高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series **A**

No. **10**

内容

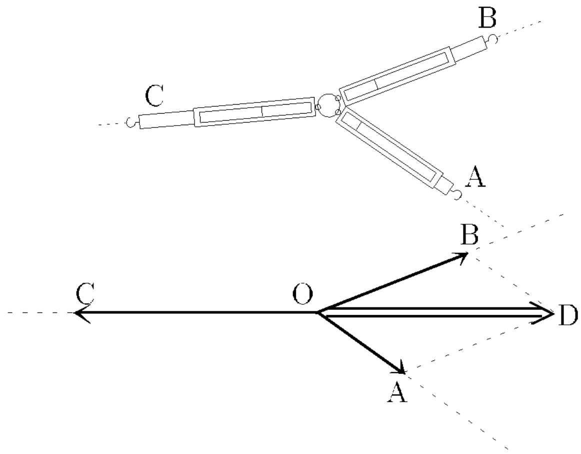
◎ 平面のベクトル

◎ 内積

◎ 行列

◎ 行列式

◎ 連立一次方程式



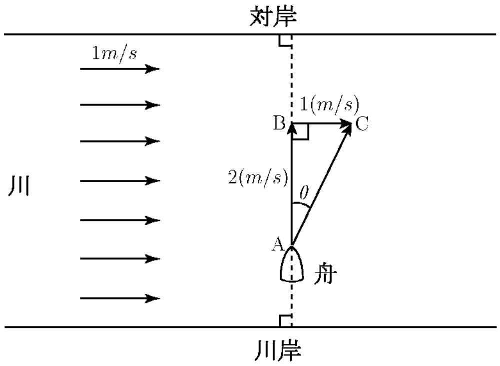
電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< 速度の合成 >

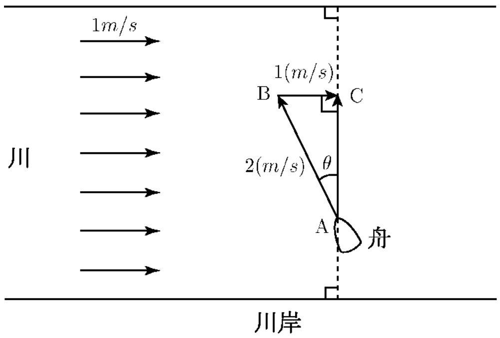
例 1　静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まですすむはずであるが、かわのながれのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを 2(=舟の速さ)、BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より　AC= $\sqrt{5}$ となるから、

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$

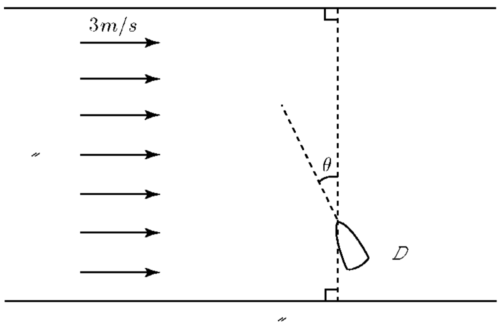


例 2　例 1 と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。例 1 と同様に、舟の速度を矢線 AB(長さ 2)、川の速度を矢線 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$

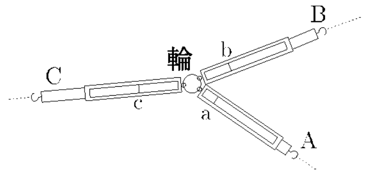


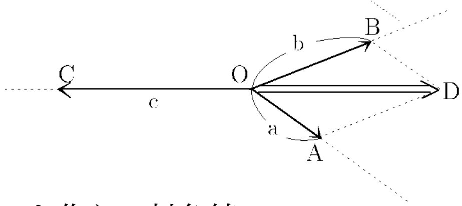
問　静水中を 5m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 3m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



< 力の合成 >

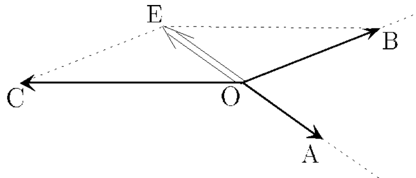
例　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3 本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ矢線をひき, その矢線の先を A, B, C とする。



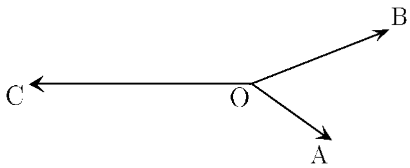


次に OA,OB を 2 辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 矢線 OD と矢線 OC は方向が同じ（矢印の向きは逆）で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を矢線（$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$）で表すと, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ との合力が $\overrightarrow{OD}$ であり, $\overrightarrow{OC}$ とつりあっていることがわかる。

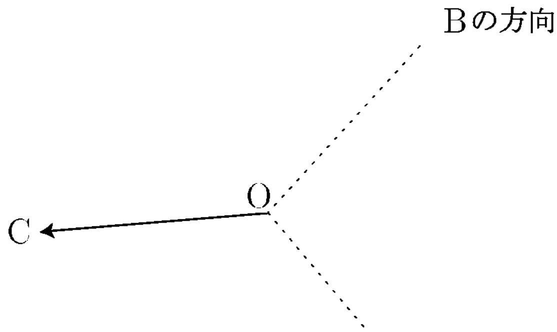
同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 矢線 OE と OA は方向が同じ（向きが逆）で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の合力が $\overrightarrow{OE}$ であり, $\overrightarrow{OA}$ とつりあっている。



問 1　右図に $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ との合力 $\overrightarrow{OF}$ を作図せよ。



問 2　ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の矢線の長さがわからない。$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ がつりあうように, 右図に矢線 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を作図せよ。



＜平面上のベクトル１＞

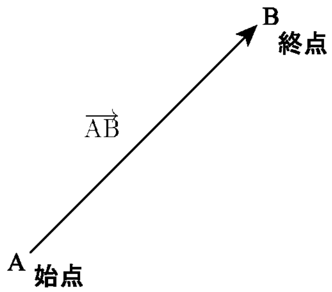
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を矢印（矢線）で示し、その大きさは矢線の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変らないときは、一本の矢線で流れの速度を表すことができる。このように、矢線で、向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの矢線 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい、B を**終点**という。ベクトルは $\overrightarrow{a}$ のような記号で表したり、太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする（ワークブックでは $\overrightarrow{a}$ と書くことにする）。



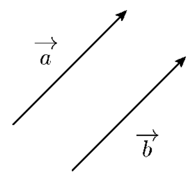
ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ について、向きが同じで、大きさが等しいとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**等しい**といい、

