高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series **A**

No. **7**

内容

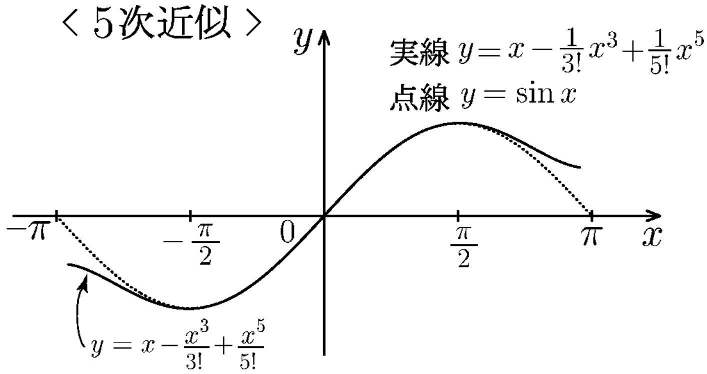
◎　高階導関数

◎　関数の近似

◎　テーラー展開

◎　マクローリン展開

◎　複素数



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

< 指数の復習 >

$a > 0, m$ が整数、n が正の整数のとき

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$: a の n 乗根 (n 乗して a になる正の数)

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$: a の (正の) 平方根

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$: 負の指数

$a^0 = 1$: ゼロ乗 $= 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$: 分数指数

〈指数法則〉 $a > 0$, $b > 0$, p と q は実数

1. $a^p \times a^q = a^{p+q}$, 2. $a^p \div a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{pq}$, 4. $(ab)^p = a^p b^p$

例 (1) $8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$, (2) $9^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(\sqrt{9})^3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

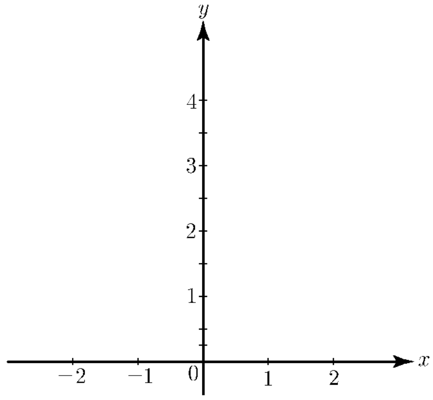
問 1 次の値を求めよ。

(1) $8^{\frac{1}{3}}$ (2) 5^0 (3) 2^{-3} (4) $9^{-\frac{1}{2}}$

(5) $64^{\frac{4}{3}}$ (6) $27^{-\frac{2}{3}}$ (7) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ (8) $(0.0001)^{-0.75}$

問 2 下の表を完成し、右に $y = 2^x$ のグラフを描け。

x	-2	-1	0	1	2
2^x					



＜ 対数の復習 ＞

$a>0$, $a\neq 1$ とする。正の数 M に対し $a^x=M$ をみたす実数 x を

$$x=\log_a M \quad (\Longleftrightarrow a^x=M)$$

と書き、a を底とする M の対数という。

例 1 $3=\log_2 8 \quad (\Longleftrightarrow 2^3=8)$

記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{を何乗すれば}\bigcirc\text{になるか？}}$ という意味である。

例 2 (1) $\log_2 32=\log_2(2^5)=5$

(2) $\log_9 3=\log_9(\sqrt{9})=\log_9\left(9^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$

(3) $\log_4 0.5=\log_4\left(\dfrac{1}{2}\right)=\log_4\left(\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)=\log_4\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$

〈対数の性質〉 $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$, p **は実数**

(1) $\log(M\times N)=\log_a M+\log_a N$, (2) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a(M^p)=p\times\log_a M$

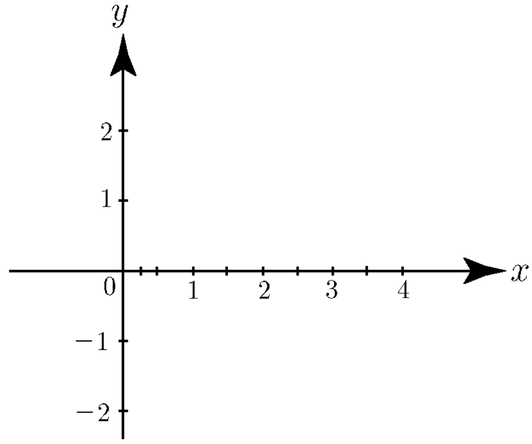
問 1 次の値を求めよ。

(1) $\log_2 16$ (2) $\log_7 49$ (3) $\log_2 1$ (4) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$

(5) $\log_{81} 3$ (6) $\log_{32} 4$ (7) $\log_{10}(0.01)$ (8) $\log_5(0.2)$

問 2 下の表を完成し
$y=\log_2 x$ の
グラフを描け。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$					



＜ e の復習 ＞

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2\,,\ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25\,,\ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37\,,\ \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59\,,\ \cdots,\ a_{100} \fallingdotseq 2.70\,,\ \cdots,\ a_{1000} \fallingdotseq 2.716\,,\ \cdots,\ a_{10000} \fallingdotseq 2.718\,,\ \cdots$$

