高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001 年度版)

Series A

No. 9

解答

＜ 2 ページ. 回転と正弦波 2 ＞

問の解答

(1) $(x(t)\,,\,y(t)) = (\cos(\omega t)\,,\,\sin(\omega t))$

(2) ω 回転

(3) $\dfrac{2\pi}{\omega}$

＜ 3 ページ. 単振動 1 ＞

問の解答

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\bigl(\omega t + \alpha\bigr) \\ &= r\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

＜ 4 ページ. 単振動 2 ＞

問の解答

(1) 速度 $\dfrac{dy}{dt} = 12\cos(4t)$

加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -48\sin(4t)$

$$= -16 \times 3\sin(4t)$$

$$= -16\,y(t)$$

(2) 速度 $\dfrac{dx}{dt} = -10\sin(5t)$

加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -50\cos(5t)$

$$= -25\,x(t)$$

< 5ページ. 微分方程式 >

問の解答

(1) 1 階微分方程式

(2) 2 階微分方程式

(3) 3 階微分方程式

＜ 6 ページ. 微分方程式の解 1 ＞

問の解答

$y = 3e^t$

$\left(y = \square\, e^t \text{ の形} \right)$

＜ 7ページ. 微分方程式の解 2 ＞

問の解答

(1) $C = 2$, $\underline{y = 2\,e^t}$

(2) $C = -3$, $\underline{y = -3\,e^t}$

(3) $C = 0$, $\underline{y = 0}$

$<$ 8ページ. 微分方程式の解 3 $>$

問 1 の解答

$t = 0$ のとき $y = 2$

問 2 の解答

$y = 3\,e^{-t}$

問 3 の解答

$y = C\,e^{-t}$ 　(C は任意の定数)

＜ 9 ページ. 積分の復習 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle \int e^y \, dy = e^y + C$

(2) $\displaystyle \int \frac{1}{y^2} \, dy = -\frac{1}{y} + C$

(3) $\displaystyle \int \sin y \, dy = -\cos y + C$

(4) $\displaystyle \int \cos y \, dy = \sin y + C$

＜ 10 ページ. 求積法 ＞

問の解答

(1) $y = -5t^2 + 5t + C$

(2) $y = \dfrac{1}{4}t^4 + t^5 + C$

(3) $y = -\dfrac{1}{t} + \log t + C$

(4) $y = -2\cos t + 3\sin t + C$

＜ 11 ページ. 一般解の決定 ＞

問の解答

＜証明＞ $\dfrac{dy}{dt} = y$ の任意の解を y_2 とおく。$y_1 = e^t$, $y = \dfrac{y_2}{y_1}$ とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{(y_1)^2} = \frac{y_2 y_1 - y_2 y_1}{(y_1)^2} = 0 \ \Rightarrow \ y = C \ \Rightarrow \ \frac{y_2}{y_1} = C$$

より $y_2 = Cy_1 = Ce^t$ より $(**)$ の形をしている。

＜ 13 ページ. 変数分離形 2 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 4y \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int 4\,dt \;\Rightarrow\; \log|y| = 4t + C_0$

$\Rightarrow\; y = \pm e^{4t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{4t} = Ce^{4t}$

<u>(答) $y = Ce^{4t}$</u> (C は任意定数)

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -2y \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2\,dt \;\Rightarrow\; \log|y| = -2t + C_0$

$\Rightarrow\; y = \pm e^{-2t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-2t} = Ce^{-2t}$

<u>(答) $y = Ce^{-2t}$</u> (C は任意定数)

(3) $\dfrac{dy}{dt} = ay \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int a\,dt \;\Rightarrow\; \log|y| = at + C_0$

$\Rightarrow\; y = \pm e^{C_0} \times e^{at} = Ce^{at}$

<u>(答) $y = Ce^{at}$</u> (C は任意定数)

＜ 14 ページ. 変数分離形 3 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (2t+1)y \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int (2t+1)\,dt \;\Rightarrow\; \log|y| = t^2 + t + C_0$

$\Rightarrow\; y = \pm e^{t^2+t+C_0} = Ce^{t^2+t}$

(答) $\underline{y = Ce^{t^2+t}}$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 y \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int 3t^2\,dt \;\Rightarrow\; \log|y| = t^3 + C_0$

