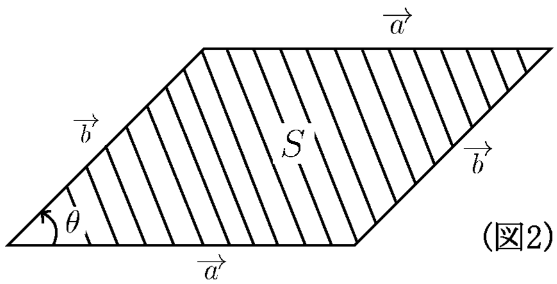


(図1)

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin\theta}$$

となる。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積 S は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値になる。すなわち



(図2)

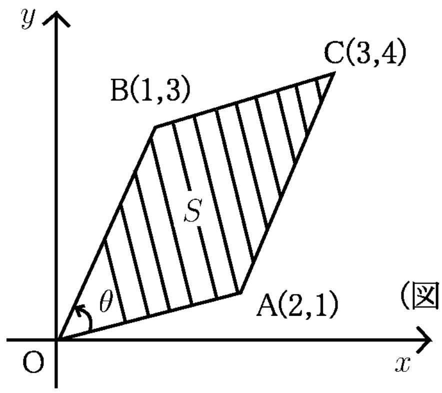
$$\boxed{S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値}}$$

である。特に $\sin\theta > 0$ $(0° < \theta < 180°)$ のときは $S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ である。

例　座標平面上の 4 点 O$(0,0)$, A$(2,1)$ B$(1,3)$, C$(3,4)$ を頂点とする四角形の面積 S を求めたい、ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となるから四角形 OACB は平行四辺形である。そこで角 θ を図 3 のようにとるとすれば $\sin\theta > 0$ となる。従って



(図3)

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおくと上の公式より

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

問　座標平面上の 4 点 O$(0,0)$, A$(3,1)$, B$(2,5)$, C$(5,6)$ を頂点とする四角形の面積 S を求めよ (単位不要)。

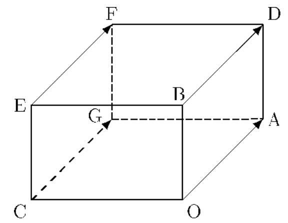
< 空間のベクトル 1 >

速度や力などのように、方向と大きさをもつベクトルは、平面上だけでなく空間においても同様に扱える。

例 1 右図の直方体の頂点を始点、終点とするベクトルのうちで、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しいものは

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

である。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ である。



問 1 例 1 で、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に等しいものと $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に等しいものを全て書け。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$

空間のベクトルについても、和・差、実数倍は平面のベクトルと同様である。

例 2 例 1 の直方体で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

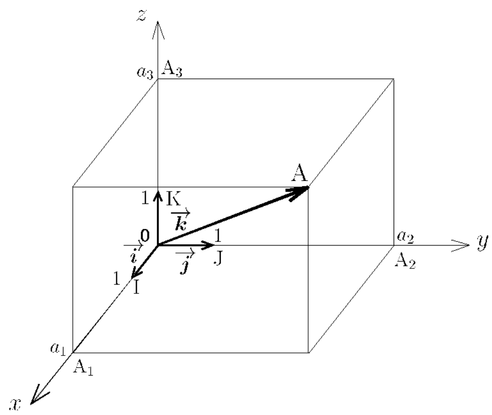
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

問 2 例 1 の直方体で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とするとき、次のベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$　　　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=$　　　　(5) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}=$　　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=$

＜空間のベクトル 2＞



O を原点とする空間における座標軸上の 3 点 $I(1,0,0)$, $J(0,1,0)$, $K(0,0,1)$ に対し、

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}\,,\ \vec{j} = \overrightarrow{OJ}\,,\ \vec{k} = \overrightarrow{OK}$$

を**基本ベクトル**という。

空間における任意のベクトル $\vec{a}$ の始点を原点にもっていき、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点 A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき、$A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$ とおくと、