となり、少しずつ増えながら一定の値に近づく。その極限値を e で表す。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845\cdots$$

e は無理数であることが知られている。

e の定義から次の極限の式が導かれる。

$$\boxed{(1)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad , \qquad (2)\ \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

これらの式から e^x や $\log_e x$ の導関数の公式が導かれる。

底が e である対数を自然対数と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log x = \log_e x} \text{ (自然対数)}$$

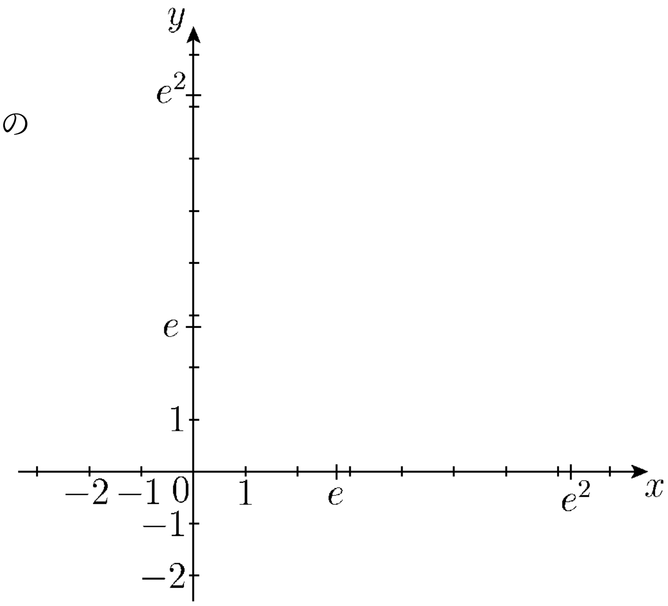
例 $\log(e^2) = \log_e(e^2) = 2$

$\log\left(\dfrac{1}{e}\right) = \log_e(e^{-1}) = -1$

問 下の表を完成し、$y = e^x$ と $y = \log x$ のグラフを右の座標平面に描け。

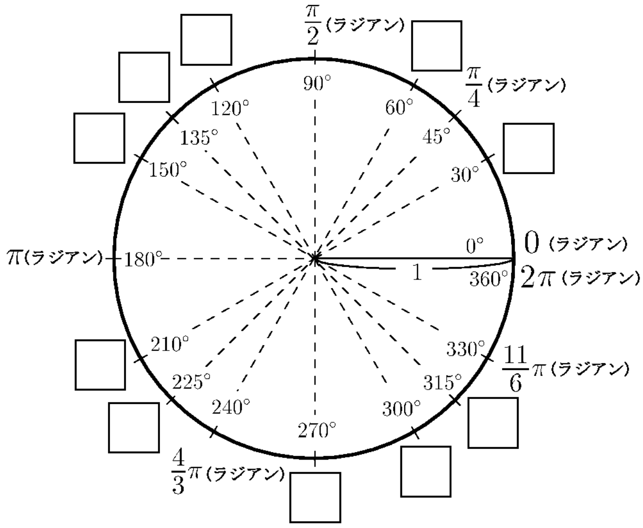
x	-2	-1	0	1	2
e^x					

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
$\log x$					



＜三角関数の復習 1＞

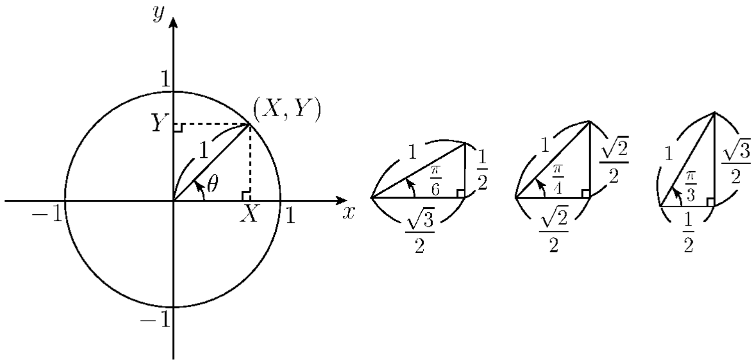
問 1 右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。
この円の外の □ 内に弧度法による角度を記せ。
(ただし単位ラジアンは省略してよい)



問 2 右図の場合に

$$\sin\theta = Y$$
$$\cos\theta = X$$
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。右の直角三角形の辺の長さを参考にして、下の表を完成せよ。



角度 θ										
	度数法	0°		45°	60°		120°		150°	180°
	弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		
$\sin\theta$										
$\cos\theta$										
$\tan\theta$						╳				

