高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2001年度版）

Series **A**

$No.$ **9**

内容

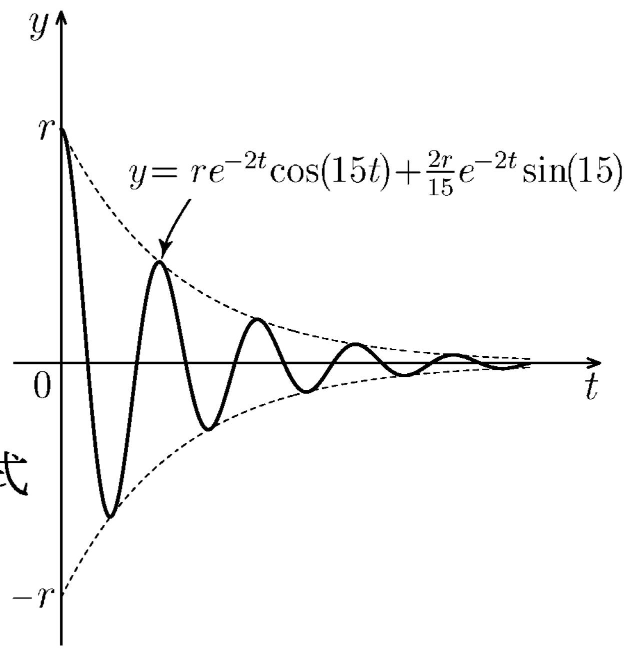
◎　微分方程式と解

◎　変数分離形

◎　1階線形微分方程式

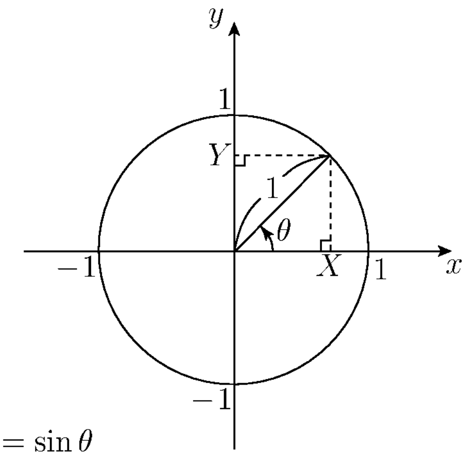
◎　定数係数2階微分方程式

◎　微分方程式の応用



電子・光システム工学科
井上　昌昭　著

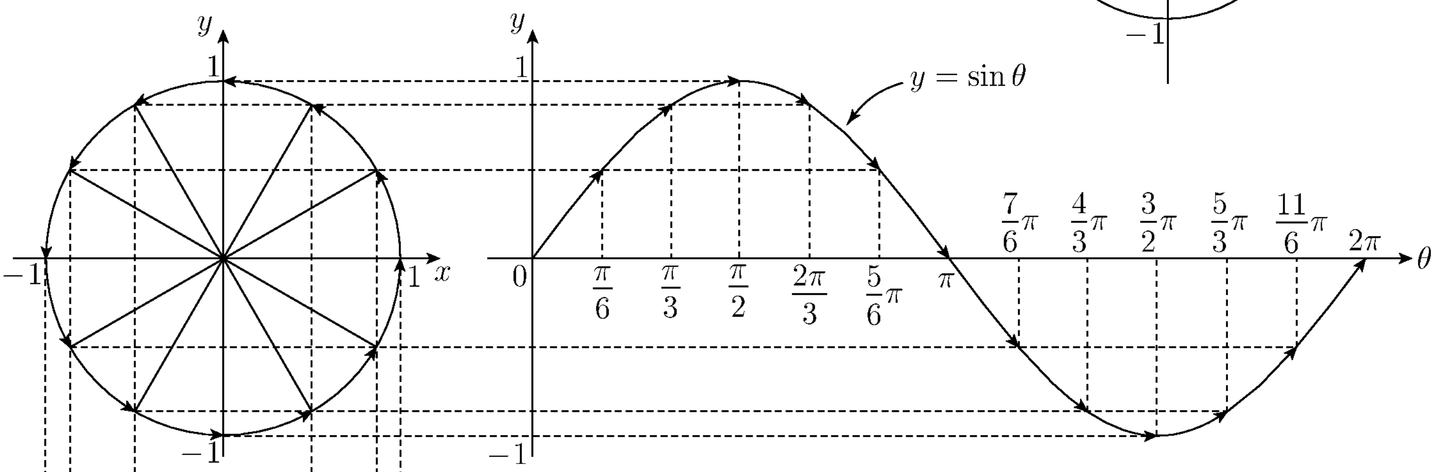
＜ 回転と正弦波 1 ＞

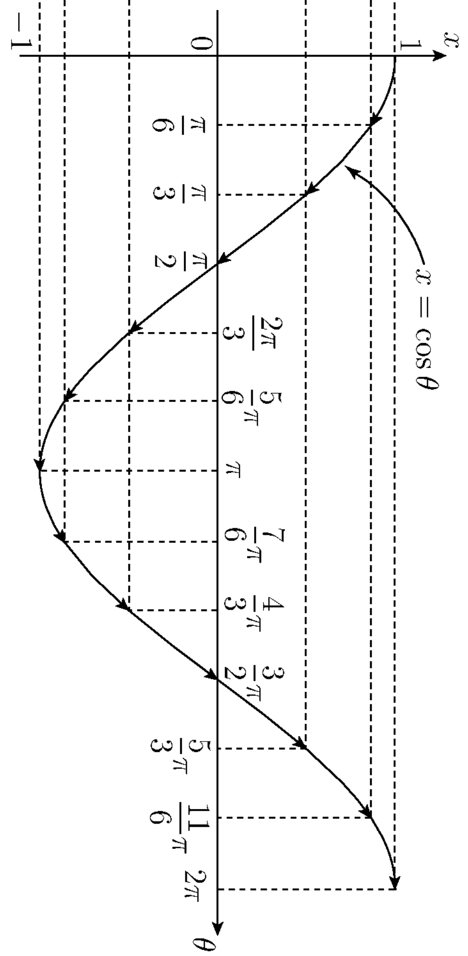


右図の場合に三角関数の定義より

$$\cos\theta = X \quad , \quad \sin\theta = Y$$

である。このことを利用して $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の
$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲の) グラフが以下のように描ける。





角度 θ は $0(=0^\circ)$ から出発して、$\dfrac{\pi}{6}(=30^\circ)$ ごとに

$$0 \to \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2} \to \frac{2\pi}{3} \to \frac{5}{6}\pi \to \pi$$

$$\to \frac{7}{6}\pi \to \frac{4}{3}\pi \to \frac{3}{2}\pi \to \frac{5}{3}\pi \to \frac{11}{6}\pi \to 2\pi$$

と大きくなっていく。それに対応して円周上の点の y 座標をとっていくと

$$y = \sin\theta$$

のグラフができる。また x 座標を左のようにとっていくと

$$x = \cos\theta$$

のグラフができる。

（このことから sin や cos のグラフは、円周上の点の回転運動の y 座標 (高さ) または x 座標 (水平位置) のグラフであることがわかる。）

＜回転と正弦波 2＞

円周上の回転運動の y 座標は前ページより sin のグラフになる。ここでは回転の速さを考える。

例 1

前ページ例 1 の場合

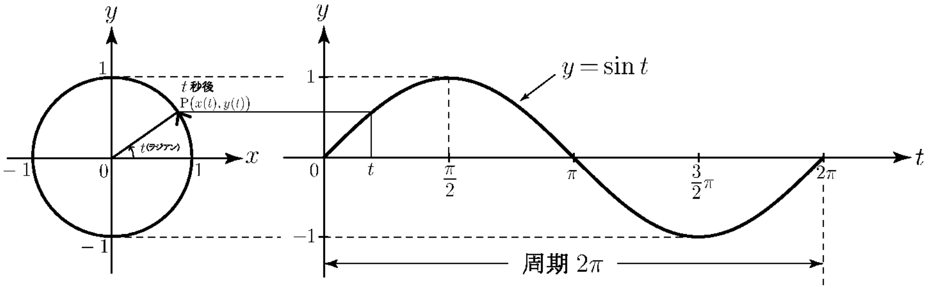
$\boxed{\text{角速度が } 1(\mathrm{rad/s})}$

であり t 秒後の位置が

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)}$

である。これは 2π 秒 ($\fallingdotseq 6.28$ 秒) 間に 1 回転する回転運動であり、

その y 座標のグラフ ($y = \sin t$) は周期 2π の正弦波である。



例 2

例 1 と同じ円周上の

回転運動で、2 倍の速さ

$\boxed{\text{角速度が } 2(\mathrm{rad/s})}$

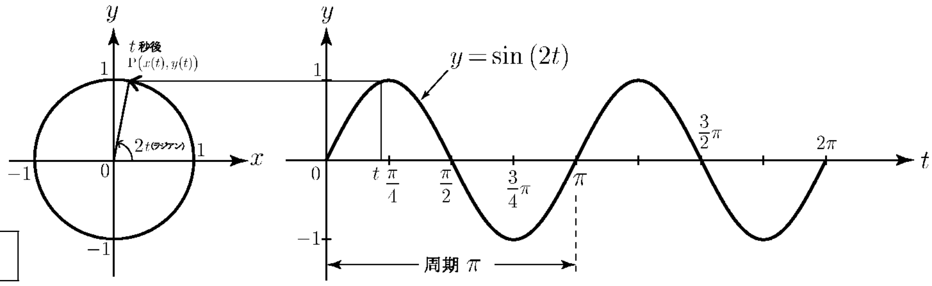
のとき t 秒後の位置は

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos(2t), \sin(2t)\big)}$

である。これは 2π ($\fallingdotseq 6.28$ 秒)

間に 2 回転する回転運動であり、

その y 座標のグラフ $\big(y = \sin(2t)\big)$ は周期 π の正弦波である。



例 3

例 1 と同じ円周上の

回転運動で、3 倍の速さ

$\boxed{\text{角速度が } 3(\mathrm{rad/s})}$

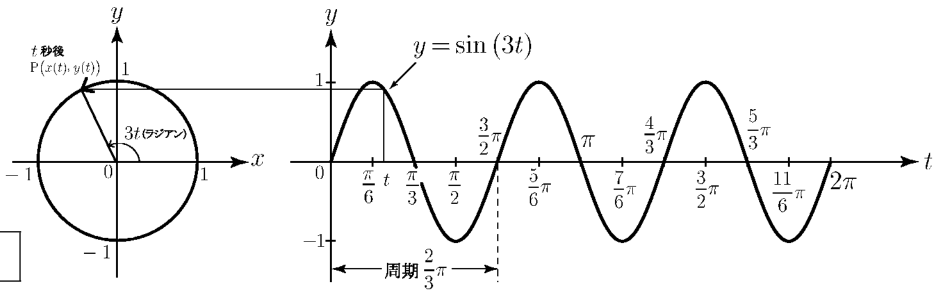
のとき t 秒後の位置は

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos(3t), \sin(3t)\big)}$

である。これは 2π 秒間に

3 回転する回転運動であり、

その y 座標のグラフ $\big(y = \sin(3t)\big)$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の正弦波である。