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

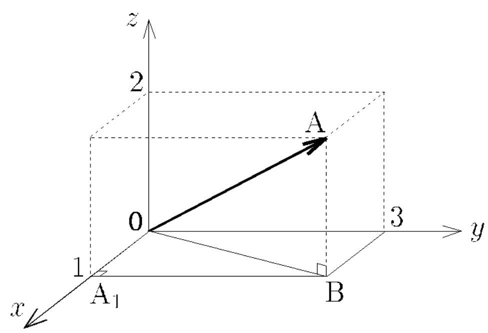
となる。$\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$ より

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

と表される。この a_1, a_2, a_3 を $\vec{a}$ の**成分**といい、$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と表す。

とくに $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

問 1 上図で、$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ を成分で表せ。



例 $A(1,3,2)$ に対し、$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。ここで、$A_1(1,0,0)$, $B(1,3,0)$ とおくと

$$\begin{aligned} OA^2 &= OB^2 + AB^2 \\ &= \left(OA_1{}^2 + A_1B^2\right) + AB^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14 \end{aligned}$$

より、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の大きさは、$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{14}$ である。

問 2 $\vec{a}$ の成分が以下の場合に、ベクトル $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

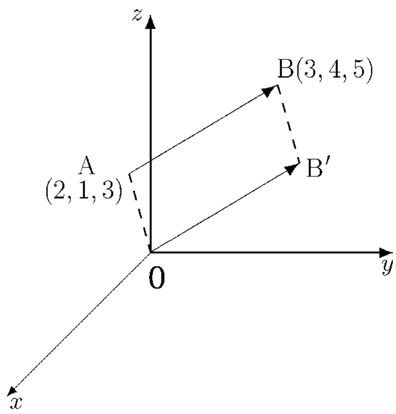
(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| =$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| =$

< 空間のベクトル 3 >



例 空間座標上の 2 点 A(2,1,3)、B(3,4,5) に対し、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めたい。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動し、始点を原点 O にもっていくとすると、点 A が原点 O に移動するから

x 軸方向に -2
y 軸方向に -1
z 軸方向に -3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B′ に (同じ様に) 平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となったとすると、B′ の座標は

$$\mathrm{B'}(3-2\,,\,4-1\,,\,5-3) = (1,3,2)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

（別解）次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 空間の 2 点 A、B の座標が以下の場合に、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

(1) $\mathrm{A}(5,2,3)$, $\mathrm{B}(4,1,2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(2) $\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$

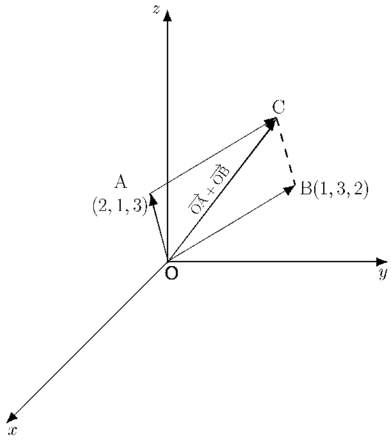
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

< 空間のベクトル 4 >

例　空間の２点 A(2,1,3)、B(1,3,2) と原点 O に対し、ベクトル

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

の成分を求めたい。ベクトル $\overrightarrow{OB}$ を平行移動し、始点が A になるようすると、O が A に移動するから、



x 軸方向に +2
y 軸方向に +1
z 軸方向に +3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同じ様に平行移動して、$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$ となったとすると、C の座標は

$$C(1+2, 3+1, 2+3)=(3,4,5)$$

となる。よって $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ の成分は

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

（別解）次の様に計算してもよい。

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1+3\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

問　２点 A、B の座標が次の様な場合に、以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) A(5,2,3) , B(4,1,2)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$

$2\overrightarrow{OB}=$

(2) A(a_1, a_2, a_3) , B(b_1, b_2, b_3)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$

$3\overrightarrow{OA}=$

＜空間のベクトル 5＞

問 1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき前ページの結果から類推して、次のベクトルの成分を求めよ。（ただし、k は実数）

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} =$　　(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$　　(3) $k\overrightarrow{a} =$

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ の成分は

$$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+0 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

19 ページの結果より、このベクトルの大きさは

$$\left|3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

問 2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} =$　　(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$

$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| =$　　$\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| =$

(3) $3\overrightarrow{a} =$　　(4) $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} =$