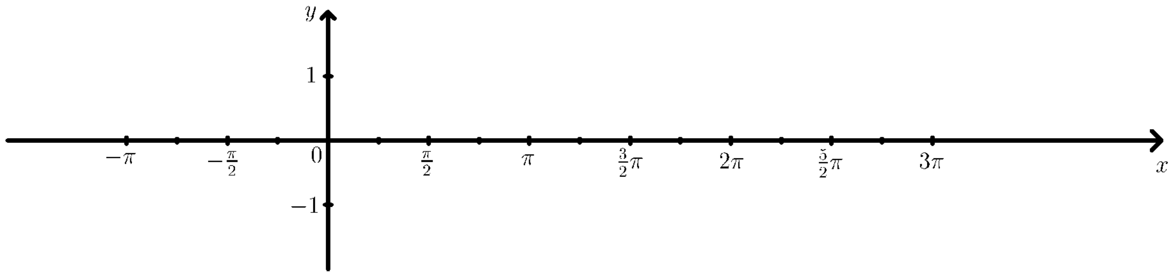
角度 θ									
	度数法		225°		270°			330°	
	弧度法	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		2π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$					╳				

＜三角関数の復習 2＞

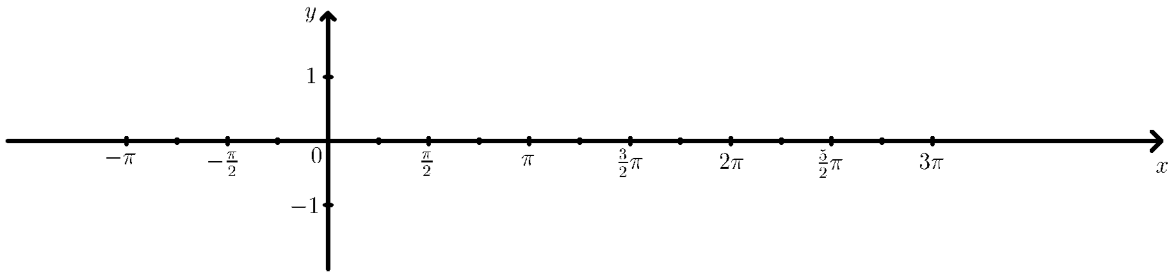
問　表を完成し、$y=\sin x$ と $y=\cos x$ および $y=\tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法		$-135°$		$-45°$	$0°$		$90°$		$180°$	$225°$		$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$		2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y=\sin x$

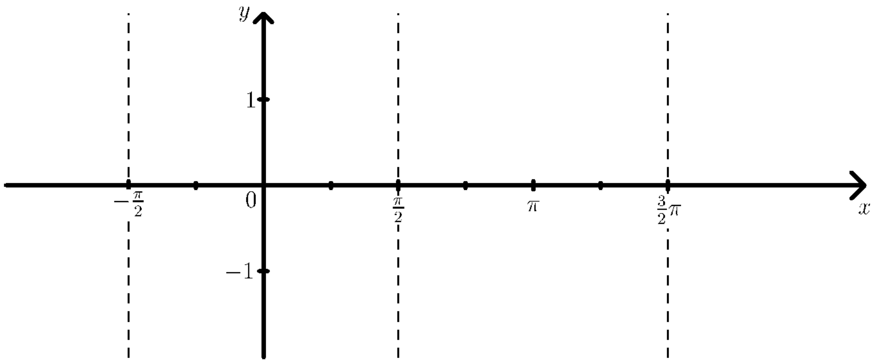


(2) $y=\cos x$



x																		
x	度数法	$-90°$		$-45°$		$0°$	$30°$		$60°$		$120°$		$150°$			$225°$		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		╳								╳								╳

(3) $y=\tan x$



< 微分の復習 1 >

x の関数 $f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。実数 r に対し $f(x) = x^r$ のときは

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

である。

例 1 ① $(1)' = (x^0)' = 0 \times x^{-1} = 0$

② $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

x の関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し

$$\begin{aligned} \big(f(x)+g(x)\big)' &= f'(x)+g'(x) \\ \big(kf(x)\big)' &= kf'(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。

例 2 ③ $(4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)' = 4(x^3)' - 5(x^2)' + 6(x)' - 7 \times (1)'$

$= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 6 \times 1 - 7 \times 0 = 12x^2 - 10x + 6$

④ $\left(\frac{x^2+2x-3}{x}\right)' = (x + 2 - 3x^{-1})' = 1 + 0 - 3 \times (-1 \times x^{-2})$

$= 1 + \frac{3}{x^2}$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $(x^3 + x^2)'$ (2) $(3x^4 - 2x + 1)'$ (3) $(\sqrt[5]{x})'$

(4) $\left(\frac{1}{x}\right)'$ (5) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ (6) $(x^2\sqrt{x})'$

(7) $\left(\frac{2}{x^3}\right)'$ (8) $\left(\frac{x^3-2x^2-1}{x^2}\right)'$ (9) $\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}\right)'$

< 微分の復習 2 >

三角関数、指数・対数関数の導関数は

$$(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(e^x)' = e^x \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

である。x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積と商の関数の微分は

$$\bigl(f(x)\times g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\bigl(g(x)\bigr)^2} \quad , \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\bigl(g(x)\bigr)^2}$$

である。

例 (1) $(x^5\cos x)' = (x^5)'\times\cos x + (x^5)\times(\cos x)' = 5x^4\cos x - x^5\sin x$

(2) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\times\cos x - \sin x\times(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x\times\cos x - \sin x\times(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $x\cos x$ (2) $e^x\sin x$ (3) xe^x