問 ω(オメガ) を正の定数とする。上の例と同じ回転運動で、ω 倍の速さ、つまり

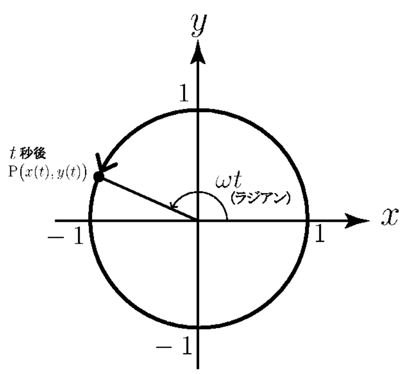
$\boxed{\text{角速度が } \omega(\mathrm{rad/s})}$

のとき

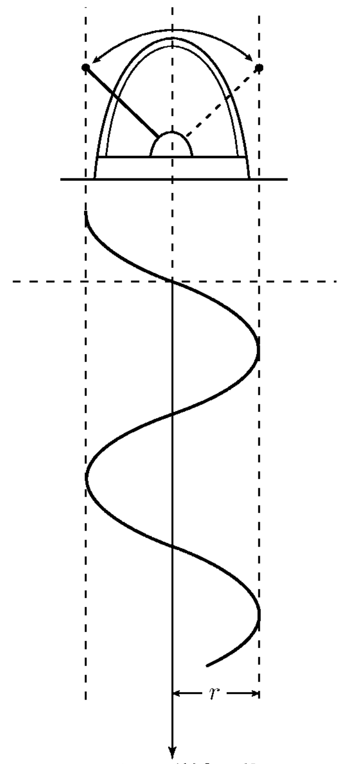
(1) t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ を求めよ。

(2) 2π 秒間で何回転するか。

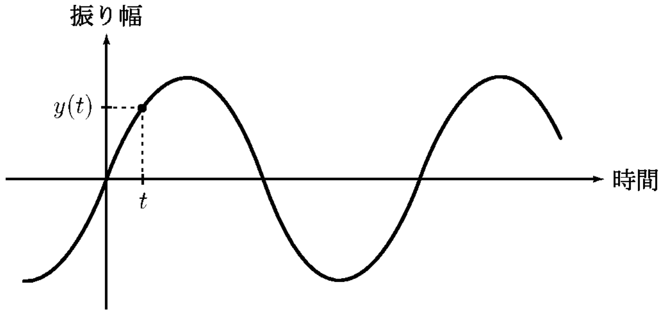
(3) y 座標のグラフの周期を求めよ。



< 単振動 1 >



振り子の振動は一定の周期で、同じ動作を繰り返している。右にあるようにメトロノームの振り子を左端まで持って放すと、その軌道は下に書いた線のようになることがイメージできるだろう。この線を左に 90° 回軸させると下の図のように sin のグラフになる。

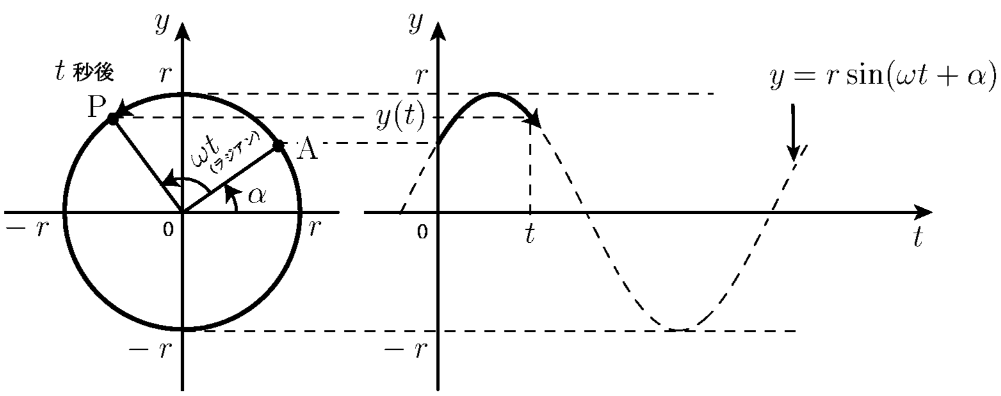


このように往復運動が正弦波で表される場合に、この運動を**単振動**という。

$$\boxed{y(t) = r\sin(\omega t + \alpha)}$$

と書くことができるとき、この式で運動を単振動という。ここで r は振幅 (振りの大きさ)、 ω は振りの速さ (角速度)、 α は初期位相といい、次の例の初期角度を意味する。

例



上図の点 A から出発し、半径 r の円周を角速度 ω で回転する点 P の t 秒後の y 座標が $y(t) = r\sin(\omega t + \alpha)$ である。

問 上の例で t 秒後の点 P の x 座標は $x(t) = r\cos(\omega t + \alpha)$ となる。$x(t)$ を sin を使って表せ。ただし $\cos(\square) = \sin\left(\square + \dfrac{\pi}{2}\right)$ を使ってよい。

＜ 単振動 2 ＞

直線上の運動で時刻 t における位置が $r\sin(\omega t+\alpha)$ で表されるとき、その運動を単振動という。ここで r は振幅 (振りの大きさ)、 ω は振りの速さ (角速度)、 α は初期位相である。前ページの結果より

$$r\cos(\omega t+\alpha)=r\sin\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから $r\cos(\omega t+\alpha)$ もまた単振動である。このページでは単振動の速度および加速度を考える。

例 1 $y(t)=5\sin(2t)$ について速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ は

速度: $v(t)=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\big(5\sin(2t)\big)=5\times\big(\sin(2t)\big)'=5\times 2\cos(2t)=10\cos(2t)$

加速度: $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}\big(10\cos(2t)\big)=10\times\big(\cos(2t)\big)'=10\times\big(-2\sin(2t)\big)=-20\sin(2t)$

ここで加速度は位置 $y(t)$ を 2 階微分したものだから

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=a(t)=-20\sin(2t)=-4\times 5\sin(2t)=-4y(t)\quad(=-4\times 位置)$$

が成り立つ。

例 2 $x(t)=4\cos(3t)$ について速度 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}$ と加速度 $a(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ は

速度: $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\big(4\cos(3t)\big)=4\times\big(\cos(3t)\big)'=4\times\big(-3\sin(3t)\big)=-12\sin(3t)$

加速度: $a(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\big(-12\sin(3t)\big)=-12\times\big(3\cos(3t)\big)=-36\cos(3t)$

ここで $x(t)=4\cos(3t)$ だから加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-36\cos(3t)=-9\times 4\cos(3t)=-9x(t)\quad(=-9\times 位置)$$

と表される。

問 以下の単振動の速度、加速度を求め、例のように加速度を位置で表せ。

(1) $y(t)=3\sin(4t)$

速度 $\dfrac{dy}{dt}=$

加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=$

(2) $x(t)=2\cos(5t)$

速度 $\dfrac{dx}{dt}=$

加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=$

< 微分方程式 >

微分方程式 (differential equation) とは独立変数とその未知関数および未知関数の導関数を含む方程式のことである。簡単にいえば微分 (導関数) を含む方程式である。たとえば変数 t の関数 y に関する微分方程式の例として

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6$　　(ワークブック Ser. **A** , $No.$ **8** P32 より)

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 2ty$

(3) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$

等がある。これらは全て 1 階導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を含む微分方程式なので **1 階微分方程式**という。これに対し、2 階導関数を含む微分方程式の例として

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9.8$　　(ワークブック Ser. **A** , $No.$ **8** P37 例 2 より)

(5) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4y$　　(前ページ例 1 より)

(6) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 3t$

等がある。(4)〜(6) の例のように 2 階導関数 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を含み、3 階以上の導関数を含まない微分方程式を **2 階微分方程式**という。一般に n 階導関数を含み、$n+1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を **n 階微分方程式**という。

問　次の微分方程式は何階微分方程式か?

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y$

(3) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + t^4 = 0$

＜ 微分方程式の解 1 ＞

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**という。

例　独立変数 t, 未知関数 y に関する 1 階微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。今

$$(1)\quad \boxed{y = e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t = y$$

より関数 (1) は微分方程式 $(*)$ の解である。微分係数 $y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = e^t$ は $y = e^t$ のグラフの「接線の傾き」を意味するから

$t = 0$　のとき　接線の傾き $= y'(0) = e^0 = 1$

$t = 1$　のとき　接線の傾き $= y'(1) = e^1 = e$

$t = 2$　のとき　接線の傾き $= y'(2) = e^2$

となる (図 1 参照)。　実は微分方程式 $(*)$ の解は (1) だけではない。

$$(2)\quad \boxed{y = 2e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2e^t) = 2e^t = y$$