$\left|3\overrightarrow{a}\right| =$　　$\left|\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right| =$

< 空間座標と距離 >

例 1 空間上の 2 点 A$(1, 2, 3)$, B $(8, 7, 9)$ 間の距離 AB
を求めたい。AB はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさであるから、
原点を O とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{7^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

問 1 2 点 A,B の座標が以下の場合に、2 点間の距離 AB を求めよ。

(1)A$(5, -1, 2)$, B$(3, 1, 2)$, (2)A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)

AB= AB=

例 2 点 A(x_0, y_0, z_0) を中心とし、半径 r の球面上に点 P(x, y, z)
があるとすると、AP= r より

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

が成り立つ。両辺を 2 乗した式

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2} \quad \text{(球面の方程式)}$$

を中心 (x_0, y_0, z_0), 半径 r の球面の方程式という。$z =$ の形にした
式をそれぞれ上半球面、下半球面の方程式という。

$$z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \qquad \text{(上半球面)}$$
$$z = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \qquad \text{(下半球面)}$$

問 2 以下の球面の方程式が表す球の中心と半径を書け。

(1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

中心 (, ,) , 半径 =

(2) $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 5$

中心 (, ,) , 半径 =

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

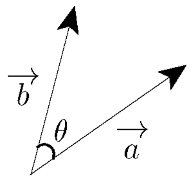
中心 (, ,) , 半径 =

＜ベクトルの内積 1＞

平面上のベクトルと同じように、空間の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ を定めることができる。$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$
そして、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

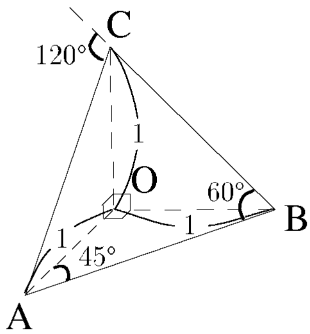
と定める。（どちらか一方が $\vec{0}$ のときは、内積は 0 とする。）



例　右図のような立体 OABC を考える。
ここで OA=OB=OC= 1,

OA⊥OB, OB⊥OC, OC⊥OA

とする。このとき

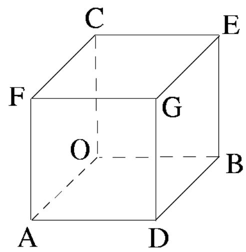


$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}|\times|\overrightarrow{AB}|\times\cos 45^\circ = 1\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|\times|\overrightarrow{BC}|\times\cos 60^\circ = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}|\times|\overrightarrow{CA}|\times\cos 120^\circ = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問　右の図は、1 辺の長さが 1 の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF} =$　　(2) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} =$

(3) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG} =$　　(4) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BG} =$

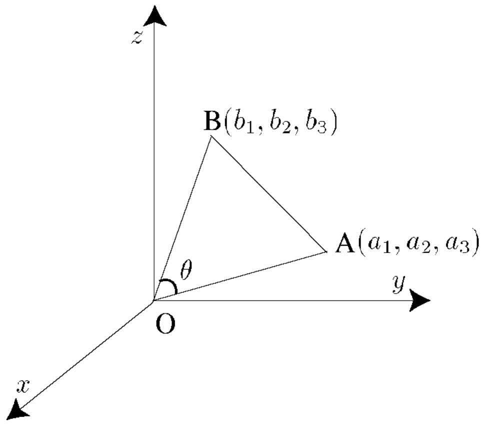
(5) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE} =$　　(6) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EG} =$

＜ベクトルの内積 2 ＞

空間の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ と原点 O に対し、$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より、

$$(*)\ \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\}$$

となる。



問 1　OA,OB,AB の長さの 2 乗を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ で表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　　　, $\mathrm{OB}^2 =$

$\mathrm{AB}^2 =$

問 2　$(*)$ 式の右辺を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 3　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

問 2 の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

＜ベクトルの内積 3＞

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積は、前ページの結果より

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \quad \text{（内積の成分表示）}$$

となる。

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のつくる角を θ とすれば、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ だから、$\theta = 120^\circ$ となる。

