

高知工科大学  
基礎数学ワークブック

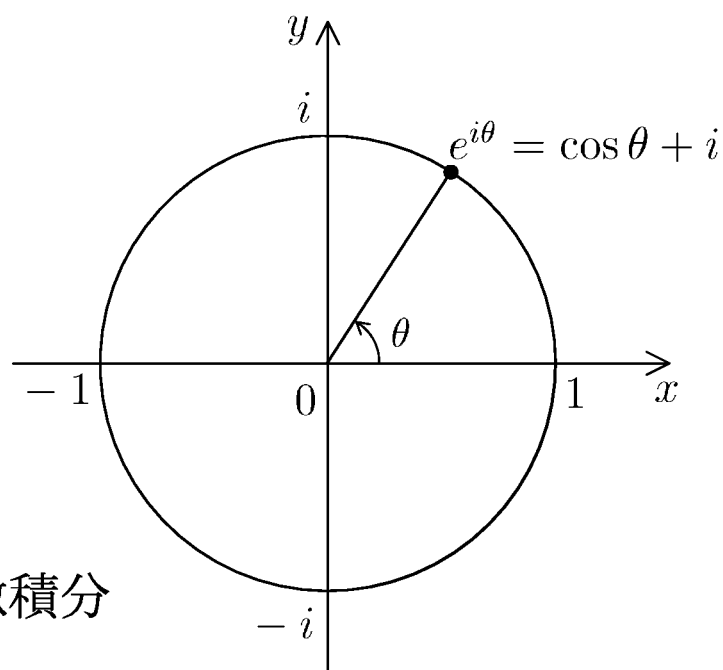
(2001年度版)

Series **A**

No. 8

内容

- ◎ 複素平面
- ◎ 極形式
- ◎ オイラーの公式
- ◎ 複素数値関数の微積分
- ◎ 速度・加速度



電子・光システム工学科  
井上 昌昭 著

## < 高次式の因数分解 >

例 1 3 次式  $x^3 - 8$  は因数分解の公式

$$\begin{array}{l} x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \\ x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \end{array}$$

によって

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

と因数分解できるが、

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

の解が、解の公式より

$$x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

であるから、

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

と因数分解できるから、複素数の範囲では

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

まで因数分解できる。

例 2 4 次式  $x^4 - 16$  は、実数の範囲では

$$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2)^2 - (4)^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

のように因数分解できるが、複素数の範囲では

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

まで因数分解できる。

問 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)  $x^3 + 8$

(2)  $x^3 - 27$

(3)  $x^4 - 1$

## < 高次方程式 >

### 例 1 3 次方程式

$$(1) \quad x^3 - 8 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 1 - \sqrt{3}i = 0, \quad x + 1 + \sqrt{3}i = 0$$

のいずれかであるから、(1) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -1 + \sqrt{3}i, \quad x = -1 - \sqrt{3}i$$

となる。

### 例 2 4 次方程式

$$(2) \quad x^4 - 16 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0, \quad x - 2i = 0, \quad x + 2i = 0$$

のいずれかであるから、(2) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -2, \quad x = 2i, \quad x = -2i$$

となる。

一般に  $n$  次式は、複素数の範囲では、 $n$  個の一次式の積に因数分解される。(代数学の基本定理)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \quad (z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ は複素数})$$

問 次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

$$(1) \quad x^3 + 8 = 0$$

$$(2) \quad x^3 - 27 = 0$$

$$(3) \quad x^4 - 1 = 0$$

## < 共役複素数 >

$$3 + 2i \text{ と } 3 - 2i, \quad 1 - \sqrt{3}i \text{ と } 1 + \sqrt{3}i$$

のように、虚部の符号だけが違う2つの複素数を互いに共役(きょうやく)という。一方は他方の共役複素数という。複素数  $z$  の共役複素数を  $\bar{z}$  で表す。すなわち、実数  $a, b$  に対し、

$$z = a + bi \text{ のとき } \bar{z} = a - bi$$

である。従って  $\bar{\bar{z}}$  の共役複素数は  $\bar{\bar{z}} = a + bi$  であるから

$$\bar{\bar{z}} = z$$

である。

例 (1)  $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ ,  $\overline{(-1 - \sqrt{2}i)} = -1 + \sqrt{2}i$

(2)  $\overline{4} = 4$ ,  $\overline{(-5i)} = 5i$

(3)  $z = 3 + 2i$  のとき  $\bar{z} = 3 - 2i$

$$z + \bar{z} = (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$$

$$z\bar{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$$

問1 以下の複素数  $z$  に対し、共役複素数  $\bar{z}$  を求めよ。

(1)  $z = 1$ ,  $\bar{z} =$  (2)  $z = i$ ,  $\bar{z} =$

(3)  $z = 1 + i$ ,  $\bar{z} =$  (4)  $z = \frac{1+i}{2}$ ,  $\bar{z} =$

問2  $z = 1 - 3i$  に対し、次式を計算せよ。

(1)  $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$  (2)  $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  (3)  $z\bar{z}$

=

=

=

問3 実数  $a, b$  に対し、 $z = a + bi$  とする。以下の値を  $a$  と  $b$  で表せ。

(1)  $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$  (2)  $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  (3)  $z\bar{z}$

=

=

=

## < 絶対値 >

複素数  $z = a + bi$  ( $a, b$  は実数) に対し、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を  $z$  の絶対値 という。

例 1  $z = 3 + 2i$  のとき

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

問 1 複素数  $z$  が以下の場合に絶対値  $|z|$  を求めよ。

(1)  $z = -1$                       (2)  $z = 7i$                       (3)  $z = \frac{\sqrt{5} - 2i}{3}$

$$|z| =$$

$$|z| =$$

$$|z| =$$

前ページの結果より複素数  $z = a + bi$  に対して

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

が成り立つ。

例 2  $z = 2 + 3i$  のとき

$$|z|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i - 3^2 = -5 + 12i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

問 2 以下の複素数  $z$  に対して、 $|z|^2, z^2, |z^2|$  を求めよ。

(1)  $z = 2 - 3i$

(2)  $z = 1 - i$

$$|z|^2 =$$

$$|z|^2 =$$

$$z^2 =$$

$$z^2 =$$

$$|z^2| =$$

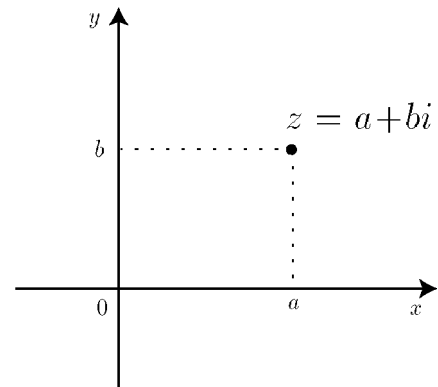
$$|z^2| =$$

## < 複素平面 1 >

定数が数直線上の点で表されたように、複素数を平面上の点として表現する。実数  $a, b$  に対し、複素数

$$z = a + bi$$

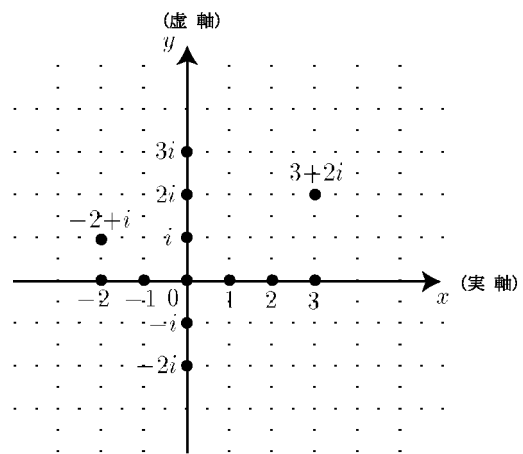
を、右図のように、 $x$  軸上の目もりが  $a, y$  軸上の目もりが  $b$  である  $xy$  平面上の点として表す。この平面を 複素平面 または ガウス平面 という。



例 1 右図のように

実数  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$  は全て  $x$  軸上に並んでいる。この  $x$  軸を 実軸 という。

純虚数  $-2i, -i, i, 2i, 3i$  は全て  $y$  軸上に並んでいる。この  $y$  軸を 虚軸 という。



問 1 例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

- (1)  $2 + i$ , (2)  $-2 - 2i$ , (3)  $1 + 3i$ , (4)  $3 - 2i$

例 2  $a, b$  を正の数とすると複素数  $z = a + bi$  は右図の位置にあり、共役複素数

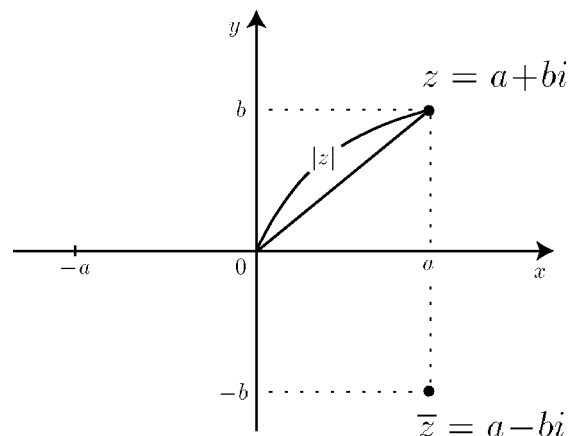
$$\bar{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。

また、絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。



問 2 例 2 の右図上に  $-z$  および  $-\bar{z}$  を図示せよ。

## < 複素平面 2 >

例  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$

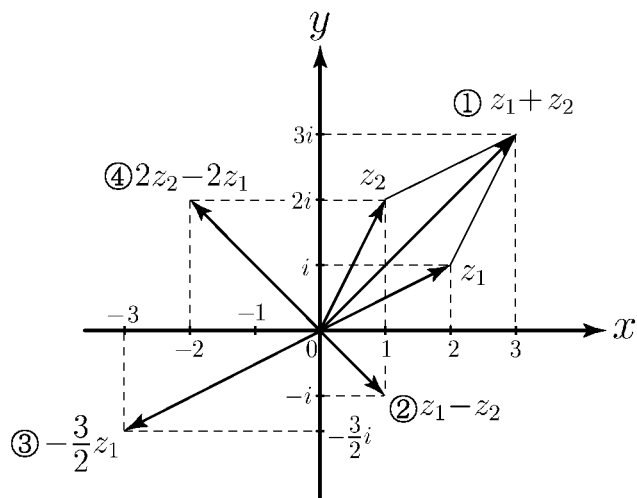
のとき以下の複素数

$$z_1 + z_2 = 3 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = 1 - i$$

$$-\frac{3}{2}z_1 = -3 - \frac{3}{2}i$$

$$\begin{aligned} 2z_2 - 2z_1 &= (2 + 4i) - (4 + 2i) \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$