より関数 (2) も微分方程式 $(*)$ の解である。

$y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = 2e^t$ より

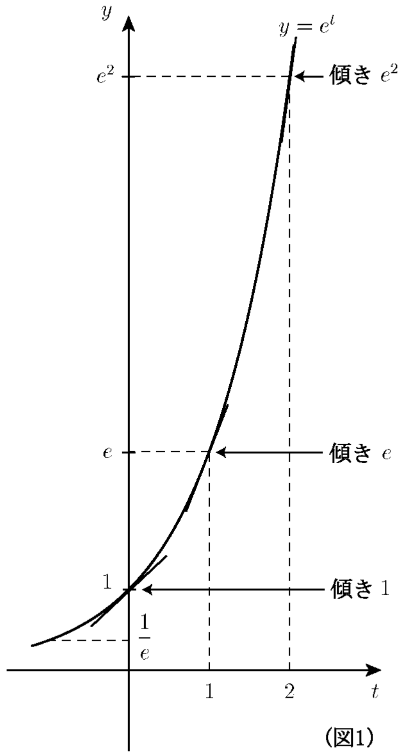
$t = 0$　のとき　接線の傾き $= y'(0) = 2e^0 = 2$

$t = 1$　のとき　接線の傾き $= y'(1) = 2e^1 = 2e$

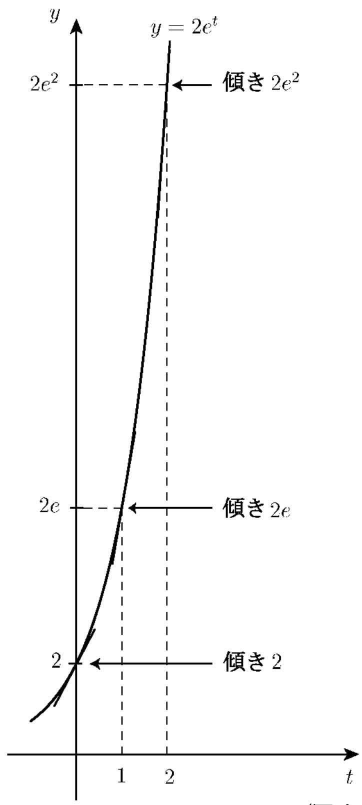
$t = 2$　のとき　接線の傾き $= y'(2) = 2e^2$

となる (図 2 参照)。

問　上の例の微分方程式 $(*)$ の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。



(図1)



(図2)

< 微分方程式の解 2 >

例 前ページの例の微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。前ページより $y = e^t$ および $y = 2e^t$ は $(*)$ の解であった。

それ以外に

$$y = 3e^t\ ,\ y = 4e^t\ ,\ \cdots\ ,\ y = -e^t\ ,\ y = -2e^t\ ,\ \cdots$$
$$y = \frac{1}{2}e^t\ ,\ y = \frac{1}{3}e^t\ ,\ \cdots\ ,\ y = -\frac{1}{2}e^t\ ,\ y = -\frac{1}{3}e^t\ ,\ \cdots$$

等もすべて $(*)$ の解である。これらの関数の 1 つ 1 つを微分方程式 $(*)$ の**特殊解**という。

一方、微分方程式 $(*)$ の全ての解 (特殊解の全体) は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^t} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

の形をしている。このような任意定数 C を含む関数 $(**)$ を微分方程式 $(*)$ の**一般解**という。

特殊解は一般解の C に具体的な値を与えた関数である。

$C = 1$ のとき $y = e^t$ $\cdots$ 前ページの関数 (1)

$C = 2$ のとき $y = 2e^t$ $\cdots$ 前ページの関数 (2)

これらは全て特殊解である。

一般解 $(**)$ の定数 C が定まるような条件として例えば

$$(***) \quad \boxed{t = 0 \text{ のとき } y = 1}$$

という条件があれば C が定まる。$(**)$ と $(***)$ より

$$t = 0 \text{ のとき } y = Ce^0 = C \quad \text{より} \quad \underline{C = 1}$$

となって特殊解 $\underline{y = e^t}$ が決まる。$(***)$ のような条件を**初期条件**という。t は時刻 (時間) を表す変数であるから、「$t = 0$ は時刻 0 のとき」という意味で初期条件という。グラフで考えると、前ページ図 1 の y 切片 (y 軸との交点) を意味する。

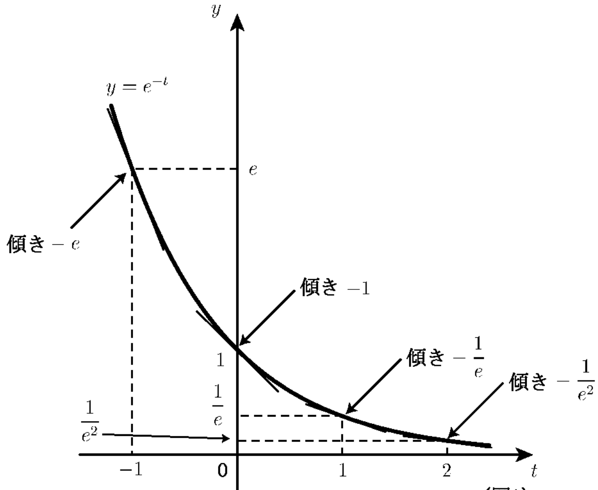
問 例の一般解 $(**)$ に対し、以下の初期条件を満たす C を求め、特殊解 y を決定せよ。

(1) $t = 0$ のとき $y = 2$

(2) $t = 0$ のとき $y = -3$

(3) $t = 0$ のとき $y = 0$

＜微分方程式の解3＞



(図1)

例　微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。今

$$(1)\quad \boxed{y = e^{-t}}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^{-t} = -e^{-t} = -y$$

より微分方程式 $(*)$ をみたす。すなわち

関数 (1) は微分方程式 $(*)$ の特殊解である。

(1) の導関数を $y'(t)$ とすると

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

より

$$t = 0 \text{ のときの接線の傾き} = y'(0) = -e^{-0} = -1$$

$$t = 1 \text{ のときの接線の傾き} = y'(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$t = 2 \text{ のときの接線の傾き} = y'(2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$

となる (図 1 参照)。このグラフは $t \to \infty$ のとき ($e^t \to \infty$ より)$e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ は 0 に限りなく近づく。すなわち

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0}$$

である。この極限は後でよく用いるので、ここで書いておいた。

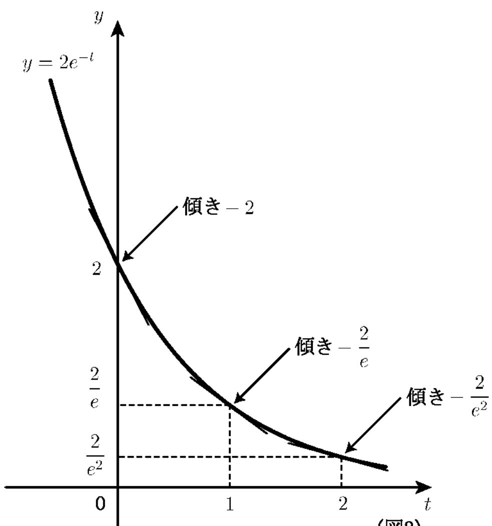
微分方程式 $(*)$ の特殊解は関数 (1) だけではない。

$$(2)\quad \boxed{y = 2e^{-t}}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}2e^{-t} = -2e^{-t} = -y$$

より微分方程式 $(*)$ を満たす。関数 (2) のグラフは図 2 のようになる。



(図2)

(注)　関数 (1) は初期条件

$$(1)'\quad \boxed{t = 0 \text{ のとき } y = 1}$$

を満たす $(*)$ の解である。

問 1　(注) のように関数 (2) のみたす初期条件を書け。

問 2　上の微分方程式 $(*)$ の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。

問 3　上の微分方程式 $(*)$ の一般解を類推せよ。

< 積分の復習 >

< 微分の公式 >

(1) $\dfrac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$, (2) $\dfrac{d}{dt}(\log|t|) = \dfrac{1}{t}$ (ただし $\log\square = \log_e\square$ は自然対数)

(3) $\dfrac{d}{dt}e^t = e^t$, (4) $\dfrac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$, (5) $\dfrac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

< 積分の公式 >

(1) $\displaystyle\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$, (2) $\displaystyle\int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$

(3) $\displaystyle\int e^t dt = e^t + C$, (4) $\displaystyle\int \cos t dt = \sin t + C$, (5) $\displaystyle\int \sin t dt = -\cos t + C$

< 置換積分 >

$$\boxed{\int \square \frac{dy}{dt}dt = \int \square dy}$$

例 (1) $\displaystyle\int y^n \frac{dy}{dt}dt = \int y^n dy = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int \frac{1}{y}dy = \log|y| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dy}{dt}dt = \int dy = y + C$

(注) $\dfrac{dy}{dt}dt = dy$ と考えてよい。

問 例のようにして次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^y \frac{dy}{dt}dt =$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}dt =$

(3) $\displaystyle\int \sin y \frac{dy}{dt}dt =$

(4) $\displaystyle\int \cos y \frac{dy}{dt}dt =$

＜ 求積法 ＞

微分方程式の一般解を求めることを「**微分方程式を解く**」という。
このページでは次の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{t\text{ だけの式}}$$

を考える。この形の微分方程式は 1 回積分することによって解くことができる。

例 1 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (-9.8t + 19.6)dt = -4.9t^2 + 19.6t + C$$

より (1) の一般解は

$$\text{一般解}: \boxed{y = -4.9t^2 + 19.6t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 2 微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = t^2 - e^t + \cos t}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (t^2 - e^t + \cos t)dt = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C$$

より (2) の一般解は

$$\text{一般解}: \boxed{y = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 1,2 のように積分することによって微分方程式を解く方法を**求積法**という。

問 次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -10t + 5$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = t^3 + 5t^4$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t}$

(4) $\dfrac{dy}{dt} = 2\sin t + 3\cos t$

＜一般解の決定＞

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ならば} \quad y = C \quad (C \text{ は定数})}$

とある。この定理を使うと 1 階微分方程式の一般解の形が決定できる。

例 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。8 ページより $(*)$ の一般解は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であると類推できる。$(**)$ が $(*)$ の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{-t}) = C \times \frac{d}{dt}(e^{-t}) = C \times (-e^{-t}) = -Ce^{-t} = -y$$

よりわかる。実は

「**$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない**」

ことが証明できる。

＜証明＞ $y_1 = e^{-t}$ とする。$(*)$ の任意の解を y_2 とすると $(*)$ 式を満たすので

$$(1) \quad {y_1}' = -y_1 \quad , \quad {y_2}' = -y_2$$

が成り立つ (ここで t に関する導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を y' と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、分数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{{y_2}' \times y_1 - y_2 \times {y_1}'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(-y_2) \times y_1 - y_2 \times (-y_1)}{(y_1)^2} = \frac{-y_2 y_1 + y_2 y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となり定理から y が定数 C になるので

$$y = C \Longrightarrow \frac{y_2}{y_1} = C \Longrightarrow y_2 = Cy_1 = Ce^{-t}$$

より $(*)$ の任意の解 y_2 が $(**)$ の形をしていることがわかった。(証明終)

問 微分方程式 $(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$ の一般解は 7 ページより $(**)$ $\boxed{y = Ce^{t}}$ (C は定数) となる。「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」ことを証明せよ。