問 以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

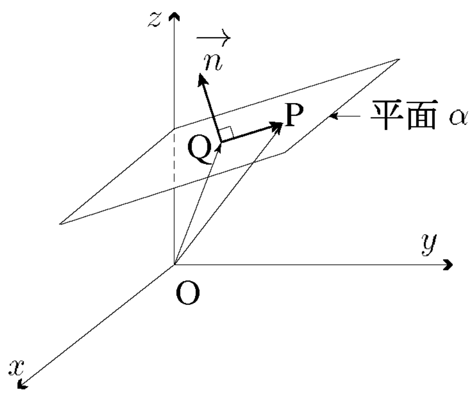
(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜平面の方程式 1＞

例 空間の点 Q$(3,4,5)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}$ に垂直な平面を α とする。平面 α 上の任意の点 P(x,y,z) に対し、$\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は直交するから $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ との内積は $\cos 90^\circ=0$ より



$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$$

となる。一方、

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}=-4\times(x-3)+(-3)\times(y-4)+12\times(z-5)=0$$

これを整理すると、

$$-4x-3y+12z-36=0 \qquad \text{（平面の方程式）}$$

となる。これが平面 α を表す方程式である。このとき $\overrightarrow{n}$ を平面 α の**法線ベクトル**という。

問 ベクトル $\overrightarrow{n}$ と点 Q が以下の場合に、点 Q を通って $\overrightarrow{n}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, Q$(2,-1,3)$

(2) $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, Q(q_1,q_2,q_3)

＜平面の方程式 2 ＞

点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は

$$a(x - q_1) + b(y - q_2) + c(z - q_3) = 0$$

となる。

例 1　$2x + 4y + 3z = 0$ は原点 $(0, 0, 0)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例 2　$3x + 5y + 2z = 8$ を変形すると

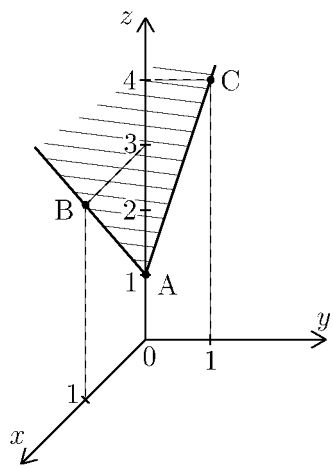
$$3x + 5y + 2(z - 4) = 0$$

となるから、点 $(0, 0, 4)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例 3　$z = 2x + 3y + 1$ を変形すると

$$2x + 3y - (z - 1) = 0$$

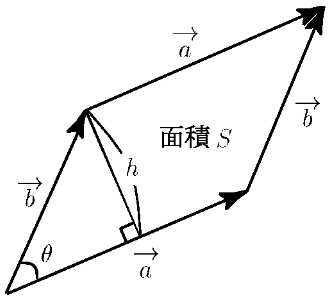
となるから、点 $(0, 0, 1)$ をとおり、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。この平面は点 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$, $\mathrm{B}(1, 0, 3)$, $\mathrm{C}(0, 1, 4)$ を通る右図のような平面である。



問　次の方程式はどんな平面を表すか。

(1) $x - 2y + 3z = 0$　　(2) $2x + y + 3z = 1$　　(3) $z = \dfrac{10 - 5x - 3y}{7}$

< 空間の平行四辺形 1 >



例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対し、

右図のように、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ がつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角を θ、平行四辺形の高さを h とすれば、

$$S = \left|\overrightarrow{a}\right| \times h \ , \ \ h = \left|\overrightarrow{b}\right| \times \sin\theta$$

より

$$\begin{aligned} S^2 &= \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 \times \sin^2\theta = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 \times (1 - \cos^2\theta) \\ &= \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 \times \cos^2\theta = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \times \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \\ &= (1^2 + 6^2 + 3^2) \times \left((-2)^2 + 4^2 + 5^2\right) - \left(1 \times (-2) + 6 \times 4 + 3 \times 5\right)^2 \\ &= 701 \end{aligned}$$