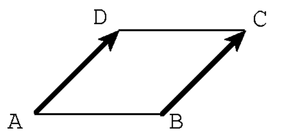
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



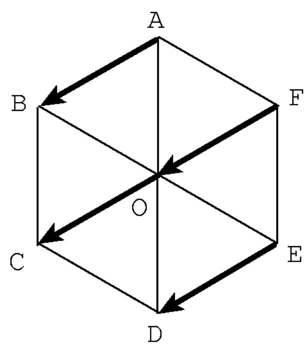


例　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

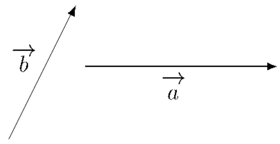
である。

問　右の正六角形で、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。



＜平面上のベクトル２＞

１ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、2ページでやった2つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

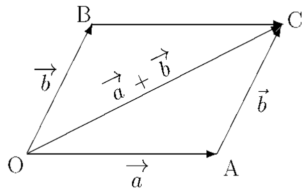


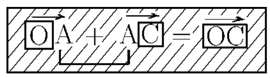
２つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が与えられているとする。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A、B とし、OA、OB を2辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が決まる。これを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**和**といい、

$$\vec{a}+\vec{b}$$

と書く。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が2つの力であれば $\vec{a}+\vec{b}$ はその合力を表す。又、$\vec{a}$、$\vec{b}$ が2つの速度であれば、$\vec{a}+\vec{b}$ はその合成速度を表す。





ここで、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから、

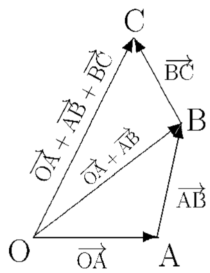
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと、A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最初の到着点 C に行くベクトルになる。

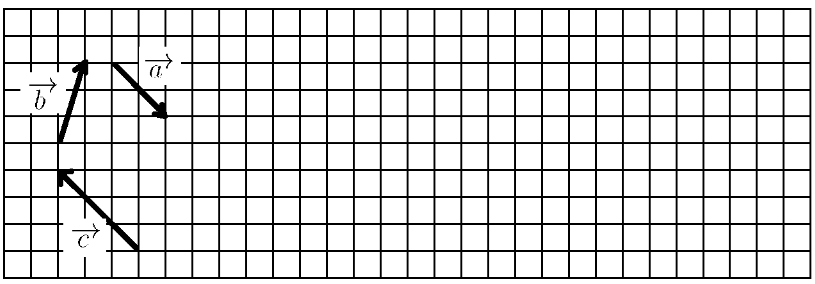
同様にして、4 点 O、A、B、C に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。



問　ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、が下図の場合に、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を作図せよ。

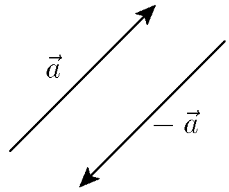


< 平面上のベクトル 3 >

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。
これを**零ベクトル**といい、$\overrightarrow{0}$ で表す。つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して、大きさが同じで、
向きが反対であるベクトルを、$\overrightarrow{a}$ の
逆ベクトルといい、$-\overrightarrow{a}$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき、$-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。



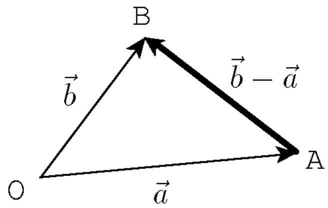
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

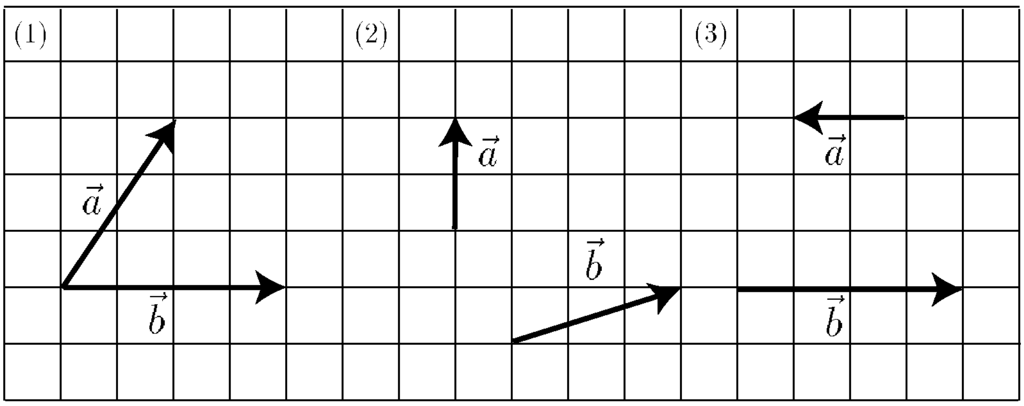
だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ の**差**といい、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$

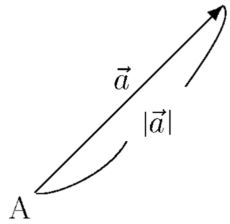


と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には
「終点 (B)− 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問 $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ が次のように与えられている場合に $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ を図示せよ。



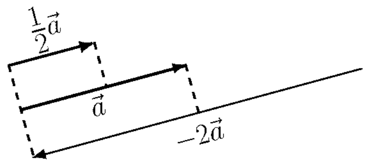
< 平面上のベクトル 4 >



ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを $|\overrightarrow{a}|$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは、$|\overrightarrow{a}|$ は線分 AB の長さである。

大きさが 1 であるベクトルを **単位ベクトル** という。

$\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{a}$ と整数 k に対して



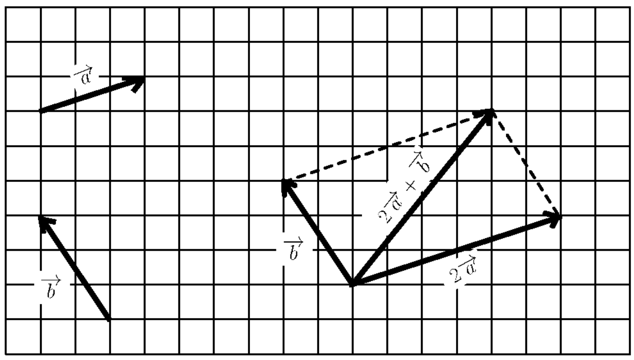
(1) $k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル
(2) $-k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