< 変数分離形 1 >

例 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は前ページより

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であった。この一般解の見つけ方は以下のようにする。

< 一般解の求め方 >

$(*)$ の両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を t で微分する。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt &= \int (-1)dt \\
&\Downarrow \qquad\qquad \text{置換積分 (9 ページ参照)} \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int (-1)dt \\
&\Downarrow \\
\log|y| + C_1 &= -t + C_2 \qquad (C_1,\ C_2 \text{ 任意定数}) \\
&\Downarrow \\
\log|y| &= -t + C_0 \qquad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1) \\
&\Downarrow \\
|y| &= e^{-t+C_0} \\
&\Downarrow \\
y &= \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t} \\
&\Downarrow \\
(**) \quad &\boxed{y = Ce^{-t}} \qquad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0})
\end{aligned}
$$

ここで C_0 がどんな数でも e^{C_0} は 0 ゼロ にならないから $C \neq 0$ である。一方 $(**)$ 式で $C = 0$ のとき $y = 0$ となるが、$y = 0$ は $(*)$ の解であるから $C = 0$ を含めて $(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = Ce^{-t}} \quad (\boldsymbol{C} \text{ **は任意定数**})$$

< 変数分離形 2 >

例題 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 3y}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページの方法で求める。まず (∗) の両辺を y で割り, t で積分する。。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} &= 3 \\
&\Downarrow \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt &= \int 3dt \\
&\Downarrow \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int 3dt \\
&\Downarrow \\
\log|y| &= 3t + C_0 \qquad (C_0\text{は任意定数}) \\
&\Downarrow \\
|y| &= e^{3t+C_0} \\
&\Downarrow \\
y &= \pm e^{3t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{3t} \\
&\Downarrow \\
(**) \quad &\boxed{y = Ce^{3t}} \qquad (C = \pm e^{C_0})
\end{aligned}$$

ここで $C = \pm e^{C_0} \neq 0$ であるが前ページと同様な理由で $C = 0$ でもよいから、(∗) の一般解は

(答) $\boldsymbol{y = Ce^{3t}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 4y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -2y$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = ay$

＜ 変数分離形 3 ＞

例題 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 2ty}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページと同じ方法で求める。まず両辺を y で割り, t で積分する。。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 2t$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int 2tdt$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2tdt$$
$$\Downarrow$$
$$\log|y| = t^2 + C_0 \qquad (C_0\text{は任意定数})$$
$$\Downarrow$$
$$|y| = e^{t^2+C_0}$$
$$\Downarrow$$
$$y = \pm e^{t^2+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{t^2}$$
$$\Downarrow$$
$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{t^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

ここで $C = \pm e^{C_0} \neq 0$ であるが、$(**)$ 式で $C = 0$ の場合は $y = 0$ となり、$y = 0$ は $(**)$ の解であるから、$C = 0$ も含めて $(*)$ の一般解は

(答) $\boldsymbol{y = Ce^{t^2}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

(注) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (t\text{ の関数}) \times (y\text{ の関数})}$ の形の微分方程式を**変数分離形**といい、例題を同じやり方で解ける。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (2t+1)y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2y$

＜ 1 階線形微分方程式 1 ＞

t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ が与えられたとき、未知関数 y に関する次の形の微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+p(t)y=q(t)}$$

を **1 階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 y とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ に関する一次式であることを意味する。(y^3 や $(\frac{dy}{dt})^2$ などのある微分方程式は非線形という。) 特に $q(t)=0$ のとき

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+p(t)y=0}$$

の形の微分方程式を **1 階線形同次微分方程式**という。

例 同次微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dt}+2ty=0}$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt}=-2ty$$

となり変数分離形になるので、前ページと同様にして

$$\int\frac{1}{y}dy=\int(-2t)dt$$

より一般解は

一般解 ： $\boldsymbol{y=Ce^{-t^2}}$ **(C は任意定数)**

問 1 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt}+3y=0$ (2) $\dfrac{dy}{dt}-4ty=0$ (3) $\dfrac{dy}{dt}+6t^2y=0$

問 2 同次微分方程式 $\boxed{\dfrac{dy}{dt}+p(t)y=0}$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(t)dt$ を用いて表せ。

＜ 1 階線形微分方程式 2 ＞

前ページより同次微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-\int p(t)dt}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない。」ことが 11 ページと同様にして証明できる (証明は省略)。

例 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 5}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{5}{3}$$

とおくと、y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 = 0 + 3 \times \dfrac{5}{3} = 5$ となり (1) 式を満たす。
すなわち y_1 は (1) の解の 1 つである。(1) に対し、同次微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を y_0 とすると、上の公式 $(**)$ より

$$y_0 = Ce^{-3t} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y = y_1 + y_0 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right) + 3\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right)$$
$$= 0 - 3Ce^{-3t} + 5 + 3Ce^{-3t} = 5$$

より y は (1) 式をみたす。実は (1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解} : \boxed{y = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。すなわち「(1) の解は全て $\dfrac{5}{3} + Ce^{-3t}$ の形をしている」ことが証明できる。

＜証明＞ (1) の任意の解を y_2 とすると $y_2{}' + 3y_2 = 5$ である。今

$$w = y_2 - \frac{5}{3}$$

とおくと

$$w' + 3w = \left(y_2 - \frac{5}{3}\right)' + 3\left(y_2 - \frac{5}{3}\right) = y_2{}' + 3y_2 - 5 = 5 - 5 = 0$$

より w は (2) の解だから

$$w = Ce^{-3t} \implies y_2 - \frac{5}{3} = Ce^{-3t} \implies y_2 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \qquad (\text{証明終})$$

＜ 1 階線形微分方程式 3 ＞

前ページの議論を一般化すると以下のようになる。

1 階線形微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$

の解の 1 つが分かった場合、その解を y_1 とする。

次に同次微分方程式

(2) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$

の一般解を

(2) の一般解 : $\boxed{y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}}$ (C は任意定数)

とすると、(1) の一般解は

(1) の一般解 : $\boxed{y = y_1 + y_0 = y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}}$ (C は任意定数)

となる。すなわち「(1) の解は全て $y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}$ の形をしている」ことが前ページと同様に証明できる (証明略)。

例 微分方程式

(3) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + 5y = 8}$

の一般解を求めたい。

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

とおくと、y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 5y_1 = 0 + 5 \times \dfrac{8}{5} = 8$ より (1) の解である。

ここで同次微分方程式

(4) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0}$

の一般解は

$\boxed{y_0 = Ce^{-5t}}$ (C は任意定数)

だから (3) の一般解は

(3) の一般解 : $\boxed{y = y_1 + y_0 = \dfrac{8}{5} + Ce^{-5t}}$ (C は任意定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a \neq 0$)

(1) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = 6$

(2) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

< 1階線形微分方程式 4 >

例 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{1}{7}e^{4t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} + 3y_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right) + 3\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right) = \frac{4}{7}e^{4t} + \frac{3}{7}e^{4t} = e^{4t}$$

より y_1 は (1) の解である。同次方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を

$$(**) \quad \boxed{y_0 = Ce^{-3t}}$$

とおくと (1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解 } : \underline{y = y_1 + y_0 = \frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t} \quad (C \text{ は任意定数})}$$

< 別解 > ((1) の解 y_1 も自動的に求まる方法)

Step1 同次方程式 (2) の一般解 (**) の定数 C を関数 $C(t)$ におきかえる

$$(3) \quad \boxed{y = C(t)e^{-3t}}$$

とおく。

Step2 (3) を (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + 3y &= \left(C(t)e^{-3t}\right)' + 3\left(C(t)e^{-3t}\right) \\ &= C'(t)e^{-3t} - 3C(t)e^{-3t} + 3C(t)e^{-3t} \\ &= C'(t)e^{-3t}\end{aligned}$$

積の微分
$(\square \times \triangle)' = \square' \times \triangle + \square \times \triangle'$

(1) より

$$C'(t)e^{-3t} = e^{4t}$$

$$\Downarrow \quad \text{両辺に } e^{3t} \text{ をかける}$$

$$C'(t) = e^{7t}$$

$$\Downarrow$$

$$(4) \cdots \boxed{C(t) = \int e^{7t}dt = \frac{1}{7}e^{7t} + C}$$

Step3 (4) を (3) に代入

$$\underline{(\text{答}) \quad y = \left(\frac{1}{7}e^{7t} + C\right)e^{-3t} = \frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t}}$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$, (2) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t}$

< 1階線形微分方程式 5 >

前ページの別解のような解き方を**定数変化法**という。1階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

例題 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}}$$

の一般解を求めよ。

(解) 定数変化法によって求める。

Step1 同次微分方程式

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{3t}$$

の定数 C のかわりに関数 $C(t)$ でおきかえたものを y とする。

$$(3) \quad \boxed{y = C(t)e^{3t}}$$

Step2 (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} - 3y &= \big(C(t)e^{3t}\big)' - 3\big(C(t)e^{3t}\big) \\ &= C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3C(t)e^{3t} \\ &= C'(t)e^{3t}\end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{3t} = e^{3t}$$
$$\Downarrow$$
$$C'(t) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$(4) \quad \boxed{C(t) = \int 1dt = t + C}$$

Step3 (4) を (3) に代入する。

(答) $y = (t + C)\, e^{3t} = te^{3t} + Ce^{3t}$ (C は任意定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$, (2) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$, (3) $\dfrac{dy}{dt} - ay = e^{at}$

< 1 階線形微分方程式 の一般解 >

一般の 1 階線形微分方程式

$$(1) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の一般解を求めるため、同次方程式

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}$$

の定数 C を $C(t)$ におきかえたものを

$$(3) \qquad \boxed{y = C(t)e^{-\int p(t)dt}}$$

とおく。(1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + p(t)y &= \frac{d}{dt}\left(C(t)e^{-\int p(t)dt}\right) + p(t)\left(C(t)e^{-\int p(t)dt}\right) \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt} - p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} + p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt} \end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{-\int p(t)dt} = q(t)$$

$$\Downarrow \qquad \text{両辺に } e^{\int p(t)dt} \text{ をかける}$$

$$C'(t) = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$\Downarrow$$

$$(4) \qquad \boxed{C(t) = \int \left(q(t)e^{\int p(t)dt}\right) dt + C}$$

より (4) を (3) に代入すると (1) の一般解は

$$\boxed{y = \left\{\int \left(q(t)e^{\int p(t)dt}\right) dt + C\right\} e^{-\int p(t)dt}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{1 階線形微分方程式} \\ \text{(1) の一般解の公式}\end{array}\right)$$