(答) $\underline{y = Ce^{t^3}}$

< 15 ページ.1 階線形微分方程式 1 >

問 1 の解答

(1) $\dfrac{dy}{dy}+3y=0$

$\Downarrow$

$\dfrac{dy}{dt}=-3y$

$\Downarrow$

$\underline{y=Ce^{-3t}}$

(2) $\dfrac{dy}{dy}-4ty=0$

$\Downarrow$

$\dfrac{dy}{dt}=4ty$

$\Downarrow$

$\underline{y=Ce^{2t^2}}$

(3) $\dfrac{dy}{dy}+6t^2y=0$

$\Downarrow$

$\dfrac{dy}{dt}=-6t^2y$

$\Downarrow$

$\underline{y=Ce^{-2t^3}}$

問 2 の解答

$$\frac{dy}{dt}=-p(t)y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy=\int -p(t)dt$$

$\underline{(答)\ \ y=Ce^{-\int p(t)dt}}$

< 17 ページ.1 階線形微分方程式 3 >

問 1 の解答

(1) $y = -3 + Ce^{2t}$ (2) $y = \dfrac{b}{a} + Ce^{-at}$

＜ 18 ページ.1 階線形微分方程式 4 ＞

問の解答

(1)

$$\begin{aligned} y &= C(t)e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} + 2y &= C'(t)e^{-2t} = e^{3t} \\ C'(t) &= e^{5t} \\ C(t) &= \frac{1}{5}e^{5t} + C \\ y &= \left(\frac{1}{5}e^{5t} + C\right)e^{-2t} \end{aligned}$$

(答) $y = \frac{1}{5}e^{3t} + Ce^{-2t}$

(2)

$$\begin{aligned} y &= C(t)e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} - 2y &= C'(t)e^{2t} = e^{3t} \\ C'(t) &= e^{t} \\ C(t) &= e^{t} + C \\ y &= \left(e^{t} + C\right)e^{2t} \end{aligned}$$

(答) $y = e^{3t} + Ce^{2t}$

＜ 19 ページ.1 階線形微分方程式 5 ＞

問の解答

(1)
$$y = C(t)e^{2t}$$
$$\frac{dy}{dt} - 2y = C'(t)e^{2t} = e^{2t}$$
$$C(t) = t + C$$

(答) $y = (t + C)e^{2t} = te^{2t} + Ce^{2t}$

(2)
$$y = C(t)e^{-3t}$$
$$\frac{dy}{dt} + 3y = C'(t)e^{-3t} = e^{-3t}$$

(答) $y = te^{-3t} + Ce^{-3t}$

(3) (答) $y = te^{at} + Ce^{at}$

＜ 20 ページ.1 階線形微分方程式の一般解 ＞

問 1 の解答

$$y = \left\{ \int q(t)e^{-at}\,dt + C \right\} e^{at} = e^{at} = e^{at}\int q(t)e^{-at}\,dt + Ce^{at}$$

問 2 の解答

$$y = e^{at}\int \underbrace{e^{at}e^{-at}}_{\parallel \atop 1}\,dt + Ce^{at} = te^{at} + Ce^{at}$$

＜ 21 ページ.1 階微分方程式の初期値問題 ＞

問の解答

(1) $y = -4.9t^2 + 10t + C$

$C = 4$

$\underline{y = -4.9t^2 + 10t + 4}$

(2) $y = Ce^{-3t}$

$C = 4$

$\underline{y = 4e^{-3t}}$

(3) $y = \dfrac{9.8}{k} + Ce^{-kt}$

$t = 0 \ \Rightarrow\ y = \dfrac{9.8}{k} + C = 0 \ \Rightarrow\ C = -\dfrac{9.8}{k}$

$\underline{y = \dfrac{9.8}{k} - \dfrac{9.8}{k}e^{-kt} = \dfrac{9.8}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$

(4) $y = -\dfrac{g}{k} + Ce^{-kt}$

$t = 0 \ \Rightarrow\ y = -\dfrac{g}{k} + C = 5 \ \Rightarrow\ C = 5 + \dfrac{g}{k}$

$\underline{y = -\dfrac{g}{k} + \left(5 + \dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}}$

< 22 ページ.1 階微分方程式の応用 1 >

問の解答

(1) $v = -9.8t + C$

$C = 5$

$\underline{v = -9.8t + 5}$

(2) $v = \dfrac{-9.8}{k} + Ce^{-kt}$

$C = 5 + \frac{9.8}{k}$

$$\underline{v = -\frac{9.8}{k} + \left(5 + \frac{9.8}{k}\right) e^{-kt}}$$

＜ 23 ページ.1 階微分方程式の応用 2 ＞

問の解答

$$I=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad , \ \lim_{t\to\infty}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$=\frac{E}{R}$$