を複素平面上に表すと右図のようになる。

は  $z_1$  と  $z_2$  の和である。右図から四点 (原点,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$ ) を結ぶと平行四辺形になる。

は  $z_1$  の  $-\frac{3}{2}$  倍である。 $z_1$  と原点を結ぶ直線上に  $-\frac{3}{2}z_1$  がある。

問  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 1 + 3i$

のとき以下の複素数を

計算し、例のように

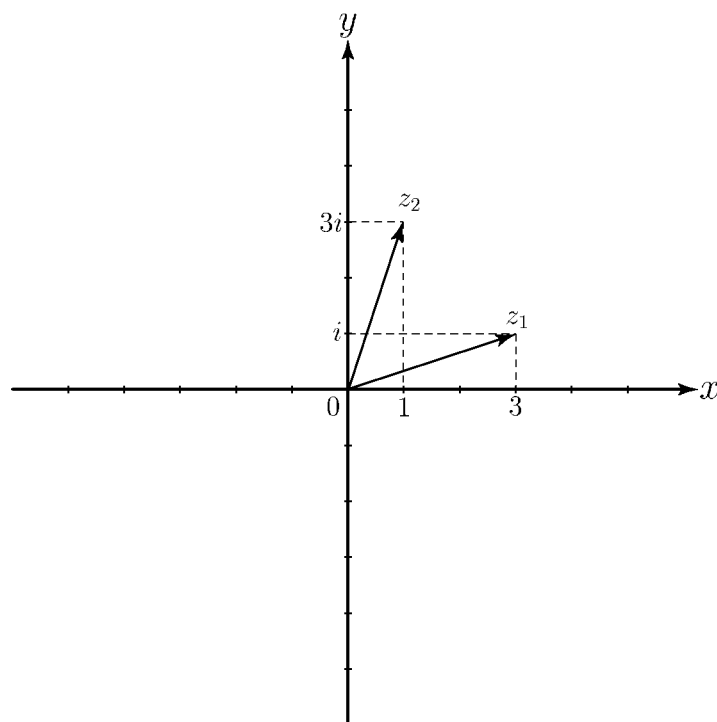
複素平面上に図示せよ。

$$z_1 + z_2 =$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$-\frac{3}{2}z_1 =$$

$$2z_2 - 2z_1 =$$



## < 複素数の $i$ 倍 >

複素数の和・差・実数倍はベクトルと同じであるが、複素数倍は別の図形的な意味がある。一般の場合は後で説明するが、このページでは  $i$  倍の図形的な意味を考える。

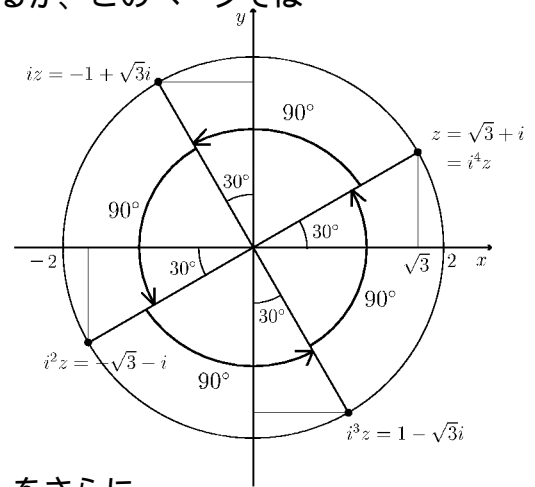
例  $z = \sqrt{3} + i$  に対し

$$iz = i(\sqrt{3} + i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$i^2z = i(iz) = i(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{3} - i$$

$$i^3z = i(i^2z) = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$i^4z = i(i^3z) = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i = z$$



右図より  $iz$  は  $z$  を原点を中心として反時計まわりに  $90^\circ$  回転させたものであり、 $i^2$  は  $iz$  をさらに  $90^\circ$  回転させたものであり、 $i^3z$  は  $i^2z$  をさらに  $90^\circ$  回転させたものであり、 $i^4z$  は  $i^3z$  をさらに  $90^\circ$  回転させたものであるからもとの  $z$  にもどる。

問  $z$  が以下の場合に

$$iz, i^2z, i^3z, i^4z$$

を求め、右図に記入せよ。

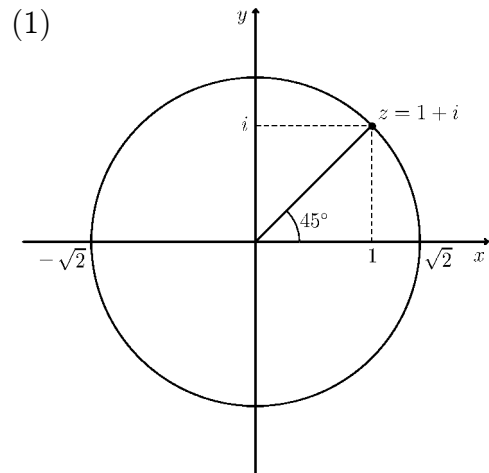
(1)  $z = 1 + i$

$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$



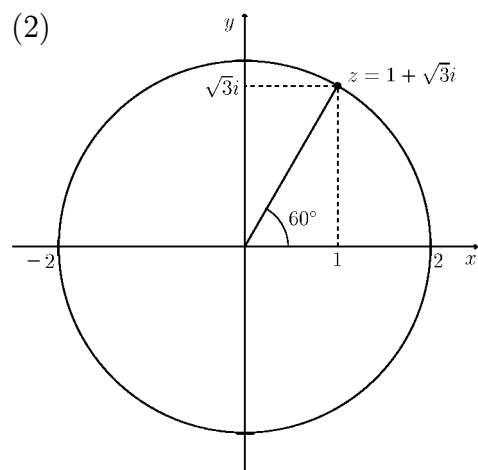
(2)  $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$



## < 極座標 1 >

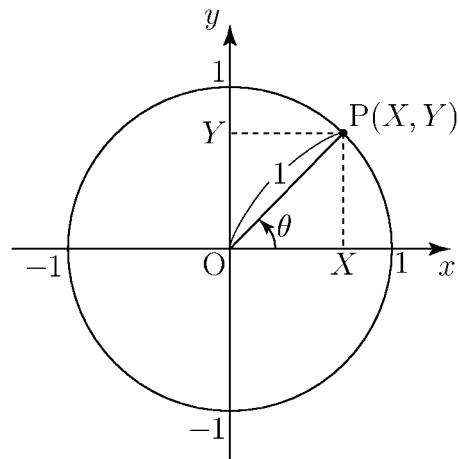
座標平面上の原点  $O(0,0)$  を中心として半径 1 の円周上の点  $P(X,Y)$  を考える、角度  $\theta$  が右図の場合に、三角関数の定義から

$$X = \cos \theta , Y = \sin \theta$$

となるから点  $P(X,Y)$  の座標は

$$(X, Y) = (\cos \theta , \sin \theta)$$

と表される。



**例** 右図は半径 1 の円周上の点の  $x$  軸からの角度 (単位ラジアン) を内側に書き、その点の座標を外側に書いてある。この図から

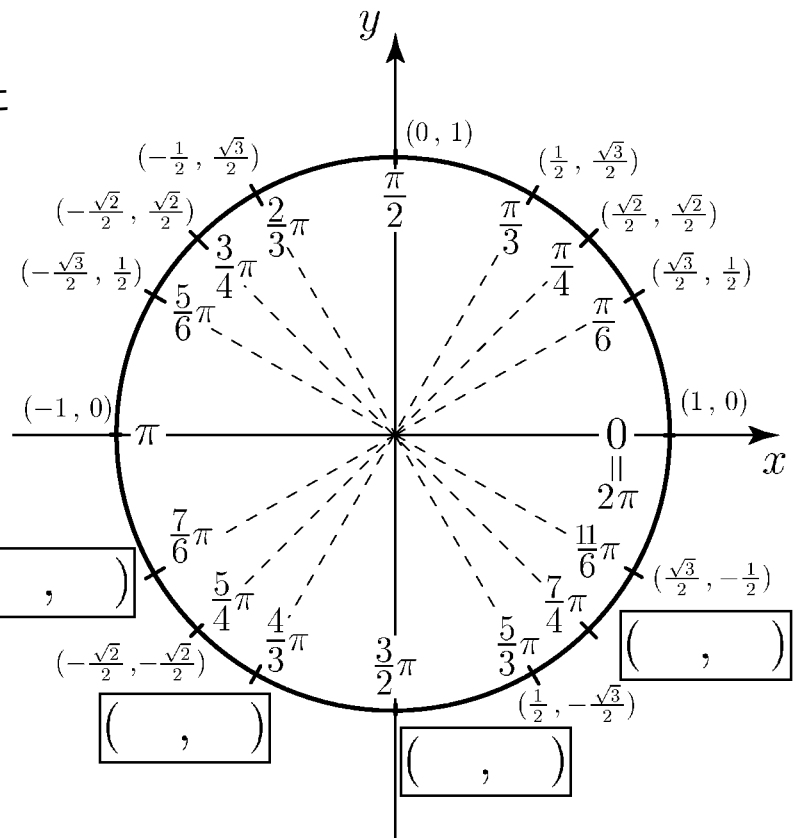
$$(0, 1) = \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left( \cos \left( \frac{5}{6}\pi \right), \sin \left( \frac{5}{6}\pi \right) \right)$$

$$\left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left( \cos \left( \frac{5}{4}\pi \right), \sin \left( \frac{5}{4}\pi \right) \right)$$

$$\left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \cos \left( \frac{5}{3}\pi \right), \sin \left( \frac{5}{3}\pi \right) \right)$$

となる。



**問 1** 右図の  $(\quad, \quad)$  の中に座標を書け。

**問 2** 以下の座標を例のように三角関数を使って書きなおせ。

(1)  $\left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$

(2)  $\left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

(3)  $(-1, 0) =$

(4)  $\left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) =$

(5)  $(0, -1) =$

(6)  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

## < 極座標 2 >

座標平面上の点  $P(a, b)$  は原点  $O(0, 0)$

からの距離が  $r$  で、 $x$  軸からの角度

が  $\theta$  (右図) の位置にあるとする。

線分  $OA$  上に  $OP=1$  となるような点

$P(X, Y)$  をとる。前ページより

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta$$

となる。また三角形の相似比  $X : a = Y : b = 1 : r$  より

$$a = rX, \quad b = rY$$

となるから

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

より

$$(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{極座標表示})$$

と表される。 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  を  $(a, b)$  の極座標という。