問 1　微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = q(t)$$

の一般解を (上の公式で $\int p(t)dt = -at$ とおくことにより) 求めよ。

問 2　微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$$

の一般解を (問 1 の結果で $q(t) = e^{at}$ とおくことにより) 求めよ。

< 1階微分方程式の初期値問題 >

例題　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(解)　(1)　求積法より $y = \displaystyle\int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = C = 20$　　<u>(答) $y = 6t - 5t^2 + 20$</u>

(2)　13 ページと同様にして一般解は $y = Ce^{-2t}$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = Ce^0 = C = 5$　　<u>(答) $y = 5e^{-2t}$</u>

(3)　17 ページと同様に考える。

$$y_1 = \frac{-5}{2}$$

は (3) の解である。同次方程式 $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ の一般解 $y_0 = Ce^{-2t}$ に対し

$$y = y_1 + y_0 = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t}$$

が (3) の一般解である。

初期条件より $t = 0$ のとき $y = -\dfrac{5}{2} + Ce^0 = -\dfrac{5}{2} + C = 4$ より $C = \dfrac{13}{2}$

<u>(答) $y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{13}{2}e^{-2t}$</u>

問　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし k, g は定数)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -3y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = 9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 0 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$

＜1階微分方程式の応用 1＞

例1 (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗なし)

ある物体を上から落とすと、落ちる速度はだんだん速くなる。これは重力 (地球の引力) によって加速されるからである。t 秒後の落ちる速度を v, 加速度を a とする。今空気抵抗を考えないと、物体に働く力は重力加速度 $g = 9.8(\mathrm{m/s^2})$ だけであるから、$a = 9.8$ となる。また加速度 a は速度 v を微分したもの $\left(a = \frac{dv}{dt}\right)$ であるから

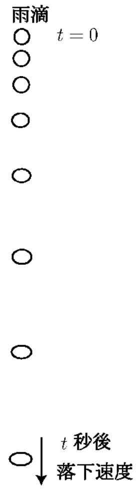
$$(1)\quad \frac{dv}{dt} = 9.8 \qquad (t = 0 \text{ のとき } v = 0)$$

という微分方程式ができる。この微分方程式を初期条件 ($t = 0$ のとき $v = 0$) の下で解くと

(1) の解 ： $\underline{v = 9.8t}$

となる。

例2 (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗あり)



雨のようにかなり上空から落ちるのに地面に落ちた時の速度があまり速くないのは空気抵抗による。水滴を上空から落とす実験をすると、最初球形だった水滴が速度を増すとだんだん円盤形になり、より空気抵抗を受けやすい形になる。つまり速度に比例して空気抵抗が大きくなる。この比例定数を k とすると、落ちるとき「$k\times$ 速度」というブレーキがかかるので

落ちる加速度 $=$ 重力加速度 $- k \times$ 速度

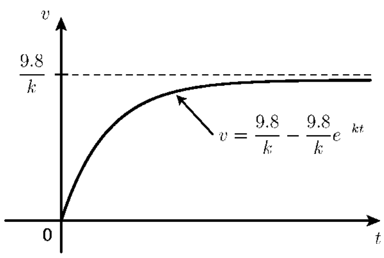
となる。t 秒後の落下速度 v に関する式で表すと

$$(2)\quad \frac{dv}{dt} = 9.8 - kv \qquad (t = 0 \text{ のとき } v = 0)$$

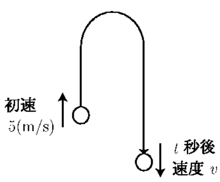
という微分方程式ができる。これは前ページ問 (3) と同じ方程式であるから、前ページの結果より

(2) の解 ： $\underline{v = \frac{9.8}{k} - \frac{9.8}{k}e^{-kt}}$

となる。v のグラフは右図のようになり、落下速度 v は一定速度 $\frac{9.8}{k}$ より大きくならないことがわかる。



問 物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。t 秒後の速度を v とする (ただし上向きの速度はプラス、下向きをマイナスと考える)。空気抵抗のない場合 (1) とある場合 (2) のそれぞれに対し、以下の微分方程式がなりたつ。この微分方程式の解 v をそれぞれ求めよ。



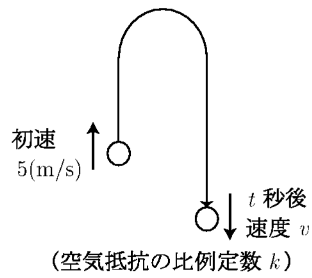
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } v = 5 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -9.8 - kv \\ t = 0 \text{ のとき } v = 5 \end{cases}$$

＜ 1階微分方程式の応用 2 ＞

例 前ページの問 (2) の問題の解 v のグラフを書きたい。微分方程式は

$$(*)\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+kv=-9.8\\ t=0 \text{ のとき } v=5\end{cases}$$



である。この一般解は

$$v=-\frac{9.8}{k}+Ce^{-kt}$$

であり、初期条件 ($t=0$ のとき $v=5$) より

$$t=0 \text{ のとき } v=-\frac{9.8}{k}+C=5 \quad\Longrightarrow\quad C=5+\frac{9.8}{k}$$

であるから $(*)$ の解は

$$\boxed{v=-\frac{9.8}{k}+\left(5+\frac{9.8}{k}\right)e^{-kt}}$$

となる。空気抵抗の比例定数 k は正だから

$$v=-\frac{9.8}{k}+\left(5+\frac{9.8}{k}\right)e^{-kt}>-\frac{9.8}{k}$$

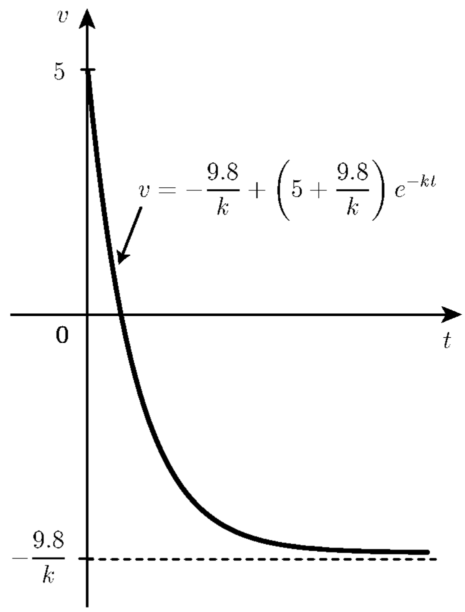
より速度 v は $-\dfrac{9.8}{k}$ より下がらない。

一方 $t\to\infty$ のとき $e^{kt}\to+\infty$ より

$$t\to\infty \text{ のとき } e^{-kt}=\frac{1}{e^{kt}}\to 0$$

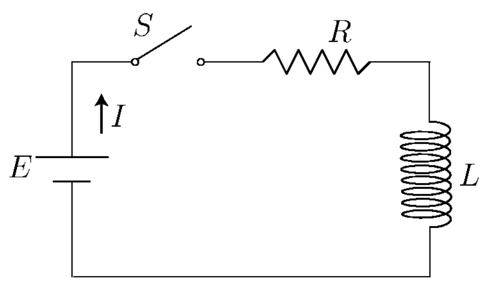
だから

$$\lim_{t\to\infty}v=-\frac{9.8}{k}$$



であり、右図のように時間がたてば速度 v はほぼ $-\dfrac{9.8}{k}$ になる。

問 右図のような直列回路のスイッチ S を閉じた瞬間から t 秒後の電流を $I=I(t)$ とおくと I は次の微分方程式



$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{R}{L}I=\dfrac{E}{L}\\ t=0 \text{ のとき } I=0\end{cases}$$

をみたす。ここで R, L, E は正の定数で L は自己インダクタンス, R は抵抗, E は起電力と呼ばれる。この微分方程式の解 I を求め, $\lim_{t\to\infty} I$ を求めよ。

$I=$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$, $\lim_{t\to\infty} I=$

＜ 2 階線形微分方程式 1 ＞

与えられた関数 $a(t)$, $b(t)$, $F(t)$ に対し、未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+a(t)\frac{dy}{dt}+b(t)y=F(t)\ \cdots\ (*)_1}$$

を **2 階線形微分方程式**という。1 階線形微分方程式の場合は 20 ページの
ような一般解を求める公式があるが、２階以上の場合は解の公式が存在しない。
場合に応じて一般解の形がちがうが、共通して次の基本定理が成り立つ。

＜基本定理＞

任意の点 t_0 と定数 α , β に対して

$$y(t_0)=\alpha \quad , \quad y'(t_0)=\beta\ \cdots\ (*)_2$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y=y(t)$ がただ 1 つ存在する。

通常は $t_0=0$ の場合を考えるので、条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

例 微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}=-10}$

を考える。t について積分すると

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\int\frac{d^2y}{dt^2}dt=\int(-10)dt=-10t+C_1$$

$$y(t)=\int\frac{dy}{dt}dt=\int(-10t+C_1)dt=-5t^2+C_1t+C_2$$

より $\boldsymbol{y=-5t^2+C_1t+C_2}$ が (1) の一般解である。ここで初期条件として

(2) $\boxed{y(0)=3 \quad , \quad y'(0)=4}$ (初期条件)

があれば

$$y(0)=3 \ \Rightarrow\ t=0 \ \text{のとき}\ y=3 \ \Rightarrow\ C_2=3$$

$$y'(0)=4 \ \Rightarrow\ t=0 \ \text{のとき}\ y'=4 \ \Rightarrow\ C_1=4$$

より $\boldsymbol{y=-5t^2+4t+3}$ が (2) をみたす (1) の解である。

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=8\\[2ex] y(0)=2\ ,\ y'(0)=5\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=6t+2\\[2ex] y(0)=5\ ,\ y'(0)=7\end{cases}$

＜ 2階線形微分方程式 2 ＞

例 t の関数 $y = y(t)$ に関する微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y}$

を考える。今

$$y_1(t) = \cos(3t) \quad , \qquad y_2(t) = \sin(3t)$$

とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \big(\cos(3t)\big)'' = \big(-3\sin(3t)\big)' = -9\cos(3t) = -9y_1$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \big(\sin(3t)\big)'' = \big(3\cos(3t)\big)' = -9\sin(3t) = -9y_2$$

より y_1 と y_2 は共に (1) の解である。さらに定数 C_1 と C_2 に対して

(2) $\boxed{y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$

とおくと

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dt^2} = C_1 \times (-9y_1) + C_2 \times (-9y_2) = -9(C_1y_1 + C_2y_2) = -9y$$