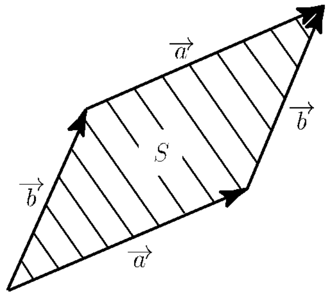
よって $S = \sqrt{701}$ となる。

問 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

＜ 空間の平行四辺形 2 ＞



一般のベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

に対して、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。
前ページと同様に考えると、

$$\begin{aligned}
S^2 &= |\vec{a}|^2 \times |\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \\
&= \left\{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right\} \times \left\{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2\right\} - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= (a_1)^2(b_1)^2 + (a_1)^2(b_2)^2 + (a_1)^2(b_3)^2 + (a_2)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 \\
&\quad +(a_2)^2(b_3)^2 + (a_3)^2(b_1)^2 + (a_3)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 \\
&\quad -\left\{(a_1)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_1b_1a_3b_3\right\} \\
&= \left\{(a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2\right\} + \left\{(a_2b_3)^2 - 2(a_2b_3)(a_3b_2) + (a_3b_2)^2\right\} \\
&\quad +\left\{(a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1)(a_1b_3) + (a_1b_3)^2\right\}
\end{aligned}$$

となる。

問 1 S^2 を $\{\ \ \}^2 + \{\ \ \}^2 + \{\ \ \}^2$ の形にせよ。

$S^2 =$

問 2 行列式の記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ を用いて、S^2 を表せ。

$S^2 =$

問 3 S を行列式の記号を用いて表せ。

$S =$

< 外積 1 >

空間のベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \qquad (\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ の外積})$$

を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の**外積**という。外積の大きさは

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

であるから、前ページの結果より、$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の

つくる平行四辺形の面積 S に等しい。

（注）　今後、2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の間に積の記号 $\times$ がある

場合は必ず外積を意味し、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ と区別する。

例　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、外積は

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \\ 6 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり、内積は $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ である。

問　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合に、外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$　　　　(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

＜外積2＞

例1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、前ページの例より

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ であった。このとき

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 1 + 6 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ は直交している $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a}$。又

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 6 \times 5 + (-3) \times 6 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}$ も直交している $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$。

問1 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合に、$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a}$ と $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

例2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

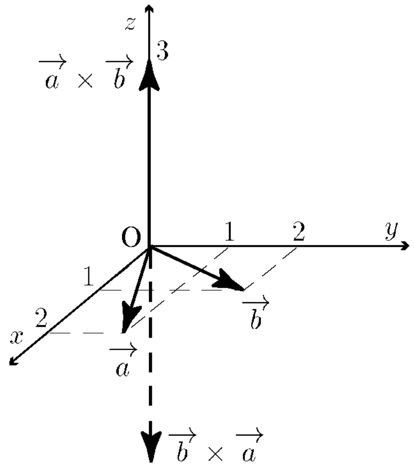
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ は直交している。

問2 例2の場合に、$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。

＜外積 3 ＞

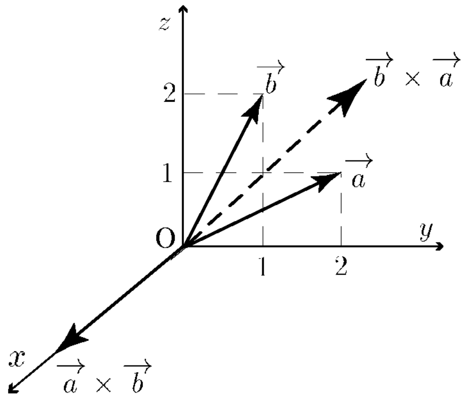
$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ との外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ $\left(\text{および}\overrightarrow{b}\right)$ と直交していて、その大きさは $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しい。



例 1 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ のとき、

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

より $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ となる。



例 2 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき、

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

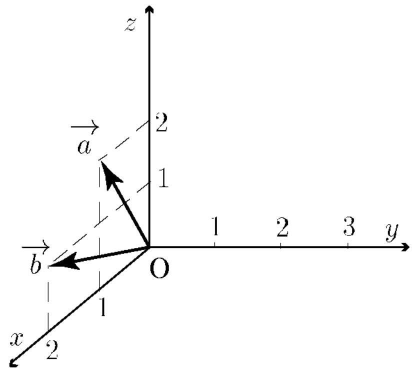
より $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ となる。