(注)  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  である。

例 (1) 点  $A(-1, 1)$  は図 2 より極座標になおすと

$$(-1, 1) = \left( \sqrt{2} \cos \left( \frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left( \frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

(2) 点  $B(-1, -\sqrt{3})$  は図 3 より

$$(-1, -\sqrt{3}) = \left( 2 \cos \left( \frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left( \frac{4}{3}\pi \right) \right)$$

< 検算 > 例の極座標表示が正しいかどうかは  
三角関数の値を代入してみればわかる。

$$\begin{aligned} (1) & \left( \sqrt{2} \cos \left( \frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left( \frac{3}{4}\pi \right) \right) \\ & = \left( \sqrt{2} \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \sqrt{2} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left( 2 \cos \left( \frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left( \frac{4}{3}\pi \right) \right) \\ & = \left( 2 \times \left( -\frac{1}{2} \right), 2 \times \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = (-1, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

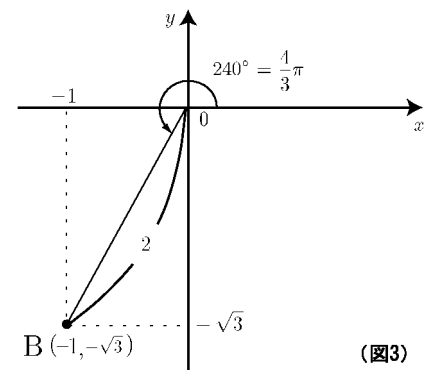
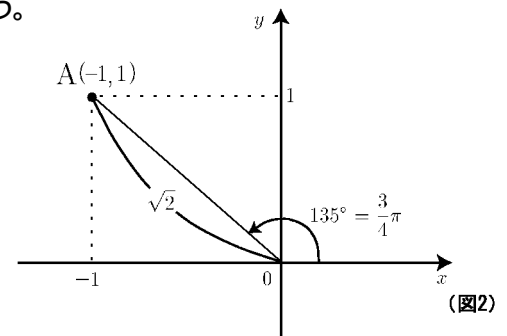
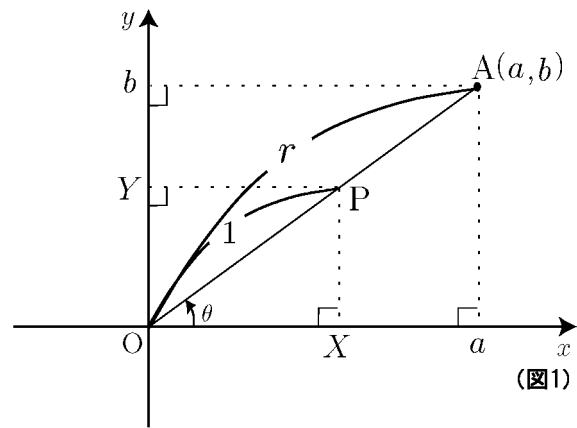
問 次の座標を極座標になおせ。

(1)  $(2, 2)$

(2)  $(-\sqrt{3}, 1)$

(3)  $(\sqrt{3}, -1)$

(4)  $(-3, -3)$





## < 極形式 1 >

複素数  $z = a + bi$  に対し、

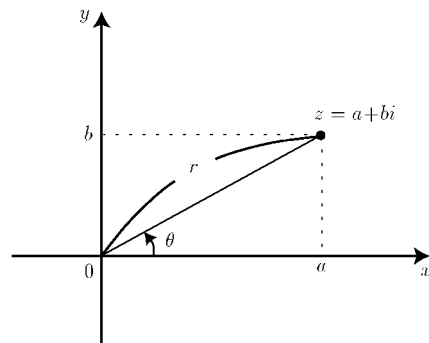
$$|z| = r$$

で、右図のように  $x$  軸の正の部分からの角度が  $\theta$  であるとき

$$a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$$

となる。従って

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{極形式})$$



と表される。これを  $z$  の極形式という。このとき角  $\theta$  は複素数  $z$  の偏角といい、

$$\theta = \arg(z)$$

という記号を使うこともある。

例 (1)  $z = 3i$  のとき右図より

$$r = |z| = 3, \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

(2)  $z = -4$  のとき右図より

$$r = |z| = 4, \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

(3)  $z = -2i$  のとき右図より

$$r = |z| = 2, \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2 \left( \cos \left( \frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left( \frac{3}{2}\pi \right) \right)$$

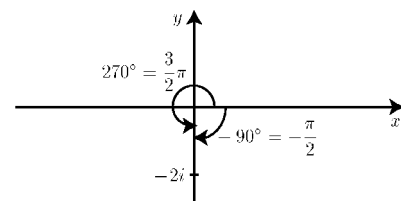
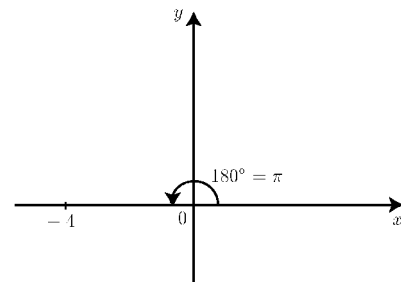
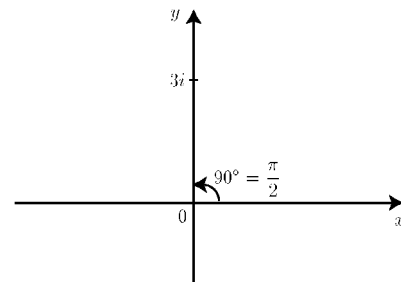
(注)  $270^\circ$  の位置と  $-90^\circ$  の位置は同じだから  $-2i = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)$  としてもよい。

問 次の複素数を極形式になおせ。

(1)  $-i$

(2)  $-1$

(3)  $\sqrt{2}$



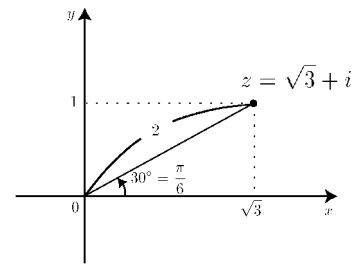
## < 極形式 2 >

例 (1)  $z = \sqrt{3} + i$  に対し、

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

であり、右図より  $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$  だから

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

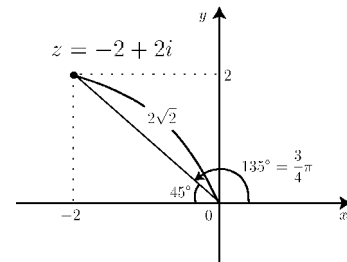


(2)  $z = -2 + 2i$  に対し、

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

であり、右図より  $\theta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$  だから

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left( \frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

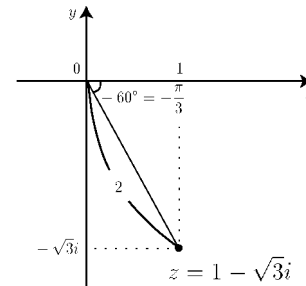


(3)  $z = 1 - \sqrt{3}i$  に対し、

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

であり、右図より  $\theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$  だから

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$$



問 以下の複素数を極形式になおせ。

(1)  $z = 1 - i =$

(2)  $z = -1 - i =$

(3)  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i =$

(4)  $z = -3 + \sqrt{3}i =$

(5)  $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i =$

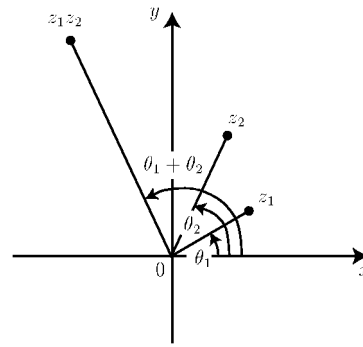
## < 複素数の積 >

2つの複素数  $z_1, z_2$  が極形式で

$$z_1 = r_1 \{ \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \}$$

$$z_2 = r_2 \{ \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \}$$

と表されているとき、積  $z_1 z_2$  は



$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$

となる。従って

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

(注) 上の計算で三角関数の加法定理

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

を用いた。

例  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

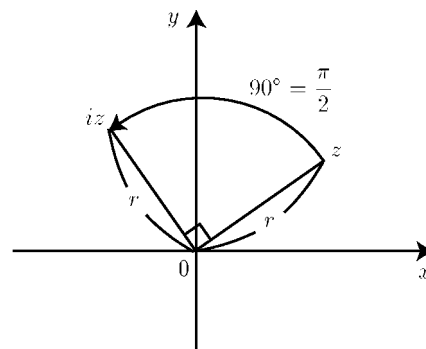
に

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

をかけると、上の式より

$$iz = r \left\{ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

より、右図のように、 $iz$  は  $z$  を原点を中心として反時計まわりに  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  だけ回転した位置にある。



問  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  に対して、以下の複素数の積を極形式で表し、回転の角度を求めよ。

$$(1) \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z \qquad (2) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) z \qquad (3) -z$$

=

=

=

## < 複素数の商 >

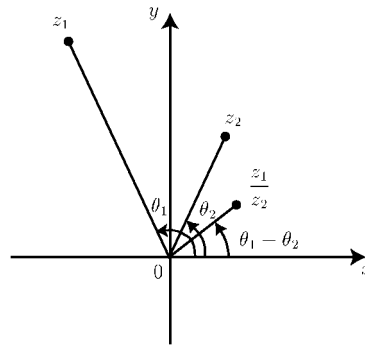
$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdots (1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdots (2)$$

に対し、

$$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とおくと



$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \times z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

より

$$z_1 = rr_2 \{ \cos(\theta + \theta_2) + i \sin(\theta + \theta_2) \}$$

(1) 式と比較すれば

$$r_1 = rr_2, \theta_1 = \theta + \theta_2$$

だから

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

例  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

より

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right\}$$

問 次の複素数の商を極形式で表せ。

(1)  $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} =$

(2)  $\frac{-1 - i}{1 + i} =$

(3)  $\frac{-1 - i}{-\sqrt{3} + i} =$

## ＜ ド・モアブルの定理 ＞

複素数の積で

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

であった。とくに  $r_1 = r_2 = 1$  のときは

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。ここで  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  とすれば

$$(1) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

又、 $\theta_1 = 2\theta$  ,  $\theta_2 = \theta$  とすれば

$$(2) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \{ \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \} \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