と定める。このようなベクトルを $\overrightarrow{a}$ の**実数倍** (又は**スカラー積**) という。

例 ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が右図の様に与えられているとき

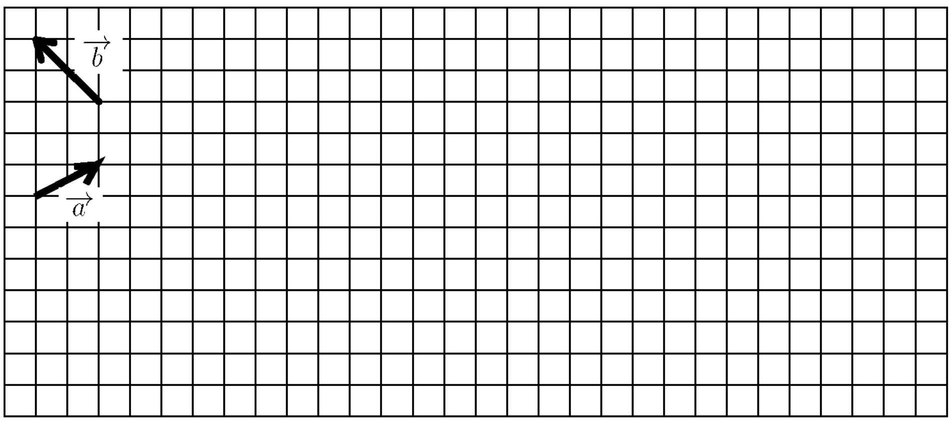
$$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

を図示すると、右の様になる。



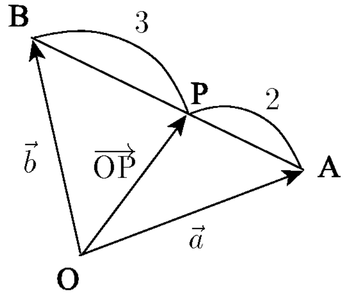
問 ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

(1) $-2\overrightarrow{a}$、 (2) $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{b}$、 (3) $-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$、 (4) $\overrightarrow{a} + \dfrac{5}{2}\overrightarrow{b}$



< 平面上のベクトル 5 >

例題 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で、線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。



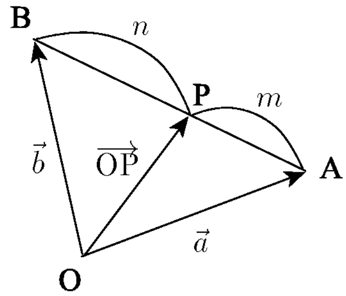
（解） $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{2+3}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

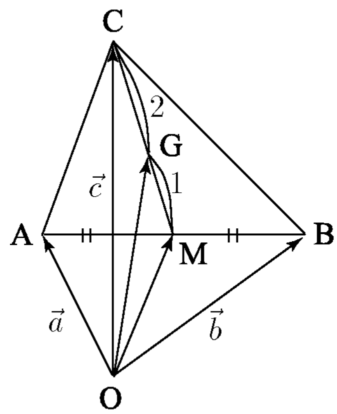
より

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

問 1 線分 AB を m : n に内分する点を P とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}\left(=\overrightarrow{OA}\right)$ と $\vec{b}\left(=\overrightarrow{OB}\right)$ で表せ。



問 2 三角形ABCに対し、ABの中点をM, MC を 1 : 2 に内分する点を G, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする。

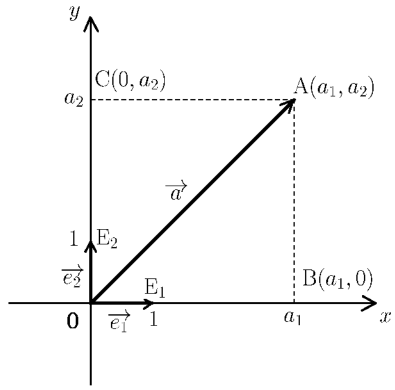


(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OM}$ と $\vec{c}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

＜ベクトルの成分 1＞



O を原点とする座標平面上の 2 点 $E_1(1,0)$、$E_2(0,1)$ に対して、
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ 、$\vec{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$
を **基本ベクトル** という。

平面上の任意の点 $A(a_1, a_2)$ に対し、2 点 $B(a_1, 0)$、$C(0, a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

となる。ここで $\overrightarrow{OB} = a_1\vec{e_1}$、$\overrightarrow{OC} = a_2\vec{e_2}$ だから、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

と表す事が出来る。この a_1、a_2 を $\vec{a}$ の **成分** といい、a_1 を x 成分、a_2 を y 成分という。このとき $\vec{a}$ を成分を使って

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

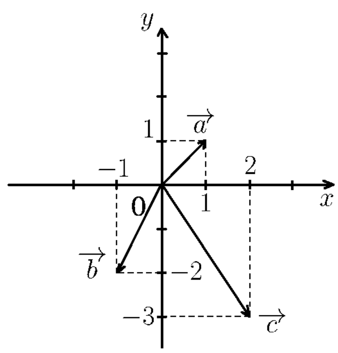
と表す。(このように成分を縦に並べる表し方を縦ベクトル表示といい、$\vec{a} = (a_1, a_2)$ の様に横に並べる表し方を横ベクトル表示という。本書では、縦ベクトル表示を使う。)

例 1 $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ 零ベクトル

例 2 2 点 A(2,3)、B(4,−1) に対し、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} 、\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問 右図のベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ を成分で表せ。

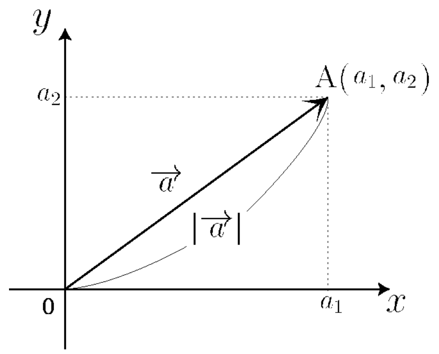


< ベクトルの成分 2 >

右図のように $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ は,

線分 OA の長さと一致するから

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ のとき} \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$



例題　2 点 A(3, 1), B(4, 5) が与えられたとき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように

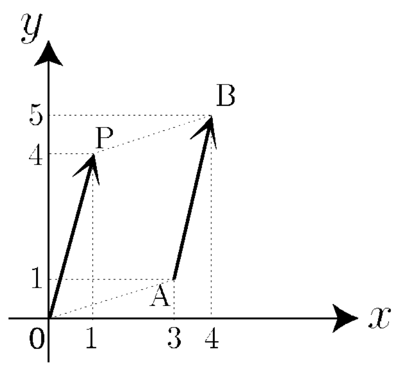
x 軸方向に -3
y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ になるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$



(別解)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots (\text{終点} - \text{始点}) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問　次の 2 点 A,B に対し, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し, その大きさを求めよ。

(1)　A (3, 1),　B (4, 5)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2)　A (1, −1),　B (−2, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

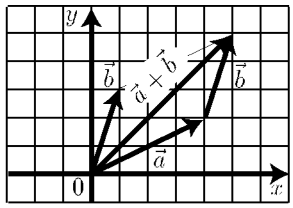
＜ベクトルの成分 3＞

例題 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, (2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, (3) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$, (4) $2\overrightarrow{b}$

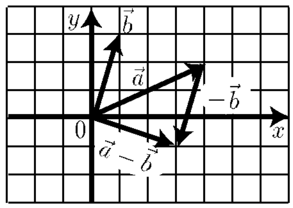
（解） (1) 右図より

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



(2) 右図より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

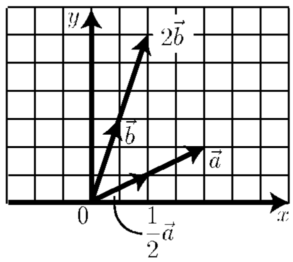


(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) 右図より

$$2\overrightarrow{b} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



問 1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

（k は定数）

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$

(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$

(3) $k\overrightarrow{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$

問 2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

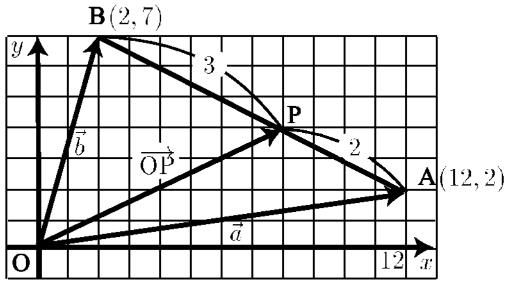
(1) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} =$

(2) $-\overrightarrow{b} =$

(3) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$

(4) $\overrightarrow{a} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b} =$

< 内分点 >



例題　平面上の 2 点 A(12, 2) , B(2, 7) に対し、線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P の座標を求めよ。

（解）　原点を O とし、

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とおくと、7 ページの例題より、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

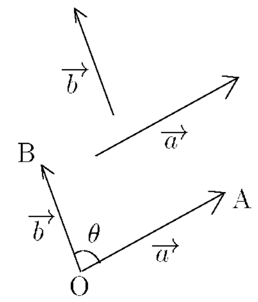
$$= \begin{pmatrix} \frac{36}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{5} \\ \frac{20}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって、P の座標は (8, 4) である。

問 1　平面上の 2 点 A(a_1, a_2) , B(b_1, b_2) に対し、線分 AB を 3 : 4 に内分する点 P の座標を求めよ。

問 2　平面上の 2 点 A(a_1, a_2) , B(b_1, b_2) に対し、線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標を（7 ページの問 1 を参考にして）求めよ。

< ベクトルの内積 1 >



$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，
終点をそれぞれ A,B とするとき，
$\angle$ AOB の大きさ θ は，$\vec{a}, \vec{b}$ によってきまる。この角 θ をベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の
つくる角という。

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のつくる角が θ のとき

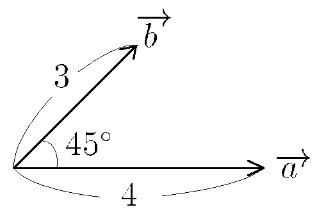
$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

を，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の**内積**といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \quad \text{(内積の定義)}$$

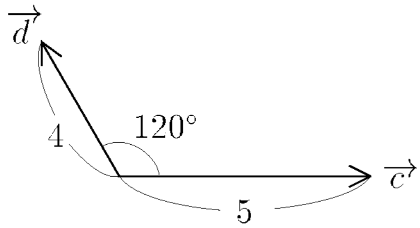
例 (1) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ で
$\vec{a}, \vec{b}$ のつくる角が 45° のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times 3\times\cos 45^\circ$$
$$= 4\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$



(2) $|\vec{c}| = 5, |\vec{d}| = 4$ で
$\vec{c}, \vec{d}$ のつくる角が 120° のとき

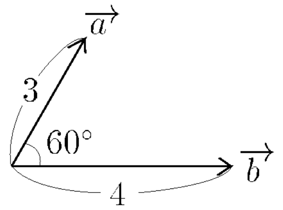
$$\vec{c}\cdot\vec{d} = 5\times 4\times\cos 120^\circ$$
$$= 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -10$$

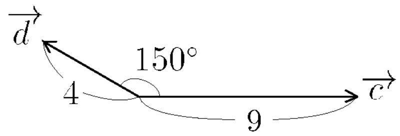


問 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が右図の場合に
内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b} =$

$\vec{c}\cdot\vec{d} =$





＜ベクトルの内積 2 ＞

内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で、$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ のときは、$\cos\theta=\cos 0°=1$ だから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2 \text{ つまり、} |\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}$$

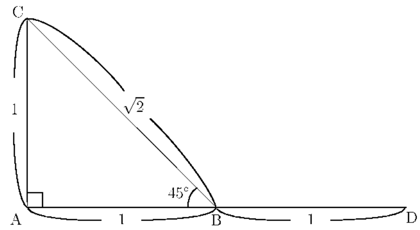
又、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ のなす角が $90°$ のとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は **垂直** であるといい、$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ と書く。$\cos 90°=0$ であるから、次が成り立つ。

$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$、$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ のとき

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$$

(ベクトルの垂直と内積)

例　右図の直角二等辺三角形において

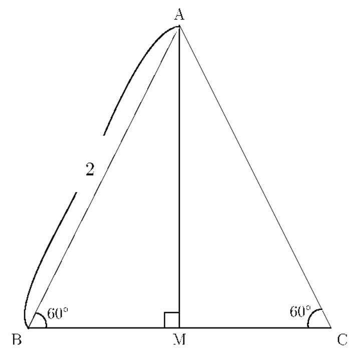


$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\times1\times\cos 90°=0$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45°=1$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135°=-1$