(4) $x - x\log x$ (5) $\dfrac{1}{1-x}$ (6) $\dfrac{x}{1-x}$

(7) $\dfrac{2}{x^2+x}$ (8) $\dfrac{1}{e^x}$ (9) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

＜微分の復習 3 ＞

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ は $u=g(x)$ とおくと

$$y \;=\; f(u) \quad , \quad u \;=\; g(x)$$

より

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = \big(f(u)\big)'\times\big(g(x)\big)' = f'(u)\times g'(x) = f'\big(g(x)\big)\times g'(x)}$$

例 (1) $y=\sin(3x+4)$ の微分は、$3x+4=u$ とおくと $y=\sin u$ より

$$\begin{aligned}\big(\sin(3x+4)\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} &= (\sin u)'\times(3x+4)' \\ &= \cos(u)\times 3 = 3\cos(3x+4)\end{aligned}$$

(2) $y=e^{x^2+1}$ の微分は、$x^2+1=u$ とおくと $y=e^u$ より

$$(e^{x^2+1})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = (e^u)'\times(x^2+1)' = e^u\times(2x) = 2xe^{x^2+1}$$

(3) $y=(4x^2-3x)^7$ の微分は、$4x^2-3x=u$ とおくと $y=u^7$ より

$$\begin{aligned}\big((4x^2-3x)^7\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} &= (u^7)'\times(4x^2-3x)' = 7u^6\times(8x-3) \\ &= 7(8x-3)(4x^2-3x)^6\end{aligned}$$

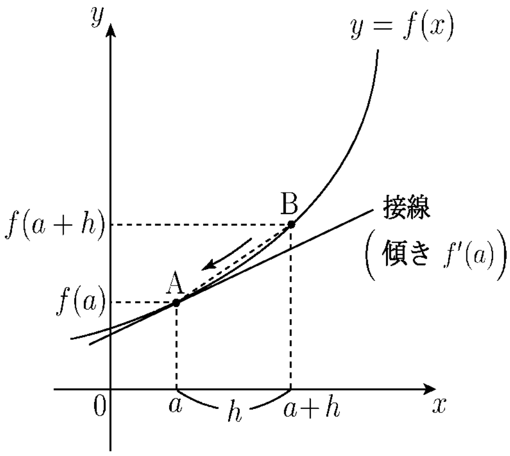
問 次の関数を微分せよ。

(1) $\cos(1-x)$ (2) $\sin(x^2+2)$ (3) e^{x^3}

(4) $(2x+1)^5$ (5) $\sqrt{2x-5}$ (6) $\sin(2x)+e^{x-1}$

(7) $e^{2x}\cos(2x)$ (8) $e^{1-x}\sin(3x)$ (9) $\cos(2x)\sin(-3x)$

< 接線の傾き 1 >



関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で、$x = a$ の値

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を $x = a$ における微分係数という。

右図において直線 AB の傾きが $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ であり、h を限りなく小さくした極限値 $f'(a)$ は点 A における接線の傾きを表す。

例　$f(x) = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようである。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

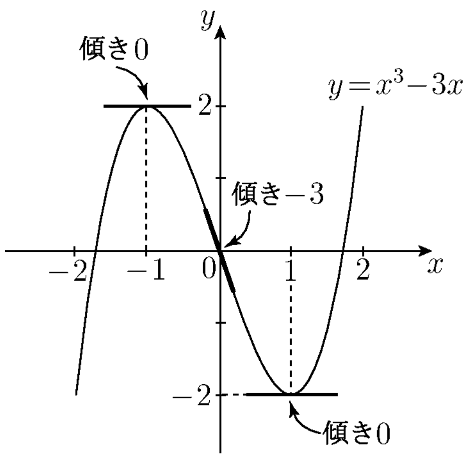
であるから、$y = x^3 - 3x$ のグラフにおいて

$x = 1$ における接線の傾きは $f'(1) = 0$

$x = 0$ における接線の傾きは $f'(0) = -3$

$x = -1$ における接線の傾きは $f'(-1) = 0$

となる。



問　$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 24x^2 + 48$ の導関数を求め、下の値を求め、$y = 3x^4 - 20x^3 + 24x^2 + 48$ のグラフの概形を右に描け。