(1) と (2) を一般化すると、

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

が任意の自然数  $n$  に対して成立する。この公式を ド・モアブルの定理 という。

例  $\sqrt{3} + i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}$  だから

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \times \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}^6 = 64 \times \{ \cos(\pi) + i \sin(\pi) \} = -64$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \left( \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^3 =$$

$$(2) \quad \left( \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^6 =$$

$$(3) \quad (1 - i)^4 =$$

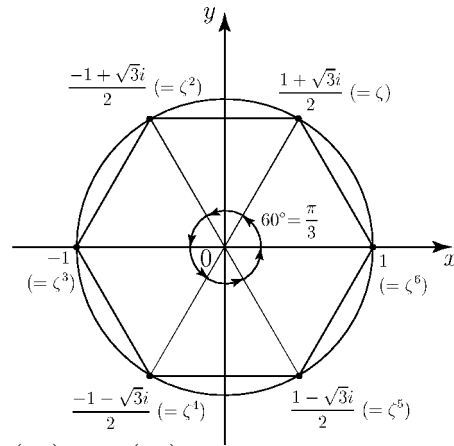
$$(4) \quad \left( \frac{-1 - i}{-\sqrt{3} + i} \right)^{12} =$$

## &lt; 1 の累乗根 &gt;

## 例題

$$z^6 = 1$$

をみたす複素数  $z$  をすべて求めよ。



(解)  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおくと

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta))$$

となる。一方 1 を極形式で表すと

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = \dots$$

となる。 $z^6$  と等しいから

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta)) = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$r = 1, \quad 6\theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。

$$n = 0 \text{ のとき } \quad 6\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$n = 1 \text{ のとき } \quad 6\theta = 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 2 \text{ のとき } \quad 6\theta = 4\pi \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 3 \text{ のとき } \quad 6\theta = 6\pi \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$n = 4 \text{ のとき } \quad 6\theta = 8\pi \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 5 \text{ のとき } \quad 6\theta = 10\pi \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6 次方程式の解は 7 個以上はないから、これがすべての解である。

$$\text{(答)} \quad z = 1, \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad -1, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

(注)  $\zeta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} (= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  とすると、 $z^6 = 1$  の解は

$$z = 1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5$$

となっている。複素平面上では、単位円周を 6 等分する分点である。(右上図参照)

問 次の方程式をみたす複素数  $z$  を全て求め、上図のように単位円周上の点として図示せよ。

(1)  $z^3 = 1$

(2)  $z^4 = 1$

(3)  $z^{12} = 1$

## < 平面上の回転移動 >

例 平面上の点  $(x, y)$  を原点を中心として反時計まわりに角度  $40^\circ$  だけ回転させた点を  $(x', y')$  とする。  
 $(x', y')$  を  $(x, y)$  で表したい。

この問題は下図のように、複素平面上で考えても同じである。複素数  $z = x + iy$  を同様に  $40^\circ$  だけ回転させた点を表す複素数が  $z' = x' + iy'$  である。 $z'$  は  $z$  に偏角  $40^\circ$  で絶対値 1 の複素数をかけたものであるから

$$z' = z \times (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

となる。従って

$$x' + iy' = (x + iy)(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) = (x \cos 40^\circ - y \sin 40^\circ) + i(x \sin 40^\circ + y \cos 40^\circ)$$

であるから

$$\begin{cases} x' = x \cos 40^\circ - y \sin 40^\circ \\ y' = x \sin 40^\circ + y \cos 40^\circ \end{cases}$$

が求まる。

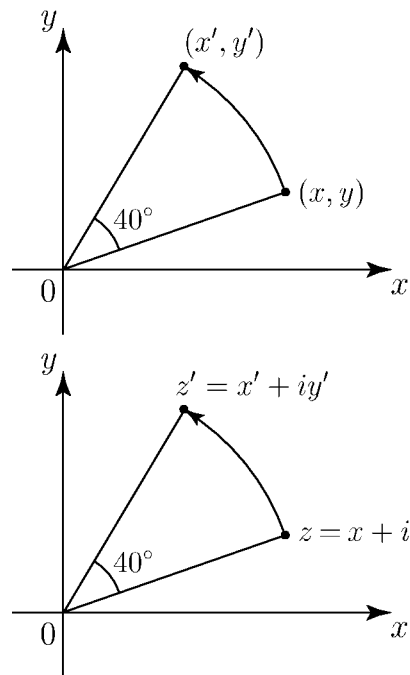
問 上の例で回転する角度が以下の場合に、 $x', y'$  を  $x$  と  $y$  で表せ。

(1) 角度  $\frac{\pi}{2}$  , (2) 角度  $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

(3) 角度  $\frac{\pi}{3}$  , (4) 角度  $\theta$

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$



## < オイラーの公式 1 >

指数関数・三角関数のマクローリン展開 (ワークブック Ser. A , No. 7) を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \quad (3)$$

であった。ここで  $x$  は実数である。これを虚数まで拡張したい。

実数  $y$  と虚数単位  $i$  に対し、(1) 式の  $x$  のかわりに  $iy$  を代入

すれば、 $i^2 = -1$  だから

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \quad (y \text{ は実数})$$

が成立する。これをオイラーの公式という。

例  $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 次の複素数を例のようになおせ。

(1)  $e^{0i} =$

(2)  $e^{\pi i} =$

(3)  $e^{\frac{\pi}{4}i} =$

(4)  $e^{\frac{5}{6}\pi i} =$

(5)  $e^{-\frac{2}{3}\pi i} =$

(6)  $e^{-\frac{\pi}{2}i} =$

## < オイラーの公式 2 >

複素数  $z$  に対し、 $e$  の  $z$  乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad (= \exp(z))$$

によって定義する。これを  $e^z = \exp(z)$  と書く場合もある。

今  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数) のとき、( 詳しい計算は省略するが )

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x + iy) + \frac{(x + iy)^2}{2!} + \frac{(x + iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \times \left( 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (x \text{ と } y \text{ は実数})$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

例 (1)  $e^{2+i\pi} = e^2(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^2$

(2)  $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = e^{-3} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{e^3} i$

(3)  $e^{\log 2 + \frac{\pi}{6}i} = e^{\log 2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$

(注)  $\log 2$  は底が  $e$  の対数 (= 自然対数) であるから、対数の定義より

$$x = \log 2 = \log_e 2 \iff e^x = 2$$

よって

$$e^{\log 2} = e^x = 2$$

問 以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1)  $e^{1-\pi i}$

(2)  $e^{0+\frac{\pi}{2}i}$

(3)  $e^{2+\frac{\pi}{4}i}$

(4)  $e^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}i}$

(5)  $e^{\log 4 + \frac{2}{3}\pi i}$

(6)  $e^{\frac{1}{2}\log 4 - \frac{\pi}{6}i}$

## < 複素数の指数表示 >

複素数  $z$  の絶対値が  $r$ 、偏角が  $\theta$  のとき、 $z$  は極形式によって

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される。一方

$$r = e^{\log r}, \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

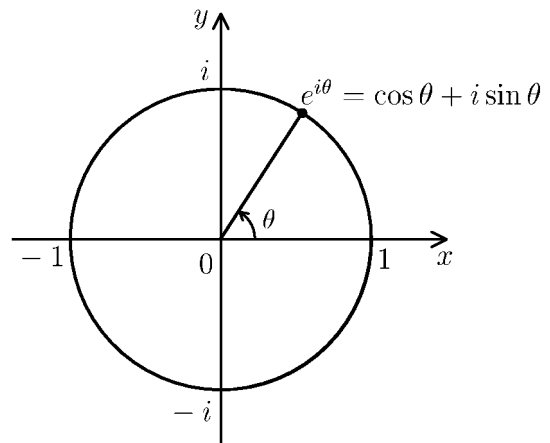
であるから

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{\log r} \times e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

と指数表示できる。特に  $r = 1$  のとき  $\log 1 = 0$  より

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

となる。このように絶対値が 1 の複素数は指数表示の方が簡単である。



例 1 ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

を指数表示で書くと、

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

と簡単に書ける。

問 1 絶対値が 1、偏角が  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の複素数の積は、13 ページより

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。この式を指数表示で書け。

例 2  $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ ,  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$  より

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

問 2 次の計算をせよ。

$$(1) e^{\frac{3}{4}\pi i} \times e^{\frac{\pi}{4}i} =$$

$$(2) e^{\frac{\pi}{6}i} \div e^{\frac{\pi}{3}i} =$$

$$(3) (e^{\frac{\pi}{2}i})^2 =$$

$$(4) (e^{\frac{\pi}{6}i})^3 =$$

## < 指数法則 >

### 2つの複素数

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \text{ は実数})$$

に対し、

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} &= (e^{x_1} \times e^{iy_1}) \times (e^{x_2} \times e^{iy_2}) = (e^{x_1} \times e^{x_2}) \times (e^{iy_1} \times e^{iy_2}) \\ &= e^{x_1+x_2} \times e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

である。同様に計算すると、以下の指数法則が導ける。

$$\begin{aligned} (1) \quad e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1+z_2} & (2) \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{\boxed{\phantom{z_1-z_2}}} \\ (3) \quad (e^z)^n &= e^{\boxed{\phantom{nz}}} \quad (\text{ド・モアブルの定理}) & \left( \begin{array}{l} z_1, z_2, z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array} \right) \end{aligned}$$

問 1 上の  $\boxed{\phantom{z_1-z_2}}$  内に適当な式を記入せよ。

例 1  $e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^4$  ,  $e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left( e^{1+\frac{\pi}{6}i} \right)^8 = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^8 \left( \cos \left( \frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left( \frac{4}{3}\pi \right) \right) = e^8 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

問 2 次式の計算せよ。

(1)  $e^{5+\pi i} \times e^{-1-\pi i}$                       (2)  $e^{-1+\frac{\pi}{4}i} \div e^{-2+\frac{\pi}{4}i}$

(3)  $\left( e^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\pi i} \right)^2$