< 24 ページ.2 階線形微分方程式 1 >

問の解答

(1) $y'(t) = 8t + C_1 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 5$

$y(t) = 4t^2 + C_1 t + C_2 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2$

(答) $y = 4t^2 + 5t + 2$

(2) $y' = 3t^2 + 2t + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 7$

$y = t^3 + t^2 + C_1 t + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 5$

(答) $y = t^3 + t^2 + 7t + 5$

＜ 25 ページ.2 階線形微分方程式 2 ＞

問の解答

① $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$

$y' = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)$

$y(0) = C_1 = 6$, $y'(0) = 3C_2 = 8$

$\Downarrow$

$C_2 = \dfrac{8}{3}$

(答) $y = 6\cos(3t) + \dfrac{8}{3}\sin(3t)$

② $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$

$y(0) = C_1 = \alpha$, $y'(0) = 3C_2 = \beta$

(答) $y = \alpha\cos(3t) + \dfrac{\beta}{3}\sin(3t)$

＜ 26 ページ.2 階線形同次微分方程式 1 ＞

問の解答

もう一つの基本解は $\sin(2t)$ である

一般解 $\underline{\ y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\ }$

$<$ 27 ページ.2 階線形同次微分方程式 2 $>$

問の解答

もう一つの基本解は e^{5t} である

一般解 $\underline{y = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}}$

< 28 ページ. 微分演算子 D >

問 1 の解答

(1) $Dy + 5y = 0 \;\Rightarrow\; (D+5)\,y = 0$　　(2) $(D^2 - 10D + 25)y = 0$

問 2 の解答

(1) $y = Ce^{2t}$　　(2) $y = Ce^{at}$

(3) $y = te^{2t} + Ce^{2t}$　　(4) $y = te^{at} + Ce^{at}$

＜ 29 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 ＞

問 1 の解答

(1) $4e^{2t} - 5 \times 2e^{2t} + 6 \times e^{2t} = (\,4 - 10 + 6\,)e^{2t} = 0$

(2) $9e^{3t} - 5 \times 3e^{3t} + 6 \times e^{3t} = (\,9 - 15 + 6\,)e^{3t} = 0$

問 2 の解答

(1) $\left(D^2 - 2D - 3\right) y = 0$

$(D-3)(D+1)y = 0$

$\underline{y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}}$

(2) $\left(D^2 + D - 6\right) y = 0$

$(D-2)(D+3)y = 0$

$\underline{y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}}$

< 30 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 >

問の解答

(1) $(D-4)(D-4)y=0$

$\underline{y = C_1e^{4t} + C_2te^{4t}}$

(2) $(D-5)(D-5)y=0$

$\underline{y = C_1e^{5t} + C_2te^{5t}}$

(3) $(D+2)(D+2)y=0$

$\underline{y = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}}$

(4) $(D-\alpha)(D-\alpha)y=0$

$\underline{y = C_1e^{\alpha t} + C_2te^{\alpha t}}$

< 31 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 3 >

問 1 の解答

$Z_1 + Z_2 = C_1$, $i(Z_1 - Z_2) = i \times (-C_2 i) = C_2$ より

$$y = (Z_1 + Z_2)\cos(3t) + i(Z_1 - Z_2)\sin(3t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$$

問 2 の解答

(1) $(D^2 + 16)y = 0$

$\underline{y = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)}$

(2) $(D^2 + \omega^2)y = 0$

$\underline{y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}$

＜ 32 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 ＞

問 1 の解答

(1) 0　　(2) 0

問 2 の解答

$Z_1 + Z_2 = C_1$, $i(Z_1 - Z_2) = i \times (-C_2 i) = C_2$ より

$$y = (Z_1 + Z_2)\, e^{-2t}\cos(15t) + i(Z_1 - Z_2)e^{-2t}\sin(15t) = C_1 e^{-2t}\cos(15t) + C_2 e^{-2t}\sin(15t)$$