より y もまた (1) の解である。次のページで説明するが、(1) の解は全て (2) の形をしている。ここで初期条件が

(3) $\boxed{y(0) = 4 \quad , \qquad y'(0) = 5}$ 　　(初期条件)

であるとき (2) 式より

(4) $4 = y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1$

である。また (2) を微分すると

$$y'(t) = -3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t)$$

より

(5) $5 = y'(0) = -3C_1\sin 0 + 3C_2\cos 0 = 3C_2$

であるから (4)(5) より $C_1 = 4$, $C_2 = \dfrac{5}{3}$ となる。よって (3) をみたす (1) の解は

$$\boldsymbol{y = 4\cos(3t) + \frac{5}{3}\sin(3t)} \quad \cdots \text{ 初期条件 (3) をみたす (1) の解}$$

問 次の初期条件をみたす (1) の解 y を求めよ。

① $y(0) = 6$, $y'(0) = 8$ 　　　　② $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$

< 2 階線形同次微分方程式 1 >

与えられた関数 $a(t)$, $b(t)$ に対し未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

を **2 階線形同次微分方程式**という。これは 2 階線形微分方程式
(24 ページ $(*)_1$ 式) で $F(t) = 0$ の場合である。

例 $a(t) = 0$, $b(t) = 9$ のときの同次微分方程式

$$(1) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0}$$

を考える。これは前ページの例の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y$ と
同じであるから定数 C_1 と C_2 に対し

$$(2) \qquad \boxed{y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$$

は (1) の解である。実は「(1) の解は全て (2) の形をしている」ことが証明
できる。(2) を微分方程式 (1) の**一般解**といい、 $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$
を (1) の**基本解**という。

[証明] ((1) の解が全て (2) の形をしていることの証明)
(1) の任意の解を $y_1 = y_1(t)$ とおく。 y_1 の初期値を

$$(3) \qquad \boxed{y_1(0) = \alpha\ , \quad y_1{}'(0) = \beta}$$

とする。一方

$$y_2(t) = \alpha\cos(3t) + \frac{\beta}{3}\sin(3t)$$

とおくと y_2 は (1) の解であり

$$y_2(0) = \alpha\ , \quad y_2{}'(0) = \beta$$

をみたす。24 ページの基本定理より初期条件 (3) をみたす (1) の解は
ただ 1 つであるから

$$y_1(t) = y_2(t)$$

である。従って $y_1(t) = \alpha\cos(3t) + \dfrac{\beta}{3}\sin(3t)$ であるから (2) の形をしている。(証明終)

問 $y(t) = \cos(2t)$ は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解を求め、この微分方程式の一般解
を求めよ。

＜ 2 階線形同次微分方程式 2＞

このページでは 2 つの関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が互いに他の定数倍 $\big(y_1(t) = k_1 y_2(t)$ または $y_2(t) = k_2 y_1(t)\big)$ になっているとき y_1 と y_2 は同じ形の関数ということにする。

一般の 2 階線形同次微分方程式

$$(*)_1 \cdots \frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

を考える。もし 2 つの異なる関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が $(*)_1$ の解ならば、任意の定数 C_1 と C_2 に対し

$$(*)_2 \cdots y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

とおくと $(*)_2$ も $(*)_1$ の解である。実は「y_1 と y_2 が同じ形の関数でなければ、$(*)_1$ の全ての解は $(*)_2$ の形をしている」ことが前のページと同様にして証明できる（証明略)。このとき $y_1(t)$ と $y_2(t)$ を $(*)_1$ の**基本解**といい、$(*)_2$ を $(*)_1$ の**一般解**という。

例 微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。今

$$y_1(t) = e^{3t} \quad , \quad y_2(t) = te^{3t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 3e^{3t} \;,\; \frac{d^2y_1}{dt^2} = 9e^{3t} \;,\; \frac{dy_2}{dt} = e^{3t} + 3te^{3t} \;,\; \frac{d^2y_2}{dt^2} = 6e^{3t} + 9te^{3t}$$

であるから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 6\frac{dy_1}{dt} + 9y_1 = 9e^{3t} - 6 \times 3e^{3t} + 9 \times e^{3t} = 0$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - 6\frac{dy_2}{dt} + 9y_2 = 6e^{3t} + 9te^{3t} - 6 \times (e^{3t} + 3te^{3t}) + 9 \times te^{3t} = 0$$

より y_1 と y_2 は共に (1) の解である。すなわち y_1 と y_2 は (1) の基本解であるから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

問 $y = te^{5t}$ は　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解をみつけ、この微分方程式の一般解を求めよ。

$<$ 微分演算子 D $>$

t の関数 $y = y(t)$ に対し、微分記号を

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dt} = Dy \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = D^2y}$$

と書くことにする。この記号 D を**微分演算子**または**微分作用素**という。

例 1 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

を D を用いて書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = Dy - 3y = (D-3)y$$

より

$$(D-3)y = 0$$

となる。

例 2 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

を D を用いて書くと

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = D^2y - 5Dy + 6y = (D^2 - 5D + 6)y$$

より

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。

問 1 次の微分方程式を D を用いて表せ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 10\dfrac{dy}{dt} + 25y = 0$

例 3 微分方程式

$$(D-3)y = e^{3t}$$

を考える。これを D を使わずに書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$$

となる。19 ページよりこの微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y = te^{3t} + Ce^{3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $(D-2)y = 0$ (2) $(D-a)y = 0$

(3) $(D-2)y = e^{2t}$ (4) $(D-a)y = e^{at}$

< 定数係数2階線形同次微分方程式 1 >

定数 a , b に対し t の関数 y に関する微分方程式

$$(*) \quad \cdots \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

を**定数係数 2 階線形同次微分方程式**という。この形の微分方程式を解くためには前ページの微分演算子 D を用いると便利である。$(*)$ 式を D を用いて書きなおすと

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

となる。

例　微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

の一般解を求めたい。この式を D を用いて表すと

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。D に関する 2 次式を因数分解すると

$$(D-2)(D-3)y = 0$$

となるから

$$(D-2)y = 0 \qquad \text{または} \qquad (D-3)y = 0$$

となり前ページの結果から

$$y = C_1e^{2t} \qquad \text{または} \qquad y = C_2e^{3t}$$

が導かれる。これが (1) の基本解であるから、求める一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

問 1　以下の関数 y に対し、実際に微分して $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y$ を計算せよ。

(1) $y = e^{2t}$, $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y =$

(2) $y = e^{3t}$, $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y =$

問 2　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$

(2) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0$

＜ 定数係数2階線形同次微分方程式 2 ＞

例 微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。微分演算子 D を用いると

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

より

$$(D-3)(D-3)y = 0$$

となる。ここで

$$(D-3)0 = 0 \qquad , \qquad (D-3)e^{3t} = 0$$

より

$$(D-3)y = 0 \quad \Rightarrow \quad (D-3)(D-3)y = (D-3)0 = 0$$
$$(D-3)y = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad (D-3)(D-3)y = (D-3)e^{3t} = 0$$

となる。28 ページより

$y_1 = e^{3t}$ は $(D-3)y_1 = 0$ の解
$y_2 = te^{3t}$ は $(D-3)y_2 = e^{3t}$ の解

であるから y_1 , y_2 が (1) の基本解である。よって (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}} \qquad (C_1 , C_2 \text{ は任意定数})$$

である。(27 ページの例参照)。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし α は定数)

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 10\dfrac{dy}{dt} + 25y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\alpha\dfrac{dy}{dt} + \alpha^2y = 0$

＜定数係数2階線形同次微分方程式３＞

例 微分方程式

(1) $$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0$$

を考える。25, 26 ページで $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が (1) の基本解であること
がわかった。この基本解を見つけるには微分演算子 D を用いて以下のように考える。
(1) を D を用いて表すと

$$(D^2+9)y=0$$

となる。 D^2+9 を複素数の範囲で因数分解すると

(2) $$(D-3i)(D+3i)y=0$$

となる。よって y を複素数値関数と考えると

$$e^{3it} \quad \text{と} \quad e^{-3it}$$

が (2) の基本解であるから

(3) $$\boldsymbol{y = Z_1e^{3it} + Z_2e^{-3it}} \quad (Z_1\,,\,Z_2\ \text{は任意の複素数定数})$$

となる。これが複素数値関数としての (2) の一般解である。この中に (1)
の基本解が含まれている。オイラーの公式より

$$Z_1e^{3it}+Z_2e^{-3it}=Z_1\{\cos(3t)+i\sin(3t)\}+Z_2\{\cos(-3t)+i\sin(-3t)\}$$

である。ここで $\cos(-3t)=\cos(3t)$, $\sin(-3t)=-\sin(3t)$ より (3) は

(3)′ $$\boldsymbol{y=(Z_1+Z_2)\cos(3t)+i(Z_1-Z_2)\sin(3t)}$$

と書きなおせる。従って $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が基本解であるから (1) の一般解は

(4) $$\boldsymbol{y=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)} \quad (C_1\,,\,C_2\ \text{は任意の実数定数})$$

となる。

(注) (3)′ で $Z_1=Z_2=\frac{1}{2}$ のとき $y=\cos(3t)$ となる。また $Z_1=-\frac{i}{2}\,,\,Z_2=\frac{i}{2}$ のとき $y=\sin(3t)$ となる。

問 1 上の例で $Z_1=\dfrac{C_1-C_2i}{2}$, $Z_2=\dfrac{C_1+C_2i}{2}$ のとき、(3)′ の y を $C_1\,,\,C_2\,,$ $\cos(3t)\,,\,\sin(3t)$ を用いて表せ。

$y=$

問 2 次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。
ただし ω は実数の定数とする。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+16y=0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$

< 定数係数2階線形同次微分方程式 4 >

例　微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0$$

を考える。D を用いて表すと

(2)　$$(D^2 + 4D + 229)y = 0$$

となる。D の 2 次式を因数分解するため 2 次方程式を解くと

$$D^2 + 4D + 229 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2 \pm 15i$$

より (2) 式は次のように因数分解される

(2)′　$$\big(D - (-2 + 15i)\big)\big(D - (-2 - 15i)\big)y = 0$$

従って (2) の複素数解は

(3)　$$\boldsymbol{y = Z_1 e^{(-2+15i)t} + Z_2 e^{(-2-15i)t}} \quad (Z_1\,,\, Z_2 \text{ は任意の複素数定数})$$