問 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき、

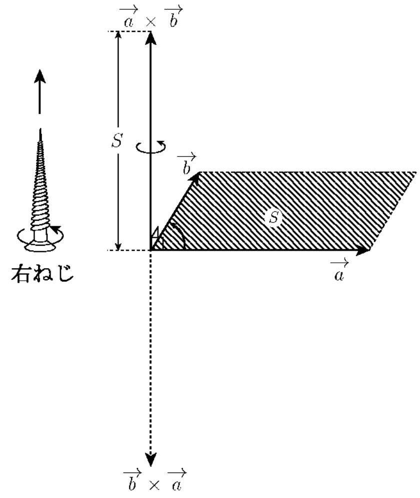
$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ の成分を求め、
右にを $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 作図せよ。

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$

$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=$



＜ 外積 4 ＞



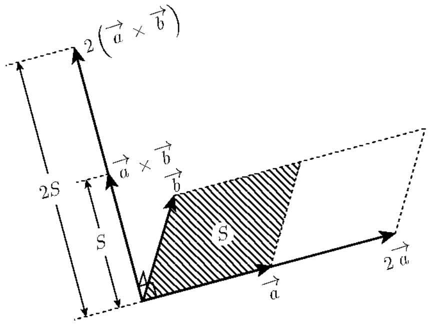
2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトルであり、大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S に等しい。又 $\vec{a} \times \vec{b}$ の向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に、向かって回転するときに、右ねじの進む方向である。従って $\vec{b} \times \vec{a}$ はその反対向きであり

$$\vec{b} \times \vec{a} \; = \; -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

が成り立つ。

例 1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$ である。



次に $(2\vec{a}) \times \vec{b}$ を計算したい。右図から明らかに

$$(2\vec{a}) \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

例 2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

問 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、次の外積の成分を求めよ。

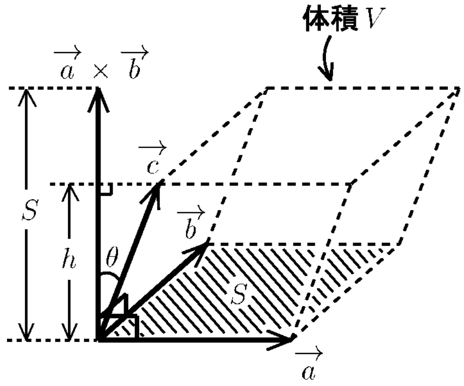
(ただし k は定数とする。)

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$　　, (2) $\vec{b} \times \vec{a}$　　, (3) $(k\vec{a}) \times \vec{b}$　　, (4) $\vec{a} \times (3\vec{a})$

＜平行六面体の体積＞

例 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

であるとき、右図のような平行六面体の体積 V を求めたい。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形の面積を S 、平行六面体の高さを h とすると、



$$V = Sh \quad , \quad S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

である。一方, $\vec{c}$ と $\vec{a} \times \vec{b}$ のつくる角を θ とすると

$$h = \left|\vec{c}\right| \cos\theta$$

であるから、

$$V = Sh = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \left|\vec{c}\right| \cos\theta = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b} \text{と} \vec{c} \text{の内積}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \times (-1) + (-4) \times 3 + 32 \times 7 = 206$$

一般に $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の作る平行六面体の体積 V は

$$\boxed{V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \text{ の絶対値}}$$

問 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が以下の場合に、$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ を求めよ。

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$

＜スカラー三重積 1 ＞

3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ に対して

$$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} \qquad \left(\left(\overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{の外積}\right)\text{と}\overrightarrow{c}\text{との内積}\right)$$

を $\left\{\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{b}\ ,\ \overrightarrow{c}\right\}$ の**スカラー三重積**という。

$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ に対しスカラー三重積は

$$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_2b_3-b_2a_3)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

となる。従ってスカラー三重積は 3 次の行列式を使って

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}$$

と表される。

例 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ のスカラー三重積は

$$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&3&1\\0&1&3\end{vmatrix}=18+2-2-3=15$$

問 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が以下の場合にスカラー三重積 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$, $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=$