問　右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

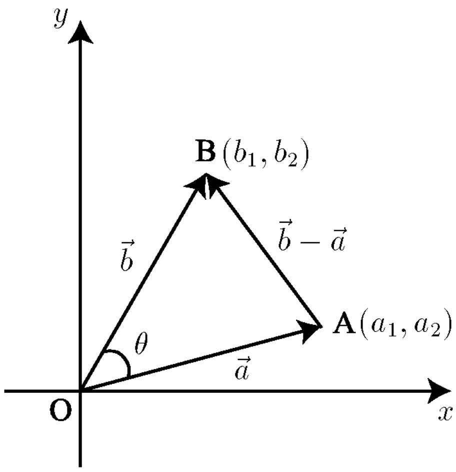
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=$

＜内積の成分表示 1＞



座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ と原点 O に対し、2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

問 1　$(*)$ 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 2　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問 1 の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

＜内積の成分表示 2 ＞

前ページの結果より

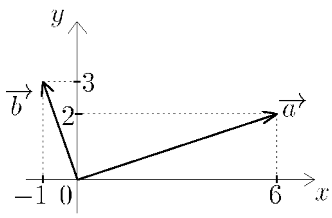
$$\boxed{\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\ \text{のとき}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

である。

例 1　$\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ のとき　内積 $\vec{a},\ \vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\times(-1)+2\times3=0$$

であるから, $\vec{a}$ は $\vec{b}$ は垂直 ($\vec{a}\perp\vec{b}$) である。



問 1　$\vec{a},\ \vec{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直である場合は　$\vec{a}\perp\vec{b}$　と書け。

(1)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=$

(2)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=$

(3)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=$

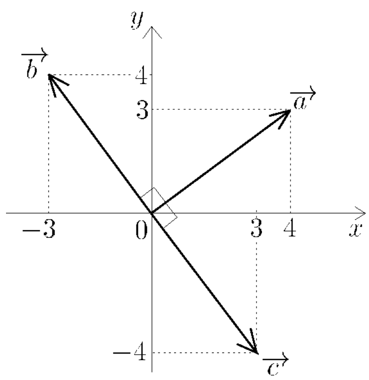
例 2　$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-3)+3\times4=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=4\times3+3\times(-4)=0$$

より　$\vec{a}\perp\vec{b},\ \vec{a}\perp\vec{c}$　である。



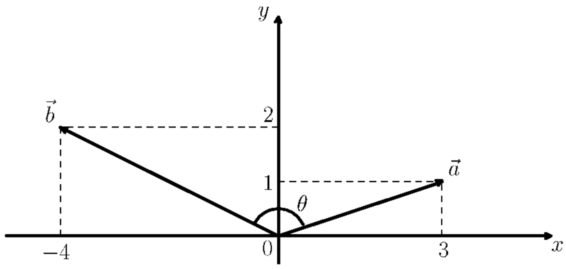
問 2　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ と垂直なベクトルの例を 2 つあげよ。

< ベクトルのなす角 >

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。

内積の定義から

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$



より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \dfrac{3}{4}\pi \ (= 135^\circ)$ である。

問 1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。上の例にならって、$\cos\theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$\cos\theta =$

問 2 以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ。

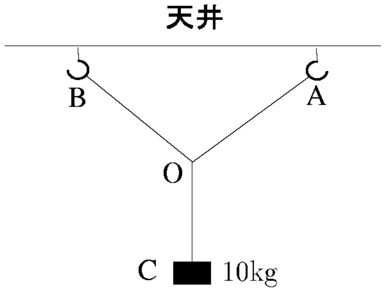
(1) $|\overrightarrow{a}| = 1$ 、$|\overrightarrow{b}| = 2$ 、$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

＜ベクトルの均衡＞

例 天井の 2ヶ所 A,B からひもをつけて、点 O で結び、O から別のひもをのばして、おもり C をつける。C が 10kg のとき、支点 A,B にどのくらいの力がかかるだろうか？



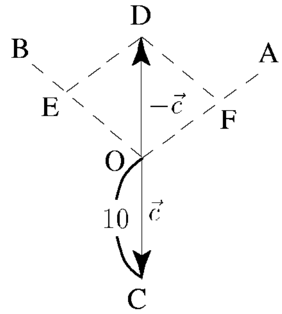
このような問題では、平面に図を書き、おもりの力をベクトル $\vec{c}$(長さを 10 にする) で表す。OA と OB の方向を点線で書き、$\vec{c}$ の逆ベクトル $-\vec{c}$ を O を始点に書く。$-\vec{c}$ の終点を D とする。D に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}//\overrightarrow{\mathrm{ED}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}//\overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

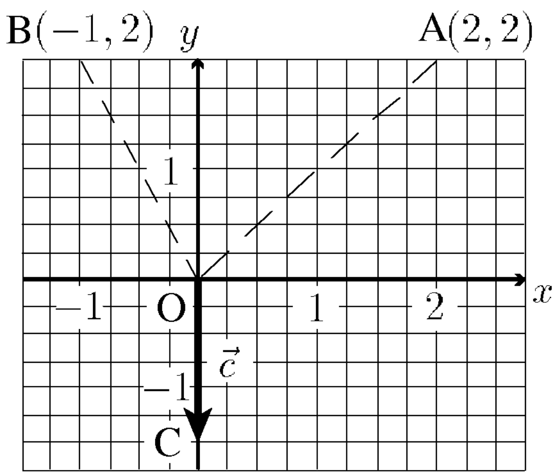
となるように点 E,F をとると、OF の長さが支点 A にかかる力 (kg) で、OE の長さが支点 B にかかる力 (kg) になっている。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{c}$$

となる。



問 右図のように 3 点 $A(2,2)$, $B(-1,2)$, $C(0,-1.5)$ がある (1 目もり 0.25)。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{c}$ となるような点 D の座標を求めよ。

(2) OA 上に点 F をとり、OB 上に点 E をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となるように、右図に E と F を作図せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような定数 k_1 と k_2 を求めよ。

< 行列 >

自然数 n と m に対して、$n \times m$ 個の数を縦に n 個、横に m 個の長方形に並べて書いたものを n 行 m 列の**行列** $(matrix)$、または (n, m) 型の行列、(n, m) 行列などという。一つの行列を構成する n, m 個の数をその行列の**成分**という。また同じ横線上に並んでいる n 個の数の組をその行列の**行**、同じ縦線上に並んでいる m 個の数の組をその行列の**列**という。第 i 行と第 j 列の交叉点にある成分をその行列の (i, j) **成分**という。