問 3 の解答

(1) $D^2 + 4D + 13 = 0$

$$\Downarrow$$

$D = -2 \pm 3i$

<u>(答) $y = C_1 e^{-2t}\cos(3\,t) + C_2 e^{-2t}\sin(3\,t)$</u>

(2) $D^2 - 2D + 6 = 0$

$$\Downarrow$$

$D = 1 \pm \sqrt{5}i$

<u>(答) $y = C_1 e^{t}\cos(\sqrt{5}\,t) + C_2 e^{t}\sin(\sqrt{5}\,t)$</u>

< 33 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 5 >

問の解答

(1) $(D^2-4D-5)y=0$

$(D-5)(D+1)y=0$

$\underline{y=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}}$

(2) $(D^2+8D+16)y=0$

$(D+4)^2y=0$

$\underline{y=C_1e^{-4t}+C_2te^{-4t}}$

(3) $(D^2+5^2)y=0$

$\underline{y=C_1\cos(5t)+C_2\sin(5t)}$

(4) $D^2-6D+14=0$

$D=3\pm\sqrt{5}i$

$\underline{y=C_1e^{3t}\cos(\sqrt{5}t)+C_2e^{3t}\sin(\sqrt{5}t)}$

＜ 34 ページ. 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 ＞

問の解答

(1) $D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2)$

$$\underline{y = -\frac{5}{2} + C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t}}$$

(2) $D^2 - 3D - 4 = (D-4)(D+1)$

$$\underline{y = -\frac{7}{4} + C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}}$$

(3) $\underline{y = 2 + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}}$

(4) $\underline{y = \dfrac{9}{16} + C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)}$

< 35 ページ. 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 2 >

問の解答

$$\underline{y = -\frac{r}{2\omega} t\cos(\omega t) + C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}$$

＜ 36 ページ.2 階微分方程式の初期値問題 ＞

問の解答

(1)
$$y = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$
$$y' = 3C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 3C_1 - C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{2} \\ C_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

(答) $y = \dfrac{3}{2}e^{3t} + \dfrac{5}{2}e^{-t}$

(2)
$$y = C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t}$$
$$y' = -2C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t} - 2C_2te^{-2t}$$
$$\begin{cases} y\,(0) = C_1 = 5 \\ y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 10 \end{cases}$$

(答) $y = 5e^{-2t} + 10te^{-2t}$

(3)
$$y = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)$$
$$y' = -4C_1\sin(4t) + 4C_2\cos(4t)$$
$$\begin{cases} y\,(0) = C_1 = 3 \\ y'(0) = 4C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(答) $y = 3\cos(4t) + \dfrac{1}{2}\sin(4t)$

(4)
$$y = C_1e^{-2t}\cos(3t) + C_2e^{-2t}\sin(3t)$$
$$y' = -2C_1e^{-2t}\cos(3t) - 3C_1e^{-2t}\sin(3t)$$
$$-2C_2e^{-2t}\sin(3t) + 3C_2e^{-2t}\cos(3t)$$
$$\begin{cases} y\,(0) = C_1 = 4 \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

(答) $y = 4e^{-2t}\cos(3t) + \dfrac{8}{3}e^{-2t}\sin(3t)$

< 37 ページ.2 階微分方程式の応用 1 >

問の解答

(1) $a = 0$, $b = 0$, $F = -9.8$ (2) $a = k$, $b = 0$, $F = -9.8$

< 38 ページ.2 階微分方程式の応用 2 >

問の解答

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}I = \dfrac{E}{L} \\ t = 0 \text{ のとき } I = 0 \end{cases} \Rightarrow\ I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{dq}{dt}\ \Rightarrow\ q = \frac{E}{R}t + \frac{LE}{R^2}e^{-\frac{R}{L}t} + C$$

$$q(0) = 0 + \frac{LE}{R^2} + C = 0\ \Rightarrow\ C = -\frac{LE}{R^2}$$

(答) $q = \dfrac{E}{R}t + \dfrac{LE}{R^2}e^{-\frac{R}{L}t} - \dfrac{LE}{R^2}$

＜ 39 ページ.2 階微分方程式の応用 3 ＞

問の解答

$$\Rightarrow\ y = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} \quad , \quad y' = -C_1e^{-t} - 3C_2^{-3t}$$

$$\begin{cases} y\ (0) = C_1 + C_2 = r \\ y'(0) = -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{2}r \\ C_2 = -\dfrac{r}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \underline{y = \frac{3r}{2}e^{-t} - \frac{r}{2}e^{-3t}}$$

< 40 ページ.2 階微分方程式の応用 4 >

問の解答

$$\lim_{\beta\to\omega}\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}\bigl(-r\beta\sin(\omega t)+r\omega\sin(\beta t)\bigr)}{\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\omega^3-\beta^2\omega\right)}=\lim_{\beta\to\omega}\frac{-r\sin(\omega t)+r\omega t\cos(\beta t)}{-2\beta\omega}$$

$$=\frac{-r\sin(\omega t)+r\omega t\cos(\omega t)}{-2\omega^2}=\underline{\frac{r}{2\omega^2}\sin(\omega t)-\frac{r}{2\omega}t\cos(\omega t)}$$