となる。この中に (1) の実数値基本解 y_1 , y_2 が含まれている。オイラーの公式より

$$e^{(-2+15i)t} = e^{-2t}\{\cos(15t) + i\sin(15t)\}$$
$$e^{(-2-15i)t} = e^{-2t}\{\cos(-15t) + i\sin(-15t)\} = e^{-2t}\{\cos(15t) - i\sin(15t)\}$$

となるから (3) は次のように書きなおせる。

(3)′　$$\boldsymbol{y = (Z_1 + Z_2)e^{-2t}\cos(15t) + i(Z_1 - Z_2)e^{-2t}\sin(15t)}$$

従って $y_1 = e^{-2t}\cos(15t)$ と $y_2 = e^{-2t}\sin(15t)$ が (1) の基本解である。
よって (1) の一般解は

(4)　$$\boldsymbol{y = C_1 e^{-2t}\cos(15t) + C_2 e^{-2t}\sin(15t)} \quad (C_1\,,\, C_2 \text{ は任意の実数定数})$$

となる。

問 1　上の y_1 , y_2 を実際に微分して次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y_1}{dt^2} + 4\dfrac{dy_1}{dt} + 229y_1 =$　　　(2) $\dfrac{d^2y_2}{dt^2} + 4\dfrac{dy_2}{dt} + 229y_2 =$

問 2　上の例で $Z_1 = \dfrac{C_1 - C_2 i}{2}$, $Z_2 = \dfrac{C_1 + C_2 i}{2}$ のとき (3)′ の y を C_1 , C_2 および $e^{-2t}\cos(15t)$ と $e^{-2t}\sin(15t)$ を用いて表せ。

$y =$

問 3　次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

< 定数係数2階線形同次微分方程式 5 >

一般の定数係数2階線形同次微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=0$$

の一般解の求め方をまとめる。

Step 1. 微分演算子 D に関する2次方程式

$$(2)\quad D^2+aD+b=0$$

を解く。

Step 2. 2次方程式 (2) の解が以下のどの場合かを考える。

[I] $a^2-4b>0$ のとき (2) は2つの実数解 α , β をもつ。
このとき (2) は $(D-\alpha)(D-\beta)$ と因数分解されるから
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}}\quad (C_1\ ,\ C_2\ \text{は任意定数})$$

[II] $a^2-4b=0$ のとき (2) はただ1つの実数解 $\alpha(\alpha$ は実数) をもつ。
このとき (2) は $(D-\alpha)(D-\alpha)$ と因数分解されるから30ページより
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y=C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}}\quad (C_1\ ,\ C_2\ \text{は任意定数})$$

[III] $a^2-4b<0$ のとき (2) は2つの複素数解 α , β をもつ。今

$$\alpha=\mu+\nu i \quad , \quad \beta=\mu-\nu i$$

であれば前ページと同様に考えると、(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y=C_1e^{\mu t}\cos(\nu t)+C_2e^{\mu t}\sin(\nu t)}\quad (C_1\ ,\ C_2\ \text{は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}-5y=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+8\dfrac{dy}{dt}+16y=0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+25y=0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-6\dfrac{dy}{dt}+14y=0$

< 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 >

例 微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 7$

を考える。今

(2) $y_1(t) = \dfrac{7}{6}$

とおくと y_1 は定数だから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 5\frac{dy_1}{dt} + 6y_1 = 0 - 5\times 0 + 6\times\frac{7}{6} = 7$$

となり (1) 式をみたす。従って y_1 は (1) の解である。これを (1) の**特解**という。

(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を $y = y(t)$ とし

(3) $y_0(t) = y(t) - \dfrac{7}{6}$

とおくと、y は (1) の解だから

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} - 5\frac{dy_0}{dt} + 6y_0 = \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y - 7 = 0$$

となる。従って y_0 は同次方程式

(4) $\dfrac{d^2y_0}{dt^2} - 5\dfrac{dy_0}{dt} + 6y_0 = 0$

の解である。29 ページより (4) の一般解は

$$y_0 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

だから (3) より (1) の一般解 y は

$$\boldsymbol{y\left(= y_0 + \frac{7}{6}\right) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + \frac{7}{6}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

一般の 2 階線形微分方程式

$(*)_1$ $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a(t)\dfrac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)$

で $F(t) \neq 0$ のとき**非同次方程式**という。もし (1) の解（特解）y_1 が 1 つみつかれば、同次方程式

$(*)_2$ $\dfrac{d^2y_0}{dt^2} + a(t)\dfrac{dy_0}{dt} + b(t)y_0 = 0$

の一般解 y_0 に対し $(*)_1$ の一般解 y は

$(*)_1$ の一般解：$\boldsymbol{y = y_0 + y_1}$ （y_0 は $(*)_2$ の一般解 , y_1 は $(*)_1$ の特解)

であることが例と同様にしてわかる。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 5$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 7$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 8$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 9$

< 定数係数2階線形非同次微分方程式 2 >

与えられた関数 $F(t)$ $\bigl(\neq 0\bigr)$ と定数 a , b に対し次の形の微分方程式

$$(*)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=F(t)$$

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。前ページより、$F(t)$ が定数の時は $(*)$ の特解も定数である。実は $F(t)$ が t の n 次式のときは特解も t の n 次式になる。さらに定数 r , α , β に対し、$F(t)$ が $re^{\alpha t}$, $re^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ の形のとき $(*)$ の特解は次の表のようになる $\bigl($証明は実際に $(*)$ 式の左辺に特解を代入し、計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。$\bigr)$

$F(t)$	a , b と α , β の関係	特 解
$re^{\alpha t}$	① $\alpha^2+\alpha a+b\neq 0$	$\dfrac{r}{\alpha^2+\alpha a+b}e^{\alpha t}$
	② $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\alpha+a}te^{\alpha t}$
	③ $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2}t^2e^{\alpha t}$
$re^{\alpha t}\cos(\beta t)$	④ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\bigl(2\alpha+a\bigr)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\right\}$
	⑤ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\bigl(2\alpha+a\bigr)\beta=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$re^{\alpha t}\sin(\beta t)$	⑥ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\bigl(2\alpha+a\bigr)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\sin(\beta t)-B\cos(\beta t)\right\}$
	⑦ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\bigl(2\alpha+a\bigr)\beta=0\end{cases}$	$-\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\cos(\beta t)$

例 定数 ω , r ,β (ただし $\omega^2\neq\beta^2$ とする) に対し微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\beta t)$$

を考える。上の表では $a=0$, $b=\omega^2$, $\alpha=0$, $A=-\beta^2+\omega^2\neq 0$, $B=0$ であるから⑥の場合であり、特解 y_1 は $y_1=\frac{r}{A^2+0}\bigl\{A\sin(\beta t)+0\bigr\}=\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$ である。一方 (1) の同次方程式

$$(2)\quad \frac{d^2y_0}{dt^2}+\omega^2y_0=0$$

の一般解は 31 ページより $y_0=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ であるから、(1) の一般解は

(1) の一般解：$\boldsymbol{y=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\dfrac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}$ $(C_1, C_2$ は任意定数$)$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\omega t)$$

＜ 2 階微分方程式の初期値問題 ＞

例題 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。(ただし r は定数)

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 229y = 0 \\ y(0) = r, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(解) (1) $D^2 - 5D + 6 = (D-2)(D-3)$ より (1) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

である。この導関数は

$$y'(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = -1, \quad C_2 = 2$ より

(答) $\boldsymbol{y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}}$

(2) $D^2 + 4D + 229 = 0 \Rightarrow D = -2 \pm 15i$ より (2) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{-2t}\cos(15t) + C_2e^{-2t}\sin(15t)$$

である。

$$y'(t) = -2C_1e^{-2t}\cos(15t) - 15C_1e^{-2t}\sin(15t) - 2C_2e^{-2t}\sin(15t) + 15C_2e^{-2t}\cos(15t)$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = r \\ y'(0) = -2C_1 + 15C_2 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = r, \quad C_2 = \dfrac{2r}{15}$ より

(答) $\boldsymbol{y(t) = re^{-2t}\cos(15t) + \dfrac{2r}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$

問 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - 3y = 0 \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

＜ 2階微分方程式の応用 1 ＞

定数係数 2 階線形微分方程式

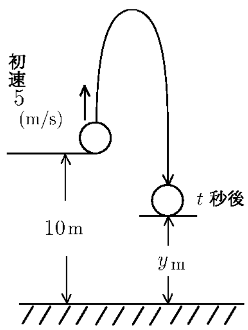
$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)}$$

を考える。この微分方程式は未知関数 $y = y(t)$ の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合、通常 $y = y(t)$ は時刻 t における物体の**位置**を表す。このとき $\frac{dy}{dt}$ は**速度**を表し、$\frac{d^2y}{dt^2}$ は**加速度**を意味する。このとき $(*)$ の係数 a, b と関数 $F(t)$ は

a ： 速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数
b ： 位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数
$F(t)$ ： 外力

を意味する。特に係数 a がプラスのときは a は**抵抗**を意味する。

例 1 (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗なし)



地上 10m の位置から初速度 $5(m/s)$ で真上に投げ上げた物体の t 病後の高さを ym とする。空気抵抗を考えないとすると、加速度は重力加速度だけだから

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -9.8 \\ y(0) = 10\ , \quad y'(0) = 5 \end{cases}$$

が成り立つ。24 ページよりこの解は $\boldsymbol{y(t) = -4.9t^2 + 5t + 10}$

例 2 (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗あり)

例 1 で空気抵抗がある場合を考える。空気抵抗の比例定数を k とすると、23 ページより速度 v に関する微分方程式

$$\frac{dv}{dt} + kv = -9.8$$

が出る。これを $v = \frac{dy}{dt}$ に置き換えると 2 階微分方程式

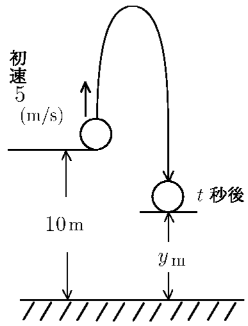
$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -9.8 \\ y(0) = 10\ , \quad y'(0) = 5 \end{cases}$$

が成り立つ。

問 上の 2 つの例の微分方程式 (1) と (2) は一般の微分方程式 $(*)$ の特別な場合である。$(*)$ の係数 a, b, F が何であるか、(1) と (2) について答えよ。

(1) $a =$ 　　　, $b =$ 　　　, $F =$ 　　　　(2) $a =$ 　　　, $b =$ 　　　, $F =$

＜ 2階微分方程式の応用 2 ＞



(空気抵抗の比例定数 k)