$f'(x) =$

$f(5) =$　　　, $f'(5) =$

$f(4) =$　　　, $f'(4) =$

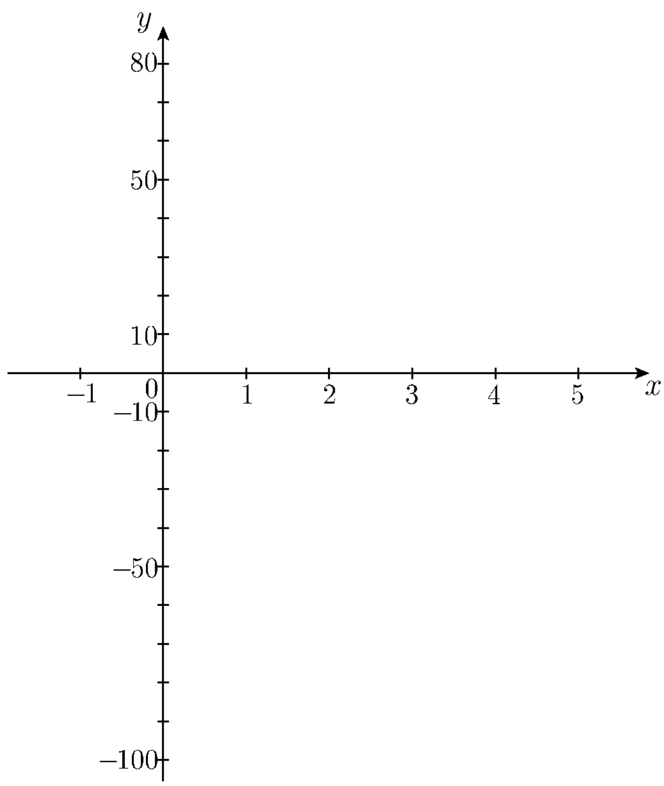
$f(3) =$　　　, $f'(3) =$

$f(2) =$　　　, $f'(2) =$

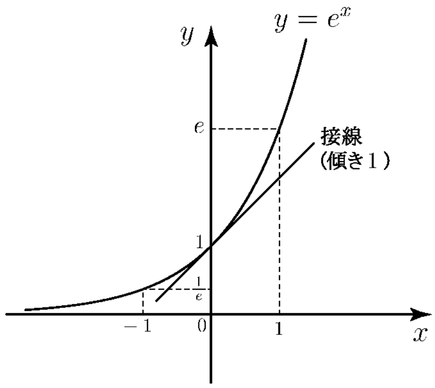
$f(1) =$　　　, $f'(1) =$

$f(0) =$　　　, $f'(0) =$

$f(-1) =$　　　, $f'(-1) =$



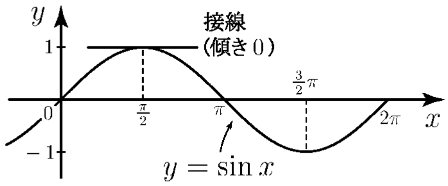
＜ 接線の傾き 2 ＞



例 1 $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ より

$f'(0) = e^0 = 1$ であるから

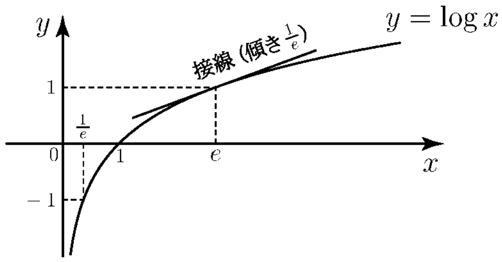
$y = e^x$ の $x = 0$ における接線の傾きは 1



例 2 $f(x) = \sin x$ のとき $f'(x) = \cos x$ より

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における接線の傾きは 0



例 3 $f(x) = \log x$ のとき $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より

$f'(e) = \dfrac{1}{e}$ であるから

$y = \log x$ の $x = e$ における接線の傾きは $\dfrac{1}{e}$

問 次の関数のグラフの接線の傾きを求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 1$ における接線の傾き

(2) $y = e^x$ の $x = -1$ における接線の傾き

(3) $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ における接線の傾き

(4) $f(x) = \sin x$ の $x = \pi$ における接線の傾き

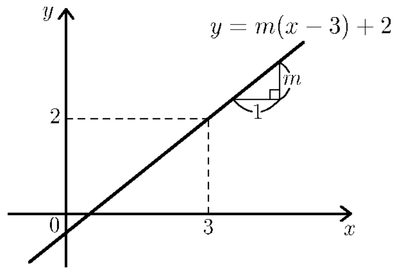
(5) $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ における接線の傾き

(6) $f(x) = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の傾き

(7) $f(x) = \log x$ の $x = 1$ における接線の傾き

(8) $f(x) = \log x$ の $x = 2$ における接線の傾き

＜ 接線の方程式 1 ＞

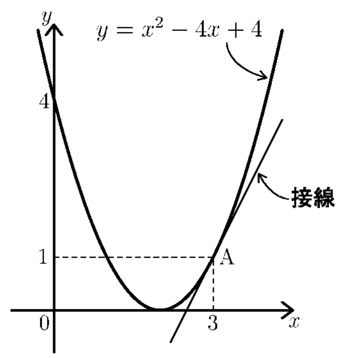


例 1 m を定数とする関数

$$y = m(x-3)+2$$

は、$x=3$ のとき $y=2$ であるから、
点 $(3,2)$ を通り、傾き m の直線の方程式を意味する。

問 1 a, b, m を定数とする。**点 (a, b) を通り、傾き m の直線**の方程式を求めよ。
(答)



例 2 関数 $y = x^2-4x+4$ のグラフ上の点 A$(3,1)$ における接線の方程式を求めたい。
$f(x) = x^2-4x+4$ とおくと、<u>接線の傾き m は $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ である。</u>

$$f'(x) = (x^2-4x+4)' = \underset{\substack{\| \\ 2x}}{\underline{(x^2)'}} - 4\times \underset{\substack{\| \\ 1}}{\underline{(x)'}} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\underline{(4)'}} = 2x-4$$