例 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ は 2 行 3 列の行列 ((2,3) 型行列) で、
第 1 行は $(1, 3, 5)$、第 2 行は $(2, 4, 6)$、第 1 列は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$、
第 2 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$、第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ である。また $(1, 2)$ 成分は
1 行 2 列の成分だから 3 であり、$(2, 3)$ 成分は 6 である。

問 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ の型（何行、何列）と第 1 行、第 3 列を
書き、（$1, 3$）成分と $(3, 2)$ 成分を求めよ。

行列を表すのに $A, B, C \cdots, X, Y \cdots$ 等の大文字の斜体を用いる。
行列の型が特別の場合、(n, m) 型行列の代わりに別名で呼ぶ。
$n = m$ の場合は$\boldsymbol{n}$**次の正方行列**という。$(n, 1)$ 型行列
を$\boldsymbol{n}$**次の列ベクトル**、$(1, m)$ 型行列を$\boldsymbol{m}$**次の行ベクトル**という。

例 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の場合、A は 2 次の正方行列、B は 3 次の行ベクトル、C は 2 次の列ベクトル、D は 3 次の正方行列、E は 3 次の列ベクトルである。

問 2 4 次の行ベクトル、3 次の列ベクトル、2 次の正方行列の例を上げよ。

< 行列の計算 1 >

一般の (n,m) 型行列を表すのに

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

のように一つの小文字 a に二重の添字をつけて表す。このように行列 A の型がはっきり分かっていて、A の (i,j) 成分が a_{ij} で表されるとき、$A=(a_{ij})$ と略記する。

二つの行列 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$ は型が同じで、かつ対応する成分が相等しい $(a_{ij}=b_{ij})$ とき、そのときに限って A と B は等しいといい、A=B と書く。また同じ型の行列に対し、ベクトルの場合と同様にして、和、差、実数倍が定められる。

共に (m,n) 型行列 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$ に対し、

和： $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

差： $A-B=(a_{ij}-b_{ij})$

実数倍： $kA=(ka_{ij})$ （k は実数）

と定める。

例 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, (3) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

問 次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

(3) $-3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$

< 行列の計算 2 >

行列の和・差実数倍はベクトルの場合とまったく同じである。その際零ベクトルに相当するものはすべての成分が 0（ゼロ）である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であり、アルファベットの O の大文字の斜体で表し、**零行列**という。

例題 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき

$$3(X - 2A) + 2(B + X) = O$$

をみたす行列 X を求めよ。

解 上の式から

$$5X - 6A + 2B = O$$

より

$$X = \frac{1}{5}(6A - 2B)$$

$$= \frac{1}{5}\left\{6\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

問 例題の行列 A, B に対し、次式をみたす行列 X を求めよ。

(1) $3X - 2A + B = 0$

(2) $3(2X - 3A) = -5(B - X)$

＜ 行列の積 1 ＞

m 次の行ベクトル A と m 次の列ベクトル B が

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

であるとき A と B の積を

$$A\,B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m$$

と定める。

例　(1)　$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$

(2)　$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 12 + 20 + 6 = 38$

(3)　$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 + (-1) \times 7 = 31$

注）　(1) は平面のベクトルの内積, (2) は空間ベクトルの内積を
表していると考えてもよい。

問　次のベクトルの積を求めよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$=$

(2)　$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$=$

(3)　$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad =$

< 行列の積 2 >

n 行 m 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ と

m 行 ℓ 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix}$ に対して、積を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{im}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (a_{i1} a_{i2} \cdots a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

と定める。

例

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 & 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$

問 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

< 行列の積 3 >

例 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5+3\times 6+(-1)\times 7 \\ 2\times 5+0\times 6+4\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 38 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 8+3\times 9+(-1)\times 10 \\ 2\times 8+0\times 9+4\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 56 \end{pmatrix}$

(3) (1) と (2) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 38 & 56 \end{pmatrix}$$

(注) 行列 A, B に対して, 左の行列 A の列の数と右の行列 B の行の数が同じでないと積 AB はできない。

行列の積の定義から, 次のことがわかる。

$$\boxed{(n,m)\ \text{行列}\ \times (m,\ell)\ \text{行列}\ =\ (n,\ell)\ \text{行列}}$$

問 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

< 行列の積 4 >

行列 A、B が共に n 次の正方行列の場合は、その積として AB と BA が共に定義されるが、AB と BA が等しいことはまれである。（このことを「交換法則がなりたたない」という。）

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4+2\times(-3) & 1\times(-1)+2\times 6 \\ 3\times 4+5\times(-3) & 3\times(-1)+5\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & 27 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1+(-1)\times 3 & 4\times 2+(-1)\times 5 \\ (-3)\times 1+6\times 3 & (-3)\times 2+6\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

であり、$AB \neq BA$ となる。

問　行列 A、B が以下の場合に積 AB と BA を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$AB =$ 　　　　　　$BA =$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$AB =$ 　　　　　　$BA =$

$<$ 行列の積 5 $>$

行列の乗法に関しては、交換法則は成り立たないが、それ以外は数の計算と同様にできる。A, B, C を行列、k を実数とすると

実数倍　$(kA)B = A(kB) = k(AB)$

結合法則　$(AB)C = A(BC)$

分配法則　$(A + B)C = AC + BC \quad \cdots (1)$

$C(A + B) = CA + CB \quad \cdots (2)$

が成り立つ。ただし、交換法則が成り立たないので、(1) と (2) は等しくない。

例　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$AC + BC = (A + B)C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問　上の A, B, C に対し、以下の計算をせよ。

(1) $C(A + B) \ =$

(2) $AB - BC \ =$

(3) $CC + BC \ =$

< 行列の積 6 >

3 つの行列 A、B、C の積 $(AB)C = A(BC)$ を単に ABC と書く。又、$AA = A^2$、$AAA = A^3$、$AAAA = A^4$ と表す。

例 A、B を同じ型の正方行列とするとき、分配法則より

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

であるが、交換法則が成り立たないので

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

である。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}、\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad のとき$$

$A^2 - AB + BA - B^2 = A(A-B) + B(A-B)$

$= (A+B)(A-B)$

$= \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

問 上の行列 A、B に対し、次式を計算せよ。

(1) $A^2 - B^2$

$=$

(2) $A^2 - BA + AB - B^2$

$=$

＜ 2次の行列式 1 ＞

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

を行列 A の**行列式** (*determinant*) という。この定義より次の性質がわかる。

[Ⅰ] 行と列を入れ替えても行列式の値は同じ　$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

[Ⅱ] 二つの列（又は行）をいれかえると符号が反対になる。　$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