例 1 前のページの例 2 の微分方程式

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -9.8 \\ y(0) = 10\ ,\quad y'(0) = 5 \end{cases}$$

の解を求めたい。速度 $v = \frac{dy}{dt}$ に置き換えると

$$(1)'\quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} + kv = -9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } v = 5 \end{cases}$$

であるから 23 ページで求めたように t 秒後の速度 $v = v(t)$ は

$$v = -\frac{9.8}{k} + \left(5 + \frac{9.8}{k}\right)e^{-kt}$$

であった。従って $\frac{dy}{dt} = v$ を積分すると

$$y = \int v dt = \int \left\{-\frac{9.8}{k} + \left(5 + \frac{9.8}{k}\right)e^{-kt}\right\}dt$$
$$= -\frac{9.8}{k}t - \frac{1}{k}\left(5 + \frac{9.8}{k}\right)e^{-kt} + C$$

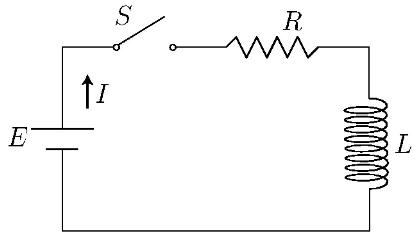
となる。そこで初期条件 $y(0) = 10$ より

$$t = 0 \text{ のとき } y = -\frac{1}{k}\left(5 + \frac{9.8}{k}\right) + C = 10 \Rightarrow C = 10 + \frac{1}{k}\left(5 + \frac{9.8}{k}\right)$$

よって

$$\text{(答)}\ y = -\frac{9.8}{k}t - \frac{1}{k}\left(5 + \frac{9.8}{k}\right)e^{-kt} + 10 + \frac{1}{k}\left(5 + \frac{9.8}{k}\right)$$

例 2 23 ページの問の場合にスイッチを閉じた瞬間から t 秒後の電流を $I = I(t)$ をおくと



$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \\ t = 0 \text{ のとき } I = 0 \end{cases}$$

をみたす。ここで L は自己インダクタンス、R は抵抗、E は起電力と呼ばれる正の定数である。今 t 秒後の電気量 (電荷) を $q = q(t)$ とおくと電流 I は $I = \frac{dq}{dt}$ となる。つまり電流は電荷 q の流れる速度である。上の微分方程式を $I = \frac{dq}{dt}$ として q の式になおすと

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} = \frac{E}{L} \\ q(0) = 0\ ,\quad q'(0) = 0 \end{cases}$$

となる。

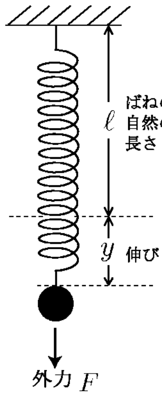
問 例 2 の q に関する微分方程式を解け。(23 ページの問の結果を使ってよい)

＜ 2階微分方程式の応用 3 ＞

図 1 のようにばねの先におもりがあり、おもりには外力 F が働くとする。時刻 t におけるばねの伸びを $y = y(t)$ とすると、y は一般に次の微分方程式をみたす。

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F(t)}$$

ここで定数 k は「抵抗」、ω^2 は「ばねの力を表す係数」、F は「外力」を意味する。



(図1)

[I] $k = 0$(抵抗ゼロ)、$F = 0$(外力ゼロ) の場合

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

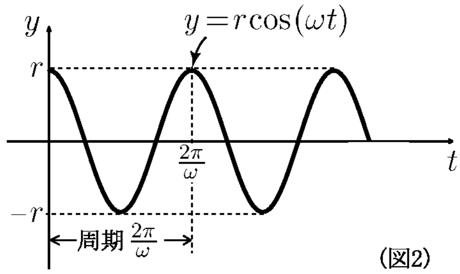
の一般解は $y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ である。

このばねを「最初に r だけ伸ばし、静かに離す」と

$$(**) \qquad \boxed{y(0) = r\ , \quad y'(0) = 0} \qquad \text{(初期条件)}$$

という初期条件になる。この初期条件で (1) を解くと

$$\boldsymbol{y = r\cos(\omega t)} \quad \big((1) - (**) \text{ の解}\big)$$



(図2)

となる。これは振幅が r で角速度 ω の**単振動**である (図 2)。ここで「ω の値が大きい」(=「ばねの力が強い」) と単振動の周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ は短くなる。

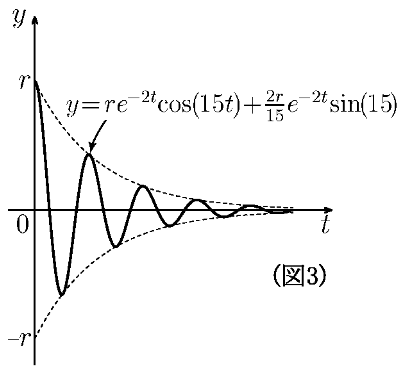
[II] $k = 4$, $\omega^2 = 229$, $F = 0$(外力ゼロ) の場合

(2) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0$

の一般解は 32 ページより $y = C_1 e^{-2t}\cos(15t) + C_2 e^{-2t}\sin(15t)$ となる。ここで上の初期条件 $(**)$ をみたす (2) の解は 36 ページより

$$\boldsymbol{y = re^{-2t}\cos(15t) + \frac{2r}{15}e^{-2t}\sin(15t)} \quad \big((2) - (**) \text{ の解}\big)$$

となる。このグラフは図 3 であり、抵抗によってばねの振動がだんだん弱くなっていく。このような運動を**減衰振動**という。



(図3)

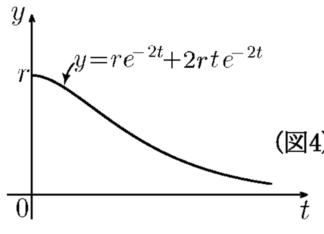
[III] $k = 4$, $\omega^2 = 4$, $F = 0$(外力ゼロ) の場合

(3) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$

の一般解は 30 ページより $y = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t}$ となる。ここで上の初期条件 $(**)$ をみたす (3) の解は 36 ページより

$$\boldsymbol{y = re^{-2t} + 2rte^{-2t}} \quad \big((3) - (**) \text{ の解}\big)$$

となる。これは抵抗 $k = 4$ に比べてばねの力 $\omega^2 = 4$ が弱いため [II] のように振動しないで減衰していく (図 4)



(図4)

問 上の初期条件 $(**)$ をみたす次の微分方程式の解を求めよ。

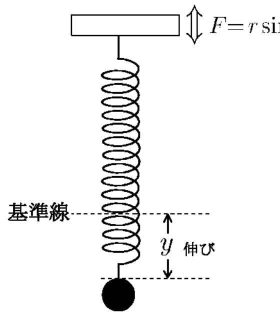
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

＜ 2階微分方程式の応用 4 ＞

例 図 1 のようにばねの上端を強制的に振動させる。
基準線からの伸びを y、振動する外力を $r\sin(\beta t)$
とする。抵抗を考えないとすると y に関する微分方程式は

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\beta t)}$$

となる。



(図1)

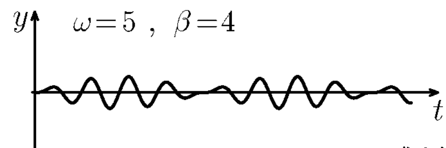
[I] [$\omega^2 \neq \beta^2$ のとき]
35 ページより $(*)$ の一般解は
$y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$
となる。ここで「ばねの下端は最初基準線上に止まっている」と仮定すると

$$(**) \qquad \boxed{y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 0} \qquad \text{(初期条件)}$$

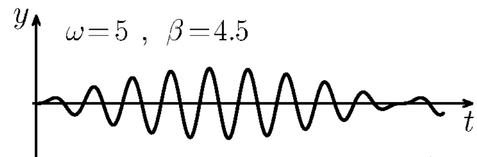
という初期条件になる。この初期条件より
$C_1 = 0\ , \qquad C_2 = -\frac{r\beta}{\omega(\omega^2-\beta^2)}$
となるので $(**)$ をみたす $(*)$ の解は

$$(***) \qquad \boxed{y = -\frac{r\beta}{\omega(\omega^2-\beta^2)}\sin(\omega t) + \frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}$$

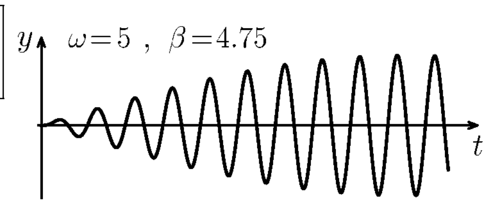
となる。図 2 から図 4 は $r = 3$, $\omega = 5$ でかつ $\beta = 4$(図 2)、$\beta = 4.5$(図 3)、$\beta = 4.75$(図 4) のときの $(***)$ のグラフである。このような運動を**強制振動**という。



(図2)



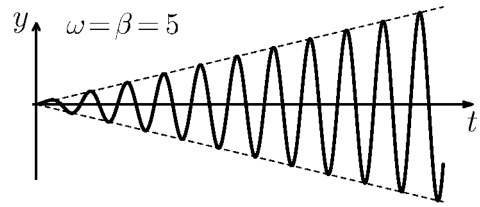
(図3)



(図4)

[II] [$\omega = \beta$ のとき]
35 ページより $(*)$ の一般解は
$y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) - \frac{r}{2\omega}t\cos(\omega t)$
である。初期条件 $(**)$ より $C_1 = 0,\ C_2 = \frac{r}{2\omega^2}$
となるので $(**)$ をみたす $(*)$ の解は

$$(****) \qquad \boxed{y = \frac{r}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{r}{2\omega}t\cos(\omega t)}$$



(図5)

となる。図 5 の実線は $r = 3,\ \omega = 5$ のときの $(****)$ のグラフであり、図 5 の点線は直線 $y = \pm\frac{r}{2\omega}t$ である。つまり時刻 t における振幅が $\frac{r}{2\omega}t$ であり、時間とともに振幅が大きくなる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

問 $(***)$ 式で $\beta \to \omega$ の極限を求めよ。(ヒント：変数 β に関するロピタルの定理を使う)

$$\lim_{\beta\to\omega}\left\{-\frac{r\beta}{\omega(\omega^2-\beta^2)}\sin(\omega t) + \frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)\right\} = \lim_{\beta\to\omega}\frac{-r\beta\sin(\omega t) + r\omega\sin(\beta t)}{\omega^3 - \beta^2\omega}$$

$=$