例 2 
$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1+i)^6} &= \frac{(2e^{\frac{\pi}{6}i})^8}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^6} = \frac{2^8 e^{\frac{8}{3}\pi i}}{(\sqrt{2})^6 e^{\frac{6}{4}\pi i}} = \frac{2^8}{2^3} \times \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} \\ &= 2^{8-3} \times e^{\frac{4}{3}\pi i - \frac{3}{2}\pi i} = 2^5 \times e^{-\frac{\pi}{6}i} \\ &= 32 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = 16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

問 3 次式を計算せよ。

$$\frac{(-1+i)^4}{(1+\sqrt{3}i)^3}$$

## < 円関数 >

例 右図において、単位円周上の点 P の座標を  $(X, Y)$  とすると。

$$(*) \quad X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta, \quad \frac{Y}{X} = \tan \theta$$

の関係がある。この意味で三角関数を円関数ともいう。オイラーの公式より

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

となる。そこで一般の複素数  $z$  に対し、

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

と定め、複素変数三角関数（複素変数円関数）という。

例 
$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \left( \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \right) i$$

$$(\sin z)^2 = \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4i^2} = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}$$

問 1 次の関数を（例のように）指数で表せ。

(1)  $\cos(i\theta)$

=

(2)  $(\cos z)^2$

=

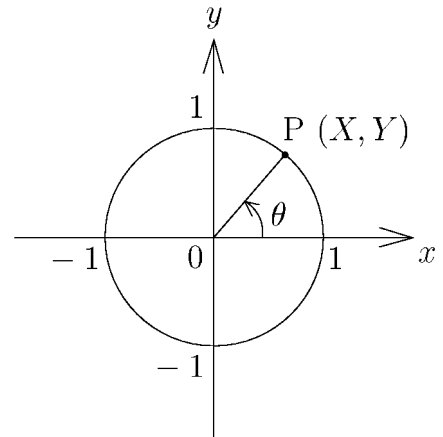
問 2 次式を簡単にせよ。

(1)  $\cos(-iz) + i \sin(-iz)$

=

(2)  $(\cos z)^2 + (\sin z)^2$

=



## < 双曲線関数 >

複素数  $z$  に対し

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

をそれぞれ ハイボリックコサイン (*hyperbolic cosine*)、ハイボリックサイン (*hyperbolic sine*)、ハイボリックタンジェント (*hyperbolic tangent*) とよび、これらを総称して双曲線関数 (*hyperbolic function*) という。

この呼び名の由来は以下の図形的意味による。右図の双曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

上の点  $P(X, Y)$  に対し、斜線部分の面積を  $\theta$  とすれば

$$X = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad Y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

が成り立つ (計算略)。この式から前ページの (\*) と同様な関係式

$$(**) \quad X = \cosh(\theta), \quad Y = \sinh(\theta), \quad \frac{Y}{X} = \tanh(\theta)$$

が成立することがわかる。これが双曲線関数の由来である。

例 (1)  $\sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \times \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = i \sin(\theta)$

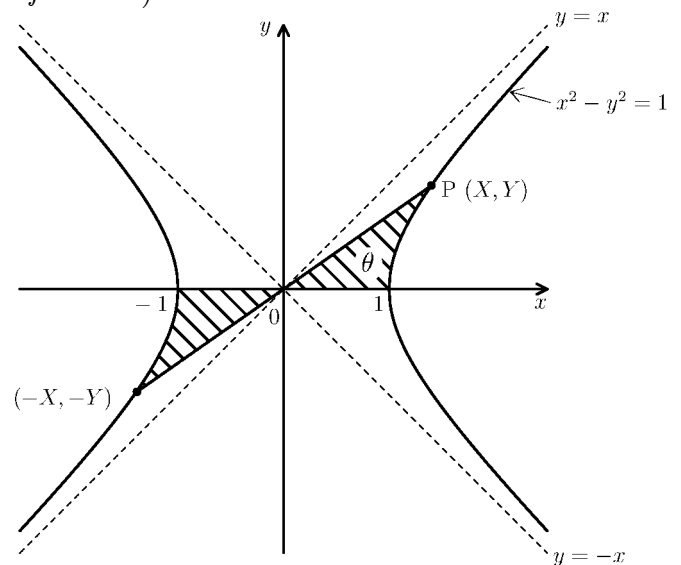
$$\begin{aligned} (2) \quad & \cosh(a + bi) + \cosh(a - bi) + \sinh(a + bi) + \sinh(a - bi) \\ &= \frac{e^{a+bi} + e^{-a-bi}}{2} + \frac{e^{a-bi} + e^{-a+bi}}{2} + \frac{e^{a+bi} - e^{-a-bi}}{2} + \frac{e^{a-bi} - e^{-a+bi}}{2} \\ &= e^{a+bi} + e^{a-bi} = e^a(e^{bi} + e^{-bi}) = 2e^a \cos(b) \end{aligned}$$

問 次式を三角関数および指数関数を用いて表せ。

(1)  $\cosh(i\theta) =$  (2)  $\cosh(z) + \sinh(z) =$

(3)  $\cosh(a + bi) - \cosh(a - bi) + \sinh(a + bi) - \sinh(a - bi)$

=



## < 時間変数 $t$ による微分 1 >

物体の運動などを表現する場合、各時刻における位置などを考える。このよう場合、位置は時刻の関数と考える。すなわち変数が時刻になる。時刻(時間)を表す変数を通常  $t$  で表す。そこで今後は変数  $t$  の関数  $f(t)$  を考える。

$t$  の関数  $f(t)$  の導関数の定義は、

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

である。今まで習った微分の公式を変数  $t$  におきかえると以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt} (t^r) = r t^{r-1} \quad (r \text{ は実数})$$

$$\frac{d}{dt} (e^t) = e^t \quad \frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} \quad (\log t = \log_e t \text{ (自然対数)})$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$$

例 (1)  $\frac{d}{dt} (t^7 - 4e^t + 5 \log t) = 7t^6 - 4e^t + \frac{5}{t}$

(2)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{5}{t^3} - \sqrt{t} \right) = \frac{d}{dt} (5 \times t^{-3} - t^{\frac{1}{2}}) = 5 \times (-3t^{-4}) - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{15}{t^4} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$

問 次の導関数を求めよ。

(1)  $\frac{d}{dt} (10 + 8t - 5t^2) =$

(2)  $\frac{d}{dt} (t^8 - 10t^4 + 5e^t) =$

(3)  $\frac{d}{dt} (4t^5 - 5 \cos t + 2 \log t) =$

(4)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \right) =$

## < 時間変数 $t$ による微分 2 >

微分する変数が  $x$  から  $t$  に変わっても微分の公式は同様になりつつ。

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt}} \quad (\text{合成関数の微分})$$

**例 1**  $y = \sin(5t + 3)$  を微分したい。

$$u = 5t + 3 \quad \text{とおくと} \quad y = \sin(u) \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{d}{dt}(5t + 3) = \cos(u) \times 5 = 5 \cos(5t + 3)$$

だから

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} \sin(5t + 3) = 5 \cos(5t + 3)}}$$

**問 1** 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \cos(3t + 4) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} e^{5t+2} =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \sin(-2t + 1) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(4t + 3) =$$

**例 2**  $y = \cos(t^2 - 4t)$  を微分したい。

$$u = t^2 - 4t \quad \text{とおくと} \quad y = \cos(u) \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\cos u) \times \frac{d}{dt}(t^2 - 4t) = -\sin(u) \times (2t - 4)$$

よって

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}(\cos(t^2 - 4t)) = -(2t - 4) \sin(t^2 - 4t)}}$$

**問 2** 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \sin(t^3 - 2t) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} (e^{-t^2}) =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos(3t + 4t^2) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(t^4 + 3t^2 + 1) =$$

## < 時間変数 $t$ による微分 3 >

$t$  の関数  $f(t)$  と  $g(t)$  に対し、積  $f(t) \times g(t)$  の導関数は

$$(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t) \quad (\text{積の微分})$$

となる。

**例 1** (1)  $\frac{d}{dt}(t^2 e^t) = (t^2)' \times e^t + t^2 \times (e^t)' = 2te^t + t^2 e^t$

(2)  $\frac{d}{dt}(e^t \cos t) = (e^t)' \times \cos t + e^t \times (\cos t)' = e^t \cos t - e^t \sin t$

**問 1** 次の導関数を求めよ。

(1)  $\frac{d}{dt}(te^t) =$

(2)  $\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) =$

(3)  $\frac{d}{dt}(e^t \sin t) =$

(4)  $\frac{d}{dt}(t \log t) =$

**例 2**  $\frac{d}{dt}(e^{2t} \sin(3t)) = (e^{2t})' \times \sin(3t) + e^{2t} \times (\sin(3t))'$   
 $= 2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)$

**問 2** 次の導関数を求めよ。

(1)  $\frac{d}{dt}(e^t \sin(2t)) =$

(2)  $\frac{d}{dt}(e^{3t} \cos(4t)) =$

(3)  $\frac{d}{dt}(4e^{3t} \sin(-5t)) =$

(4)  $\frac{d}{dt}(5e^{-2t} \cos(6t)) =$

## < 複素数値関数の微分 1 >

実変数  $t$  の複素数値関数  $z = z(t)$  は

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (x(t) \text{ と } y(t) \text{ は実数})$$

のように実部  $x(t)$  と虚部  $y(t)$  の2つの実数値関数で表される。

このとき  $z(t)$  の導関数を

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$

と定める。

例 (1)  $z(t) = t^2 + t^3i$  のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) + \frac{d}{dt}(t^3)i = 2t + 3t^2i$$

(2)  $z(t) = e^{(2+3i)t} = e^{2t}(\cos(3t) + i \sin(3t))$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{2t} \cos(3t) + ie^{2t} \sin(3t)) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{2t} \cos(3t)) + i \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin(3t)) \\ &= \{2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \sin(3t)\} + i \{2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)\} \end{aligned}$$

問 次式を  $t$  で微分せよ。(ただし  $a$  と  $b$  は実数)

(1)  $z(t) = t - it^{-2}$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(2)  $z(t) = e^{ibt} = \cos(bt) + i \sin(bt)$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(3)  $z(t) = e^{(1+2i)t}$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(4)  $z(t) = e^{(a+bi)t}$

$$\frac{dz}{dt} =$$

## < 複素数値関数の微分 2 >

例 前ページ例 (2) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{(2+3i)t}) &= \{2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \sin(3t)\} + i\{2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)\} \\ &= e^{2t} \{2 \cos(3t) - 3 \sin(3t) + 2i \sin(3t) + 3i \cos(3t)\} \\ &= e^{2t} \{(2 + 3i) \cos(3t) + (2i - 3) \sin(3t)\}\end{aligned}$$