[Ⅲ] １つの列（又は行）を定数倍した行列式の値は元の行列式の値の定数倍になる。　$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$　(k は定数)

[Ⅳ] 分配法則が成り立つ　$\begin{vmatrix} (a_1 + c_1) & b_1 \\ (a_2 + c_2) & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

[Ⅴ] 2 つの列（又は行）が一致すれば行列式の値は 0　$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$

例 1 $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times (8 - 5) = 18$

例 2 2 つの実数 x, y に対し

$$k_1 = 2x + 5y, \qquad k_2 = x + 4y$$

とおくと

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2x + 5y) & 5 \\ (x + 4y) & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3x$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & (2x + 5y) \\ 1 & (x + 4y) \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3y$$

問　2 つの実数 x, y に対し

$$k_1 = 5x - 2y, \qquad k_2 = 2x + y$$

とおくとき次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} k_1 & -2 \\ k_2 & 1 \end{vmatrix}$

$=$

(2) $\begin{vmatrix} 5 & k_1 \\ 2 & k_2 \end{vmatrix}$

$=$

＜ 2次の行列式 2 ＞

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 23 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 41 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 20 & 23 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} = 20 \times 16 - 23 \times 13 = 21$$

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 14 & 41 \\ 7 & 22 \end{vmatrix} = 14 \times 22 - 41 \times 7 = 21$$

(注) 一般に $AB \neq BA$ であるが、$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$ が成立する。

問 行列 A, B が以下の場合に、$AB, BA, \det(A), \det(B), \det(AB), \det(BA)$ を求めよ。

(1)$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$AB =$ 　　　　　　　　　　　　$BA =$

$\det(A) =$ 　　　　　　　　　　$\det(B) =$

$\det(AB) =$ 　　　　　　　　　$\det(BA) =$

(2)$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix}$

$AB =$ 　　　　　　　　　　　　$BA =$

$\det(A) =$ 　　　　　　　　　　$\det(B) =$

$\det(AB) =$ 　　　　　　　　　$\det(BA) =$

＜ 3次の行列式 1 ＞

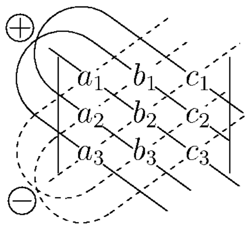
3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

を行列 A の行列式という。上の式の右辺を展開すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

となる。この計算規則を覚えるためには、右図のように考えるとよい。右図では実線はプラスの項であり、点線はマイナスの項である。この方法を**サラスの方法**という。



例

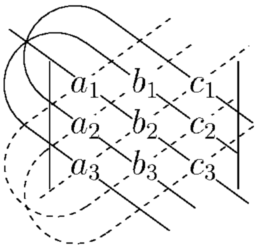
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - 1\times6\times8 - 2\times4\times9 - 3\times5\times7 = 0$$

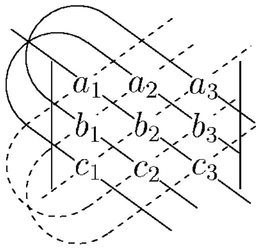
問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

＜ 3次の行列式 2 ＞

サラスの方法において、行列式の行と列を入れかえた行列式を元の行列式と比較すると、





プラスの項（実線）は両方とも $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$ で等しい。同様にマイナスの項（点線）も両方同じであるから、２つの行列式は等しい。従って

[I] 行列式の行と列を入れかえても、行列式の値は同じ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる。行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ （列展開）

を**列展開**という。[I] の性質から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ （行展開）

がなりたつ。この式を**行展開**という。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (-4+3) - 3 \times (-5+2) + 0 = -2 + 9 = 7$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

＜ 3 次の行列式 3 ＞

行列式の 1 列目と 2 列目を入れかえた行列式の値はサラスの公式より

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1a_2c_3 + b_2a_3c_1 + b_3a_1c_2 - b_1a_3c_2 - b_2a_1c_3 - b_3a_2c_1$$

$$= -(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる。従って元の行列式の値にマイナスをつけたものになる。同様にして

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

がわかる。すなわち行列式の 2 つの列を入れ変えると符号が逆になる。

前ページの [I] で行列式の行と列を入れかえても行列式の値は同じであるから、

[II] 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。

がなりたつ。

例 (1) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\left\{1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\right\} = 5$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

＜3次の行列式 4＞

3 次の行列式の展開公式 (サラスの公式) より以下の性質がわかる。

[III] 1つの列（または行）を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。

例 1 k を定数とすると

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

[IV] 分配法則がなりたつ。

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1+d_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2+d_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3+d_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2-a_2') & (b_2-b_2') & (c_2-c_2') \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[V] 2つの列（または行）が一致すれば行列式の値は 0。

例 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

例 4

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+3) & 1 \\ 2 & (2+3) & 1 \\ 3 & (3+3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (4-1) \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\} = -1$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

＜ 3 次の行列式 5 ＞

例 1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1+ka_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2+ka_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3+ka_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

この例より以下の性質が分かる。

> [VI] 一つの列を定数倍して他の列に加える (または引く) ことによって行列式の値は変わらない。また一つの行を定数倍して他の行に加える (または引く) ことによっても行列式の値は変わらない。

例 2

$$\underset{\textcircled{1}\ \textcircled{2}\ \textcircled{3}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & 10 & 20 \end{vmatrix}} = \underset{\textcircled{2}\,-4\times\textcircled{1}}{\begin{vmatrix} 1 & 4-4\times1 & 6 \\ 2 & 7-4\times2 & 15 \\ 3 & 10-4\times3 & 20 \end{vmatrix}} = \underset{\textcircled{1}\qquad\textcircled{3}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 15 \\ 3 & -2 & 20 \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{\textcircled{3}\,-6\times\textcircled{1}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6-6\times1 \\ 2 & -1 & 15-6\times2 \\ 3 & -2 & 20-6\times3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

この例は最初に (2 列)−4×(1 列) をして 2 列目の 1 番目の項を 0 にし、次の (3 列)−6×(1 列) をして 3 列目の 1 番目の項を 0 にし、最後に行展開をして 2 次の行列式の計算に帰着。[VI] の性質を使ってこのように変形することを**基本変形**という。

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 17 & 27 \\ 15 & 35 & 55 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 25 \\ 7 & 3 & 30 \\ 10 & 3 & 28 \end{vmatrix}$