(2) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$, $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=$

＜スカラー三重積 2 ＞

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し行列式の性質より

$$\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$$

$$\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$$

であるから

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b}}$$

がなりたつ。また

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$$

より

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}}$$

がなりたつ。

問 1　次のスカラー三重積を $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{c} =$

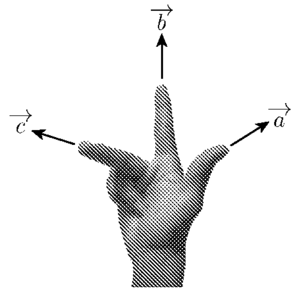
(2)　$\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} =$

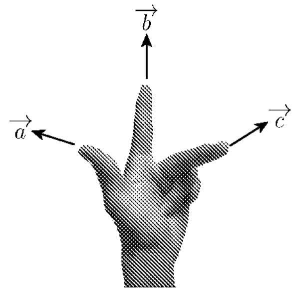
問 2　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し次のスカラー三重積の値を求めよ。

(1)　$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a}$　　(2)　$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b}$　　(3)　$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$

< 右手系と左手系 >

(図 1 右手系)





(図 2 左手系)

3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が図 1 のような位置関係にあるとき

$\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ は**右手系**

という。

また $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が図 2 のような位置関係にあるとき

$\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ は**左手系**

という。

(注) $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ が右手系であれば

$\left\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right\}$ も右手系であり、

$\left\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\}$ も右手系である。

35 ページの例の $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ は右手系である。この例の場合スカラー三重積 $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$ は 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ の作る平行六面体の体積になる。この事と前ページのスカラー三重積の性質

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b}$$

より以下の事がわかる。

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\} \text{ が右手系} & \Longleftrightarrow & \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} > 0 \\ \left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\} \text{ が左手系} & \Longleftrightarrow & \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} < 0 \end{array}}$$

(注 1) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = 0$ の場合は 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が作る平行六面体の体積は 0(ゼロ) となる。このときは 3 つベクトルが同一平面上にある。この場合は右手系でも左手系でもない。

(注 2) $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ が右手系であれば $\left\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right\}$ は左手系である。

問 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が以下の場合に、スカラー三重積 $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$ を計算し、$\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ が右手系か左手系かを判定せよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =$

< 基本ベクトルによる計算 1 >

19 ページより基本ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば

任意のベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ は

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

と表される。

例 1 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

問 1 次のベクトルを例 1 のように基本ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ で表せ。

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$

ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と定数 C に対して

$$C\overrightarrow{a} = C\left(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = Ca_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + Ca_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + Ca_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \qquad (\text{定数倍})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \left(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) + \left(b_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \\ &= (a_1 + b_1)\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (a_2 + b_2)\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (a_3 + b_3)\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \qquad (\text{和}) \end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \qquad (\text{ベクトル } \overrightarrow{a} \text{ 大きさ})$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \cdot \left(b_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (\text{内積})$$

がなりたつ。

例 2 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 5\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ に対して、

$$4\overrightarrow{a} = 4\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 8\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 12\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = 3\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) + 2\left(4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 5\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = 11\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 19\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \cdot \left(4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 5\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 5 = 17$$

問 2 $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ に対し、次のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} =$ (2) $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} =$

問 3 問 2 の $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に対し、次の値を求めよ。

(1) $\left|\overrightarrow{a}\right| =$, (2) $\left|\overrightarrow{b}\right| =$, (3) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

問 4 2 点 $A(1\ ,\ 3\ ,\ -2)$, $B(4\ ,\ 5\ ,\ 6)$ に対し $\overrightarrow{AB}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB} =$

< 基本ベクトルによる計算 2 >

前ページの基本ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ による成分表示は外積の計算に有効である。

$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ に対し、外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

となるが、3 次の行列式の行展開の式から形式的に

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

とおくと

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(b_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

と書ける。外積の計算はこの形の方がおぼえやすい。

例

(1) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(5\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \left(-\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 12\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 10\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) - \left(6\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 5\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 4\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) = -7\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 7\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 14\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問

(1) $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$

(3) $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$

(4) $\left(2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 3\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) =$

(5) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

(6) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} =$