より

$$m = f'(3) = 2\times 3 - 4 = 2$$

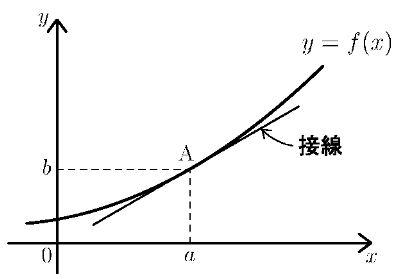
となる。点 A$(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y = m(x-3)+1$ だから

$$y = m(x-3)+1 = 2(x-3)+1 = 2x-5$$

より、接線の方程式は <u>$y = 2x-5$</u> となる。

問 2 $y = x^3 - x^2 + 1$ 上の点 A$(1,1)$ における接線の方程式を求めよ。

問 3 一般の関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 A(a,b) における接線の傾きは $f'(a)$ である。接線の方程式を求めよ。



＜ 接線の方程式 2 ＞

前ページの結果より $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)} \qquad \text{(接線の方程式)}$$

例 1 $f(x) = e^{2x}$ のとき $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2e^0 = 2$

よって $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1 \text{ より } \underline{y = 2x + 1} \text{ (接線)}$$

例2 $f(x) = \log x$ のとき $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x-e) + f(e) = \frac{1}{e}(x-e) + 1 = \frac{1}{e}x \text{ より } \underline{y = \frac{1}{e}x} \text{ (接線)}$$

例3 $f(x) = \cos x$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x) = -\sin x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

よって $y = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \text{ より } \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}} \text{ (接線)}$$

例4 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

よって $y = \sqrt{x}$ の $x = 1$ における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ より } \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \text{ (接線)}$$

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = \dfrac{\pi}{6}$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \sqrt[3]{x}$ の $x = 1$ における接線

< 関数の一次近似 >

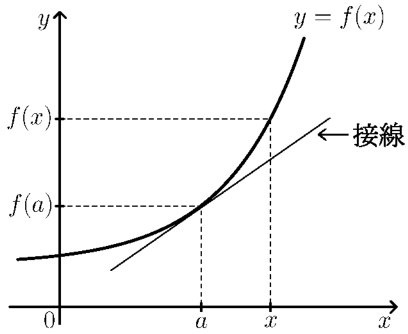
関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である。

$x = a + h$ とおけば、$h \to 0$ のとき $x \to a$ より

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき（$x \fallingdotseq a$ のとき）

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \fallingdotseq f'(a)$$



とみなせる。よって

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)}$$

が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、

これを**一次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \quad \text{（接線）}$$

を表すが、これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。

すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例 $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x) = \sqrt[3]{x}$ とおくと $f(a) = \sqrt[3]{a}$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ より } f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

であるから一次近似式は

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a)}$$

となる。ここで $a = 1$, $x = 1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1} \fallingdotseq \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0.1 = 1 + \frac{1}{30}$$

問 例にならって、$\sqrt{1.2}$ を近似せよ。

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ を x について微分したときに求められる関数 $f'(x)$ を導関数をいうことは既に知っていると思う。$f'(x)$ をさらに微分したものを $f''(x)$ あるいは $f^{(2)}(x)$ と書き、これを 2 階導関数と呼ぶ。実際に 2 階導関数を求めてみよう。

例題 1　$f(x) = x^3$ の 2 階導関数を求めよ。

(解)　$f'(x) = 3x^2$ より $f''(x) = 6x$ である。

問 1　次の関数の 2 階導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(3) $f(x) = \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

関数 $f(x)$ を 3 回微分したものを 3 階導関数と呼び $f'''(x)$ あるいは $f^{(3)}(x)$ で表す。

例題 2　$f(x) = x^3$ の 3 階導関数を求めよ。

(解)　例 1 より $f''(x) = 6x$　　よって　$f'''(x) = 6$ である。

問 2　次の関数について 3 階までの導関数を求めよ。

(1)　$f(x) = x^5 - x^3 + x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(2)　$f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(3)　$f(x) = x \log x - \dfrac{1}{x}$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(4)　$f(x) = e^{2x}$

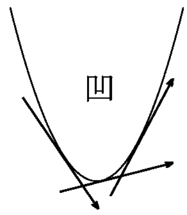
$f'(x) =$

$f''(x) =$

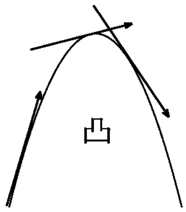
$f'''(x) =$

＜グラフの凹凸 1＞

[1] 関数 $f(x)$ の 2 階導関数が、ある x 範囲内で常に $\underline{f''(x) > 0}$ のとき、
$f'(x)$ の値は、この範囲内で増加する。
したがって、グラフは、右の図のように
接線の傾きが増加していく。
このようなとき、グラフは**凹**であるという。



[2] これに対し、$\underline{f''(x) < 0}$ である範囲内では、
$f'(x)$ の値は減少し、グラフでは、
右の図のように接線の傾きが減少していく。
このようなとき、グラフは**凸**であるという。