ここで  $i^2 = -1$  より  $-3 = 3i^2$  だから

$$2i - 3 = 2i + 3i^2 = (2 + 3i) \times i$$

におきかえると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{(2+3i)t}) &= e^{2t} \{(2 + 3i) \cos(3t) + (2 + 3i) \times i \sin(3t)\} \\ &= e^{2t} (2 + 3i) \{\cos(3t) + i \sin(3t)\} \\ &= e^{2t} (2 + 3i) e^{3ti} = (2 + 3i) e^{2t+3ti} = (2 + 3i) e^{(2+3i)t}\end{aligned}$$

問 以下の導関数を例のように指数表示せよ。(ただし  $a$  と  $b$  は実数)

(1)  $\frac{d}{dt}(e^{2it}) =$

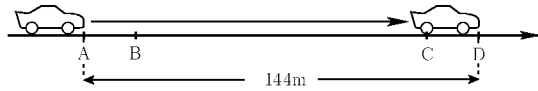
(2)  $\frac{d}{dt}(e^{bit}) =$

(3)  $\frac{d}{dt}(e^{(1-i)t}) =$

(4)  $\frac{d}{dt}(e^{(a+bi)t}) =$

## < 速度 1 >

例 まっすぐな道路を車が A 地点から D 地点へ行く。A から D まで 144m ある。



A から D まで 14 秒かかった。

平均速度は

$$\frac{144(\text{m})}{14(\text{s})} \approx 10.29 (\text{m/s}) \cdots \text{A から D までの平均速度}$$

である。しかし実際のスピードは常に 10.29(m/s) ではない。

出発地点の A 地点では速度 0(ゼロ)であり、あるスピードまで加速して 2 秒後に B 地点 (12m 先) まで行き、そこから C 地点 (132m 先) まで同じ速さで走り、C 地点でブレーキをふみ、減速して D 地点 (144m 先) で止まる。車の走った距離と時間が図 1 のようであれば、B から C までの平均速度は

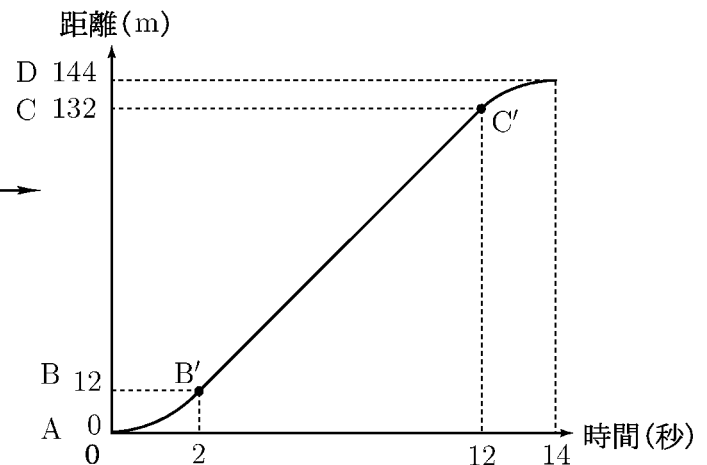
$$\frac{132 - 12}{12 - 2} = 12 (\text{m/s}) \cdots \text{B から C までの平均速度}$$

であり、全体の平均速度より速いが、A から B までと C から D までの速度が遅いため、全体の平均速度は 10.29(m/s) になっている。

車に乗ってスピードメーターを見ると、最初は時速 0km からしだいに速度を上げ、B 地点になると秒速 12m = 時速 43.2km にたっし、そこから C 地点まで同じ時速 43.2(km) で走り、C 地点から減速して、D 地点で時速 0km になる。

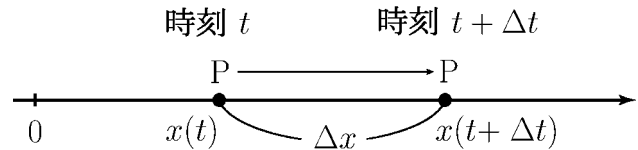
このようなスピードメーターでわかる現在の速度を「瞬間の速度」といい、「平均の速度」と区別する。

(注) 上図の  $B'(2, 12)$  と  $C'(12, 132)$  を結ぶ直線の傾き (= 12) が B 地点から C 地点までの平均速度になっている。



## < 速度 2 >

数直線上を動く点 P を考える。  
時刻  $t$  における点 P の位置 (座標)  
を  $x(t)$  とする。時刻  $t$  から  $t + \Delta t$   
までの平均速度は



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (\text{平均速度})$$

である。このとき時刻  $t$  における「瞬間の速度」を求めたい。「瞬間」というのは「微小時間間隔」のこと、つまり「 $\Delta t \doteq 0$ 」であることである。平均速度の式に  $\Delta t = 0$  を代入すると求まらないので、 $\Delta t \rightarrow 0$  のときの平均速度の極限

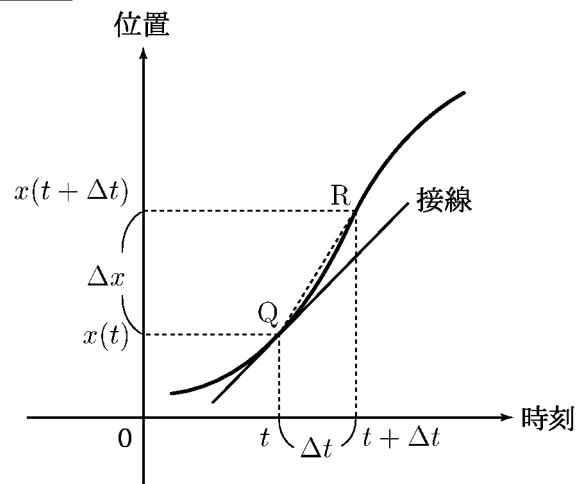
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

を考え、この極限值を「時刻  $t$  における瞬間の速度」とする。この極限の式は  $x(t)$  の導関数  $x'(t)$  と同じ式である。すなわち

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (\text{時刻 } t \text{ における瞬間の速度})$$

前ページの例のように、時刻  $t$  における位置  $x(t)$  が右図のようなとき、「平均速度」と「瞬間の速度」の図形的な意味は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{平均速度} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \text{線分 QR の傾き} \end{aligned}$$

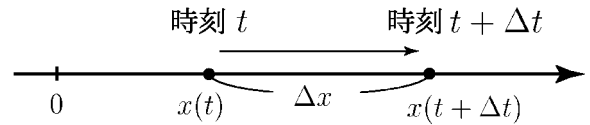


$$\text{瞬間の速度} = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \text{点 Q における接線の傾き}$$

問 前ページの例で「平均速度」と「瞬間の速度」が同じになる場合を説明せよ。

## < 速度 3 >

前ページと同様に数直線上を動く点を考える。時刻  $t$  における位置を  $x(t)$  とおくと、時刻  $t$  における瞬間の速度は



$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (\text{瞬間の速度})$$

であった。今後単に「速度」と書けば常に「瞬間の速度」を表すことにする。速度を英語で *velocity* と書くので、速度を表す記号として  $v$  を使う。つまり時刻  $t$  における速度を

$$v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (\text{時刻 } t \text{ における速度})$$

と書くことにする。

**例** 数直線上を動く点の時刻  $t$  における位置が  $x(t) = 5 - 4t + 3t^2$  である点の時刻  $t$  における速度は

$$v(t) = x'(t) = (5 - 4t + 3t^2)' = -4 + 6t$$

**問 1**  $x(t)$  が以下の場合に、速度  $v(t)$  を求めよ。

(1)  $x(t) = 12 + 6t - 3t^2$  ,  $v(t) =$

(2)  $x(t) = \sin(2t)$  ,  $v(t) =$

(3)  $x(t) = e^{2t} \cos(3t)$  ,  $v(t) =$

**問 2** 地上  $14.7m$  の位置からボールを真上に投げ

上げた。投げ上げる速度が  $9.8(m/s)$  のとき、 $t$  秒後のボールの高さ  $x(t)$  は

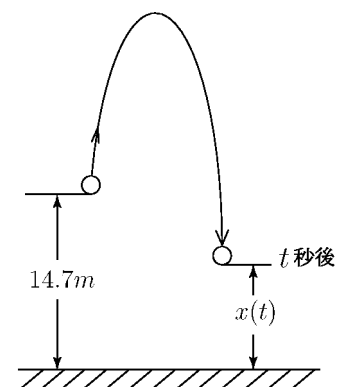
$$x(t) = -4.9t^2 + 9.8t + 14.7$$

となる。

(1)  $t$  秒後の速度  $v(t)$  を求めよ。

(2)  $v(t) = 0$  となるのは何秒後か？

(3) ボールが一番高く上がった位置は地上何  $m$  か？



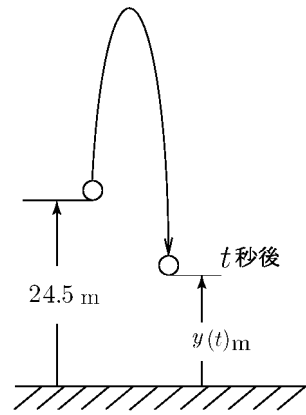
## < 速度の応用 1 >

問 地上 24.5m から物体を真上に  
投げ上げた。  $t$  秒後の高さ

$y(t)$  は

$$y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 \text{ (m)}$$

となったとせよ。



(1)  $t$  秒後の速度  $v(t)$  を求めよ。

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} =$$

(2) 初速度 何 m/s で物体を投げ上げたか？  $t = 0$  のときの  $v$  の値で答えよ。

$$v(0) =$$

(3) 何秒後に最も高くなるか？ 速度が 0 ( $v = 0$ ) のときの  $t$  の値で答えよ。

(4) 最高点は地上 何 m か？

(5) 何秒後に地上に落下するか？

## < 速度の応用 2 >

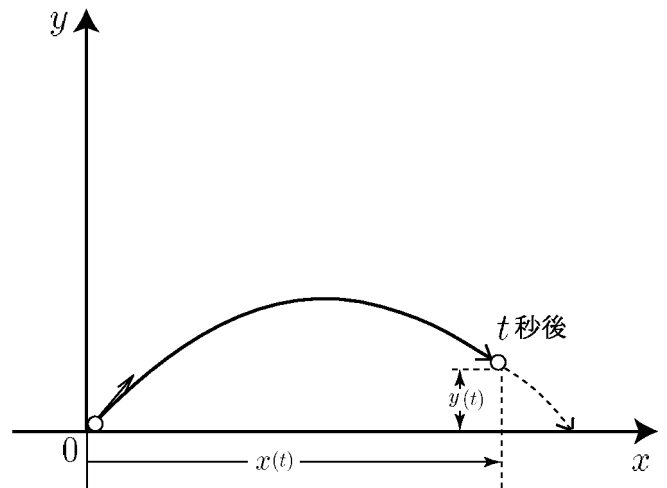
問 ボールを投げたとき  $t$  秒後のボールの位置を座標平面の点として表すことにする。