＜ 4 次の行列式 1 ＞

3 次の行列式と同様に、4 次の行列式を列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
（列展開）

で定義する。証明は略すが、3 次の行列式と同様な以下の性質が
4 次の行列式に対しても成立する。

[I] 行列式の行と列を入れかえても行列式の値は同じ。

[II] 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。

[III] 1 つの列 (または行) を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。

[IV] 分配法則が成り立つ。

[V] 2 つの列 (または行) が一致すれば行列式の値は 0。

[VI] 1 つの列 (または行) を定数倍して他の列 (または行) に加える (または引く) ことによって行列式の値は変わらない。

性質 [I] より、4 次の行列式を行展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$
（行展開）

によっても計算できる。

例

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 0 + 3 \times 3 - 0 = 9$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \times 1 = -2$$

(注) (1) は列展開、(2) は行展開によって計算してある。

問 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

(2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 & 8 \\ -2 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 11 & -1 \end{vmatrix} =$

< 4次の行列式 2 >

4次の行列式を実際に計算する場合は、性質 [VI] を使って基本変形し、簡単な形に直す。

例 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2-2\times 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3-2\times 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0-2\times(-1) & -5 \\ 3 & 4 & 7-2\times 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

①②③④　　　③ −2× ①　　　① ④

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4-4\times 1 \\ 2 & 2 & -1 & 6-4\times 2 \\ -1 & 1 & 2 & -5-4\times(-1) \\ 3 & 4 & 1 & 10-4\times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

④ −4× ①

この例では最初に (3 列)−2×(1 列) で 3 列の 1 番目を 0 にし、次に (4 列)−4×(1 列) で 4 列の 1 番目を 0 にし、最後に行展開をして 3 次の行列式の計算に直している。

例 2

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 4 & 3 & 2 & -11 \\ 5 & 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 3 & 2 & -11 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = -55$$

この例では最初に 1 行と 3 行を入れかえ、次に (4 列)−3×(1 列) をしている。

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 & 5 \\ 2 & 11 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} =$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

(7) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

< 高次の行列式 >

4 次の行列式と同様に、5 次の行列式も列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$
$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}$$

（列展開）

によって定義する。6 次以上の行列式も一つ次数の低い行列式による列展開によって同様に定義される。このように定義すると、34 ページの性質 [I]〜[VI] が成り立つ。従って実際に行列式の計算を行うときは、35 ページのように [VI] の性質を使い基本変形によって次数の低い行列式になおして計算する。

問 1 34 ページの行展開と同様にして、5 次の行列式の行展開の式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} =$$

問 2 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

＜2元連立一次方程式 1＞

例 与えられた数 k_1, k_2 に対して、連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x+5y=k_1 \\ x \ \ +4y=k_2 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

をみたす解 x, y を求めたい。27 ページ例 2 より

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+5y & 5 \\ x+4y & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2x+5y \\ 1 & x+4y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots (3)$$

(2) より $x = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3}(4k_1-5k_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3) より $y = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3}(2k_2-k_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

が求まる。このようにして連立方程式 (1) の解を求める方法を
クラメルの方法という。

問 1 与えられた数 $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ は $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ とする。
連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=k_1 \\ a_2x+b_2y=k_2 \end{cases}$$

の解 x, y に対し、例の (2), (3) のように

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} =$$

を x と y で表すことにより、例の (4), (5) のように、解 x, y を
$a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ を用いた行列式で表せ。

$x =$ 　　　　　　　　　　　　$y =$

問 2 問 1 の式を**クラメルの公式**という。次の連立方程式をクラメルの公式で解け。

(1) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ 　　　　　　(2) $\begin{cases} 3x+4y=k_1 \\ 2x+3y \ =k_2 \end{cases}$

＜ 2元連立一次方程式 2 ＞

2 元連立一次方程式で右辺が 0 の場合

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

を考える。もし係数行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば、クラメルの公式より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

より、解は $x = y = 0$ だけである。しかし $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ の場合は $x = y = 0$ 以外にも解がある。

例 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - \ \ 3y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2) \\ 8x - 12y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) \end{cases}$$

を考える。このとき係数行列式は

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$$

になる。(3) 式を 4 で割ると (2) 式と同じ式になる。従って (2) 式をみたす x と y の組は全て (2) と (3) の解である。たとえば

$$x = 3 \quad , \quad y = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

は解である。一般に任意の実数 t に対し

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

は (2)·(3) の解である。逆に (2) と (3) の全ての解は (5) の形をしている。

一般に (1) 式において、$x = y = 0$ 以外の解をもつための必要十分条件は
係数行列式が 0 になることである。

$$\boxed{(1) \text{ 式が } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 以外の解をもつ} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$$

問 次の連立方程式をみたす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求め、(5) 式のように表せ。

(1) $\begin{cases} \ \ x + \ \ 2y = 0 \\ 5x + 10y = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x - \ \ 8y = 0 \\ 6x - 12y = 0 \end{cases}$

＜3元連立一次方程式＞

例 次の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

をみたす解 x, y, z を求めたい。ただし

$$\text{係数行列式} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

をみたすとする。この条件があれば 37 ページと同様に求められる。
3 次の行列式の性質 [III], [IV], [V] (32 ページ) より

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

が求まる。これも**クラメルの公式**という。

問 1 例の場合に (3) 式のように

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

を y と z で表すことにより、(1) の解 y, z を (4) 式のように表せ。

$y =$ $\qquad\qquad$ $z =$

問 2 クラメールの公式を用いて、次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+y-z=3 \\ x-2y-4z=-4 \end{cases}$ $\qquad$ (2) $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-3z=-1 \\ 5y+4z=3 \end{cases}$

$x =$ $\quad$, $y =$ $\quad$, $z =$ $\qquad$ $x =$ $\quad$, $y =$ $\quad$, $z =$

＜単位行列＞

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の成分で、$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}$ を**対角成分**という。n 次の正方行列 A の対角成分以外の成分が全て 0 であるとき、A を n 次の**対角行列**といい、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と略記する。

問 1 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ に対し、積 AB と BA を計算せよ。

$AB =$ 　　　　　　　　　　$BA =$

n 次の対角行列の対角成分が全て 1 である行列を n 次の**単位行列**といい、I で表す。

例 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 2 次の単位行列

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の単位行列

問 2 以下の場合に積 AI と IA を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$ 　　　　　　　　　　$IA =$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$ 　　　　　　　　　　$IA =$