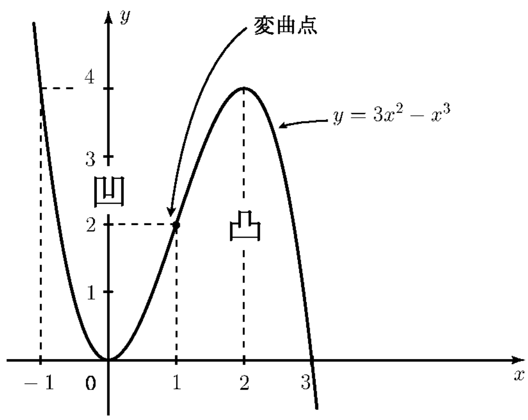
例 関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だからグラフの凹凸は $x = 1$ を境にして変わる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)



このグラフで凹凸の入れかわる点 (1, 2) を**変曲点**という

問 次の関数の 2 階導関数 y'' を求め、凹凸を表にせよ。

(1) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24$

$y'' =$

x	
y''	
y	

(2) $y = 3x^5 - 10x^3 + 6x$

$y'' =$

x	
y''	
y	

< グラフの凹凸 2 >

例 1　2 次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ は

$$y' = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

$$y'' = 2$$

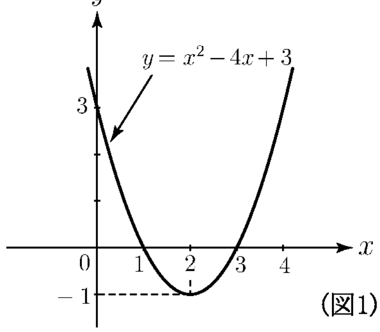
より、増減表と凹凸表は右のようになる。グラフは図 1 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$

(増減表)

x	$\cdots$
y''	$+$
y	凹

(凹凸表)



(図1)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$

例 2　2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 2$ は

$$y' = -2x - 2 = -2(x + 1)$$

$$y'' = -2$$

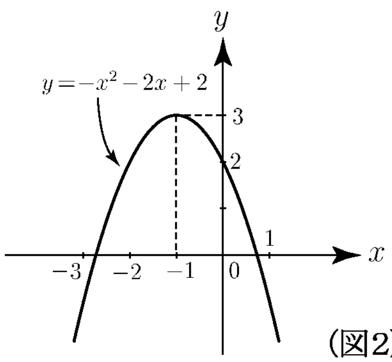
より、増減表と凹凸表は右のようになり、グラフは図 2 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

(増減表)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$

(凹凸表)

x	$\cdots$
y''	$-$
y	凸



(図2)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$

＜グラフの凹凸 3＞

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。
これを組み合わせると、下の表

増減表

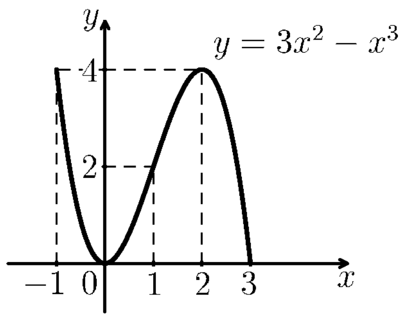
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

凹凸表

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘

のようになる。実際のグラフは右のようになる。



以上の考察から、y' と y'' の $+, -$ によって y のグラフは
次のようになる。

y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$+$ ↗	$-$ ↘
y''	$+$ 凹	$+$ 凹	$-$ 凸	$-$ 凸
y	↘	↗	↗	↘

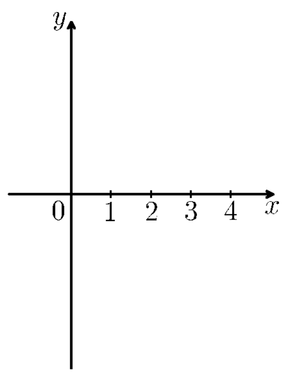
問 関数 $y = x^4 - 4x^3 + 20$ を 2 回微分し、
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$y' =$

$y'' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'							
y''							
y							



< 微分係数と極限値 >

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ の定義式

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad \text{(微分係数)}$$

を逆に利用して極限値を求めることができる。

例 1　極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ を求めたい。

$f(x) = \cos x$ とおくと $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$　　, $f'(0) = -\sin 0 = 0$ より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

例 2　極限 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ を求めたい。

$f(x) = x^5$ とおくと $f(1) = 1^5 = 1$

$f'(x) = 5x^4$　　, $f'(1) = 5 \times 1^4 = 5$ より

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

例 3　極限 $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e}$ を求めたい。

$f(x) = \log x$ とおくと $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$　　, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$ より

$$\lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e} = \lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = \frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

＜ロピタルの定理 1＞

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \qquad g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

である。もし $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるので

$$\boxed{\begin{array}{c} f(a)=g(a)=0 \\ \left(\frac{0}{0}\ \text{の型}\right)\end{array} \ \text{のとき}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

が成り立つ。これを**ロピタルの定理**という。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すると分母・分子共に 0 となるのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1}=5\times 1^4=5$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$ を求めたい。 $x=e$ を代入すると分母・分子共に 0 となるのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}-0}{1-0}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ロピタルの定理 2＞