$t$  秒後の水平距離を  $x(t)$

$t$  秒後の垂直距離を  $y(t)$

とする。今

$$\begin{cases} x(t) = 14.7t \\ y(t) = -4.9t^2 + 19.6t \end{cases}$$



の場合に次の問に答えよ。

(1)  $t$  秒後の水平方向の速度  $v_x(t)$  を  $x(t)$  を微分することにより求めよ。

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$$

(2)  $t$  秒後の垂直方向の速度  $v_y(t)$  を  $y(t)$  を微分することにより求めよ。

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} =$$

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か？

(4) 最高点の高さを求めよ。

(5) 落下するのは何秒後か？

(6) 落下したとき、投げた地点からの水平距離を求めよ。

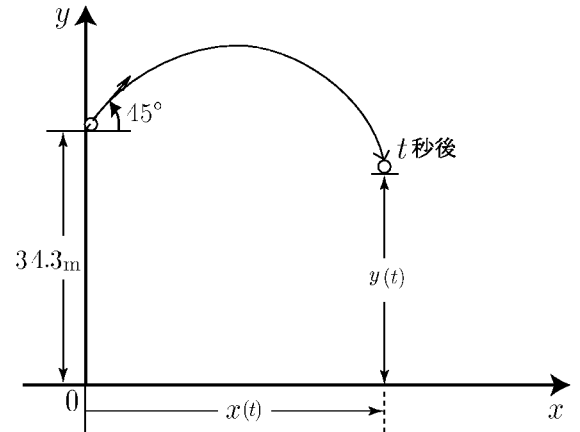
## < 速度の応用 3 >

問 地上 34.3m の高さから物体を  
45° の角度で投げ上げた。

$t$  秒後の位置  $(x(t), y(t))$  は

$$\begin{cases} x(t) = 29.4t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 & (\text{垂直距離}) \end{cases}$$

であるとする。



(1)  $t$  秒後の水平速度  $v_x(t)$ 、垂直速度  $v_y(t)$  を求めよ。

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \quad , \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} =$$

(2) 最高点に達するのは何秒後か？

(3) 最高点の高さとそのときの水平距離を求めよ。

高さ =

水平距離 =

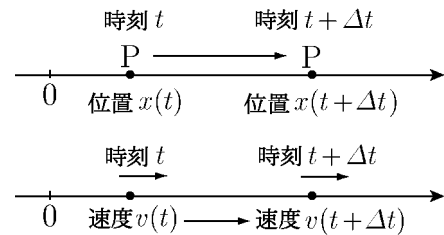
(4) 地上に落下するのは何秒後か？

(5) 落下したときの水平距離を求めよ。

## < 加速度 1 >

数直線上を動く点 P の時刻  $t$  における位置を  $x(t)$  とすると、その瞬間の速度  $v(t)$  は

$$v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (\text{速度})$$



であった。速度  $v(t)$  は時刻  $t$  によって変化する。時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  までの速度の変化率

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad : \quad \text{平均の加速度}$$

を平均の加速度という。瞬間の速度と同様にして、「時刻  $t$  における瞬間の速度の変化率」を考える。平均の加速度の式で  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限

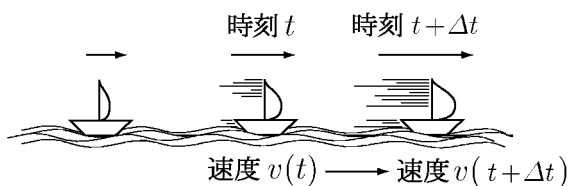
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

を考え、その極限値を「時刻  $t$  における瞬間の加速度」とする。この極限の式は  $v(t)$  の導関数  $v'(t)$  と同じ式である。すなわち

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (\text{時刻 } t \text{ における瞬間の加速度})$$

速度  $v(t)$  を微分したもの ( $= v'(t)$ ) が「瞬間の加速度」である。

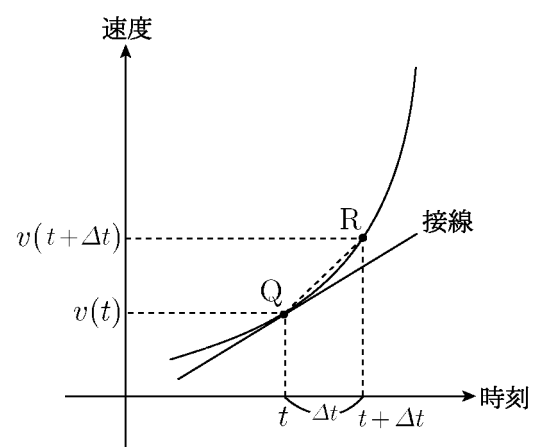
例 湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。



時刻  $t$  における速度  $v(t)$  のグラフが右図の場合

$$\text{平均の加速度} \quad \left( \begin{array}{l} t \text{ から } t + \Delta t \text{ まで} \\ \text{の速度の上昇率} \end{array} \right) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \text{線分 QR の傾き}$$

$$\text{瞬間の加速度} \quad \left( \begin{array}{l} \text{時刻 } t \text{ での} \\ \text{速度の上昇率} \end{array} \right) = v'(t) = \text{点 Q における接線の傾き}$$



## < 加速度 2 >

数直線上を動く点の時刻  $t$  における位置を  $x(t)$ 、速度を  $v(t)$  とすると、 $v(t)$  の導関数  $v'(t)$  が時刻  $t$  における「瞬間の加速度」であった。今後単に「加速度」と書けば常に「瞬間の加速度」を表すことにする。

加速度を英語で *acceleration* と書くので、加速度を表す記号として  $a$  を使う。つまり時刻  $t$  における加速度を

$$\boxed{a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}} \quad (\text{時刻 } t \text{ における加速度})$$

と書くことにする。速度  $v(t)$  と位置  $x(t)$  の関係

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

より

$$a(t) = x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

である。

(注) 運動する点の位置  $x(t)$ 、速度  $v(t)$ 、加速度  $a(t)$  は時間変数  $t$  を省略して、位置  $x$ 、速度  $v$ 、加速度  $a$  と略記する場合がある。

例 時刻  $t$  における位置  $x(t)$  が  $x(t) = 5 - 2t + 3t^2 - 4t^3$  である点の速度  $v$  と加速度  $a$  は

$$v(t) = (5 - 2t + 3t^2 - 4t^3)' = -2 + 6t - 12t^2$$

$$a(t) = (-2 + 6t - 12t^2)' = 6 - 24t$$

問1  $x(t)$  が以下の場合に、速度  $v(t)$  と加速度  $a(t)$  を求めよ。

(1)  $x(t) = 1 - t + 2t^2 - 3t^3$  ,  $v(t) =$  ,  $a(t) =$

(2)  $x(t) = 2 \cos(3t)$  ,  $v(t) =$  ,  $a(t) =$

(3)  $x(t) = e^{2t} \sin(2t)$  ,  $v(t) =$  ,  $a(t) =$

問2  $x(t) = 3 \cos(-2t)$  のとき、速度  $v(t)$  と加速度  $a(t)$  を求め、 $a(t)$  を  $x(t)$  で表せ。

## < 加速度 3 >

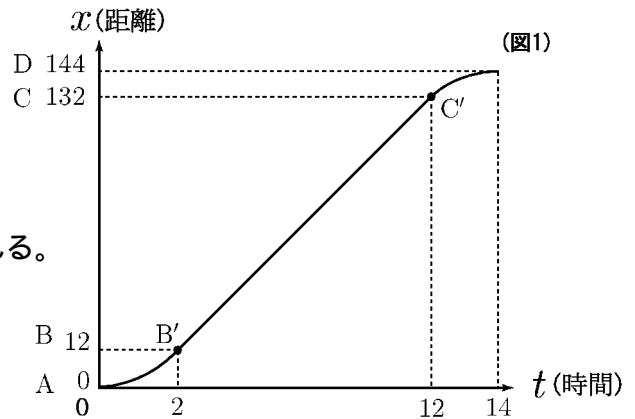
例 1 29 ページの例を考える。

$t$  秒間に走った距離を  $x$

とすると  $x$  のグラフは図 1 のように

なる。今  $x$  が以下のような式で表される。

$$x = \begin{cases} 3t^2 & : 0 \leq t \leq 2 \\ 12t - 12 & : 2 < t < 12 \\ 144 - 3(t - 14)^2 & : 12 \leq t \leq 14 \end{cases}$$



とする。この場合に速度、加速度は以下ようになる。

(1)  $0 \leq t \leq 2$  のとき (車が走り出すとき)

距離  $x = 3t^2$

速度  $v = \frac{dx}{dt} = 6t$

加速度  $a = \frac{dv}{dt} = 6$

(2)  $2 < t < 12$  のとき (等速度で運転しているとき)

距離  $x = 12t - 12$

速度  $v = \frac{dx}{dt} = 12$

加速度  $a = \frac{dv}{dt} = 0$

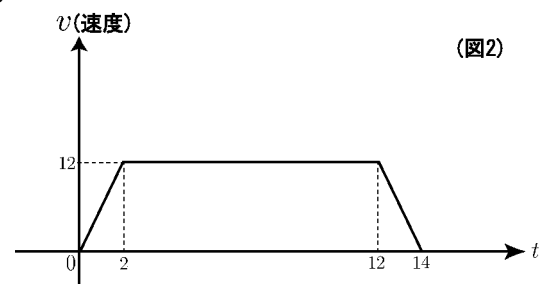
(3)  $12 \leq t \leq 14$  のとき (ブレーキで止めようとするとき)

距離  $x = 144 - 3(t - 14)^2$

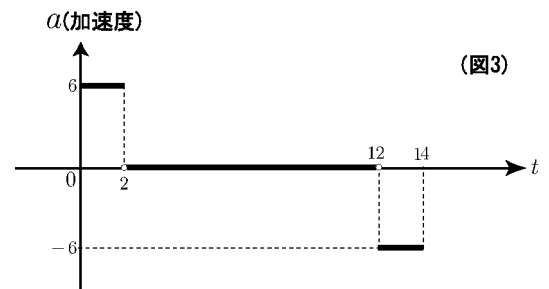
速度  $v = \frac{dx}{dt} = -6(t - 14)$

加速度  $a = \frac{dv}{dt} = -6$

(図 2)



(図 3)



以上をまとめると、速度  $v$  は図 2 のようになり、加速度  $a$  は図 3 のようになる。

(1) 車が走り出すとき ( $0 \leq t \leq 2$  の間) 速度はだんだん速くなる (加速している = 加速度はプラス)

(2) 車が等速で走っているとき ( $2 < t < 12$ ) は加速度は 0 (ゼロ) である。

(3) 車が止めようとするとき ( $12 \leq t \leq 14$ ) 速度はだんだん遅くなる (減速している = 加速度はマイナス)

例 2 33 ページの問の場合には

水平方向の加速度  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(14.7) = 0$  (加速度 0)

垂直方向の加速度  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-9.8t + 19.6) = -9.8$  (= 重力加速度)

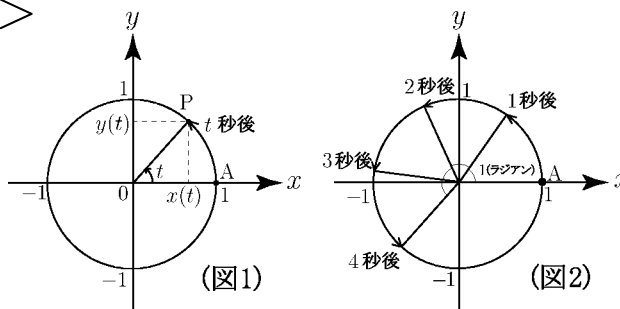
問 34 ページの問の場合に、水平方向の加速度  $a_x$  と垂直方向の加速度  $a_y$  を求めよ。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} =$$

## < 等速円運動 1 >

### 例 1

原点を中心として  
半径 1 の円周上を  
点 P が等速度回転して  
いる。点 A(1,0) から



出発して、 $t$  秒後に  $t$ (ラジアン) だけ回転するとすれば (図 1)

$$\text{角の回転速度 (角速度)} = \frac{t(\text{ラジアン})}{t(\text{秒})} = 1(\text{ラジアン / 秒}) = 1(\text{rad/s})$$

である。つまり 1 秒間に  $1(\text{ラジアン}) = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$  回転する。(図 2)

図 1 より  $t$  秒後の点 P の位置を  $P(x(t), y(t))$  とすると三角関数の定義より

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin t$$

である。

例 2 点 P は図 3 の円周上を点 A  
から出発して等速度回転している。  
 $t$  秒後に  $3t$ (ラジアン) だけ回転  
するとすれば

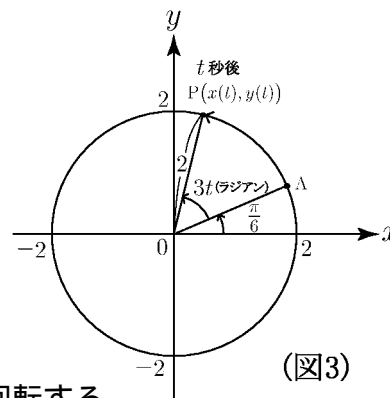
$$\text{角速度} = \frac{3t(\text{ラジアン})}{t \text{ 秒}} = 3(\text{rad/s})$$

である。つまり 1 秒間に  $3(\text{ラジアン}) \approx 171.9^\circ$  回転する。

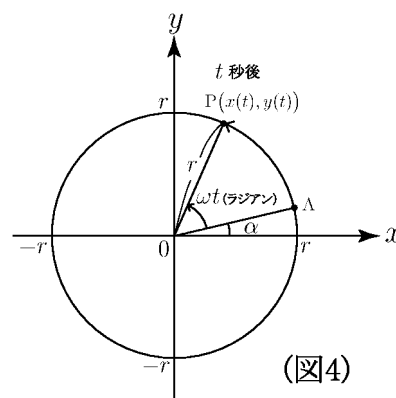
$t$  秒後の位置を  $P(x(t), y(t))$  とすると、9 ページの極座標表示より

$$x(t) = 2 \cos \left( 3t + \frac{\pi}{6} \right) \quad , \quad y(t) = 2 \sin \left( 3t + \frac{\pi}{6} \right)$$

である。



問 原点を中心として半径  $r$  の円周上を  
点 P は等速度回転している (図 4)。  
点 A から出発し、 $t$  秒後に  $\omega t$ (ラジアン)  
だけ回転しているとする。(ただし  
 $\omega$ (オメガ) は定数)。



(1) 角速度を求めよ。

(2)  $t$  秒後の点 P の位置  $(x(t), y(t))$  を求めよ。

## < 等速円運動 2 >

- 例 1 原点を中心として半径 1 の円周上を点 P が動く。点 A(1,0) から出発して角速度 1 (rad/s) (= 1 秒間に 1 ラジアン  $\cong 57.3^\circ$  回転) で等速回転しているとき、 $t$  秒後の点 P の位置  $(x(t), y(t))$  は前ページより

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin t$$

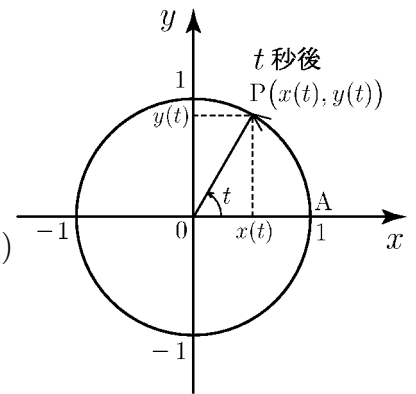
であった。この点 P の  $x$  軸方向の速度  $v_x$  と  $y$  軸方向の速度  $v_y$  は

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

であり、 $x$  軸方向の加速度  $a_x$  と  $y$  軸方向の加速度  $a_y$  は

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin t) = -\cos t \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

となる。



- 例 2 原点を中心として半径 2 の円周上を点 P が動く。点 B(2,0) から出発して角速度 1 (rad/s) で等速回転しているとき、 $t$  秒後の点 P の位置  $(x(t), y(t))$  は

$$x(t) = 2 \cos t \quad , \quad y(t) = 2 \sin t$$

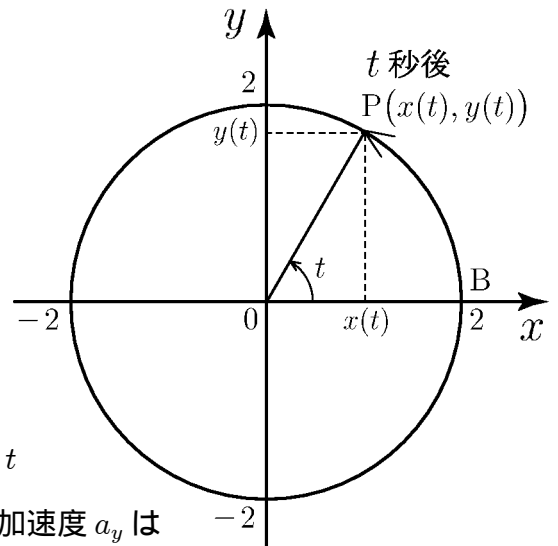
となる。点 P の  $x$  軸方向の速度  $v_x$  と  $y$  軸方向の速度  $v_y$  は

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2 \sin t \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

であり、 $x$  軸方向の加速度  $a_x$  と  $y$  軸方向の加速度  $a_y$  は

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2 \cos t \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2 \sin t$$

となる。



- (注) 例 1 と例 2 は同じ角速度 (= 1 (rad/s)) で回転しているが、円周上を回る点 P の速度 (および加速度) は半径によってちがう。例 2 の方が例 1 の 2 倍になっている。

- 問 上の例で半径が  $r$  の場合には  $x(t) = r \cos t$  ,  $y(t) = r \sin t$  となる。このとき速度  $v_x$  ,  $v_y$  および加速度  $a_x$  ,  $a_y$  を求めよ。

## < 等速円運動 3 >

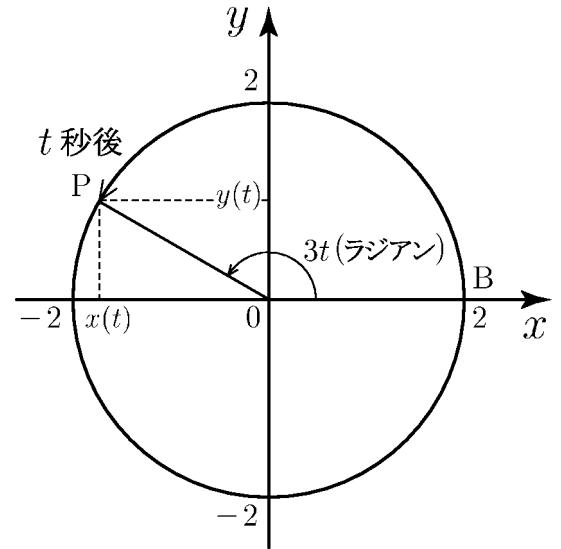
- 問 1 原点を中心として半径 2 の円周上を点 P が動く。点 B(2, 0) から出発して角速度 3 (rad/s) (= 1 秒間に 3 ラジアン ( $\cong 171.9^\circ$ ) 回転) で等速回転しているとき、点 P の  $t$  秒後の位置  $(x(t), y(t))$  は

$$x(t) = 2 \cos(3t) \quad , \quad y(t) = 2 \sin(3t)$$

である。このとき速度  $v_x, v_y$  および加速度  $a_x, a_y$  を求めよ。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} =$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} =$$



- 問 2 原点を中心として半径  $r$  の円周上を点 P が動く。点 A( $r, 0$ ) から出発して角速度  $\omega$  (rad/s) (= 1 秒間に  $\omega$  ラジアン ( $\cong \omega \times 57.3^\circ$ ) 回転) で等速回転しているとき、点 P の  $t$  秒後の位置  $(x(t), y(t))$  は

$$x(t) = r \cos(\omega t) \quad , \quad y(t) = r \sin(\omega t)$$

である。このとき速度  $v_x, v_y$  および加速度  $a_x, a_y$  を求めよ。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} =$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} =$$