前ページより $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のとき

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

がなり立つと書いたが正確には右辺の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $g'(a)=0$ であってもロピタルの定理はなりたつ。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すれば $\dfrac{0}{0}$ の形になるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\big((x-1)^2\big)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}3\times\frac{x^5-1}{x-1}$$

となるが、最後の式は前ページ例 1 より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=5$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=3\times\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=3\times 5=15$$

(注) 極限が $\dfrac{0}{0}$ の形であればロピタルの定理が何度でも使える。

上の例 1 は次のように計算してよい。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\big((x-1)^2\big)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{\big(2(x-1)\big)'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)}{(x-1)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5-5\times 2^4(x-2)}{(x-2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1-4(x-1)-6(x-1)^2}{(x-1)^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)-10(x-1)^2-10(x-1)^3}{(x-1)^4}$

＜ロピタルの定理 3＞

例 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$ を考える。

$x=a$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の形になるからロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\big)'}{\big((x-a)^2\big)'}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-\big(f(a)\big)'-\big\{f'(a)(x-a)\big\}'}{2(x-a)}=(*)$$

$f(a)$ は定数であるから $\big(f(a)\big)'=0$ また $f'(a)$ も定数だから

$\big\{f'(a)(x-a)\big\}'=f'(a)\times(x-a)'=f'(a)\times 1=f'(a)$ より

$(*)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}$ となる。ここで $x=a$ を代入すると再び $\dfrac{0}{0}$ の形になる

のでさらにロピタルの定理を使って

$$(*)=\lim_{x\to a}\frac{\big(f'(x)-f'(a)\big)'}{\big(2(x-a)\big)'}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

問 例のようにロピタルの定理を何回か使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 関数の高次近似 >

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから、これを **2 次近似式**という。

例 2 前のページの問 (1) の結果より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき } \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)$$

これを展開すると

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

$$\boxed{f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}$$

この式は x が a に限りなく近い場合に $f(x)$ を

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

に書き換えることができることを言っている。このような書き換えを
近似するという。この場合は 3 次式なので **3 次近似式**という。

問 前ページの問 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x\fallingdotseq a$ のとき $f(x)\fallingdotseq$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x), f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における**n階微分係数**という。

例 (1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、$x = 2$ における 4 階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80,\ f^{(2)}(2) = 160,\ f^{(3)}(2) = 240, f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \cos x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= -\sin x, & f^{(6)}(x) &= -\cos x, & f^{(7)}(x) &= \sin x, & f^{(8)}(x) &= \cos x \\ &= f^{(1)}(x) & &= f^{(2)}(x) & &= f^{(3)}(x) & &= f^{(4)}(x) \end{aligned}$$

より $x = 0$ における 8 階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1,\ f^{(7)}(0) = 0,\ f^{(8)}(0) = 1$$

問 (1) $f(x) = e^x$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、$x = 0$ における 4 階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、$x = 0$ おける n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \sin x$ の 8 階までの導関数 $\left(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)\right)$ を求め、$x = 0$ における 8 階までの微分係数 $\left(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)\right)$ を求めよ。

< 関数の n 次近似 1 >

22 ページの結果から、関数 $f(x)$ の 4 次近似式は

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は順に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \cdots$$

となるが、この分母の数は、21 ページの計算からロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり、

$$\big((x-a)^4\big)'''' = \big(4(x-a)^3\big)''' = \big(3\times4(x-a)^2\big)'' = \big(2\times3\times4(x-a)\big)' = 1\times2\times3\times4 = 24$$

である。つまり $24 = 1\times2\times3\times4$ と書ける。

ここで階乗の記号を使って式を見やすいものにする。階乗とは数字を順番に $1\times2\times3\times4\times5\times\cdots(n-1)\times n$ というふうに計算することで、 n までかけた時には $n!$ というふうに書く。

$24 = 1\times2\times3\times4$ ということは 4 までかけているので $4!$ と表す。

上の例の係数は

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{1\times2\times3},\ \frac{1}{1\times2\times3\times4}$$

ここで階乗の記号を使うと

$$\frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!}$$

と書くことができる。これを $f(x)$ の式に使って書くと

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

になる。(次のページに続く)

< 関数の n 次近似 2 >

前のページでは $f(x)$ は階乗の記号を使うと

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

というふうに書けることを説明した。

　さて、上の式について

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 \quad , \quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 \quad , \quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

同じ数字　　同じ数字　　同じ数字

という同じ数字が使われているパターンに気づくと思う。

したがって、 4 のところを n にして $f(x)$ を書き直すと、

> $x \fallingdotseq a$ のとき
>
> $$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

というふうになる。この式を ***n* 次近似式**という。

例　$f(x)=e^x$ のとき、 $f^{(n)}(x)=e^x$ より $f^{(n)}(4)=e^4$ である。

したがって $x \fallingdotseq 4$ における n 次近似式は

$x \fallingdotseq 4$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^4+e^4(x-4)+\frac{e^4}{2!}(x-4)^2+\frac{e^4}{3!}(x-4)^3+\cdots+\frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

問　$f(x)=e^x$ に対し、 $x \fallingdotseq a$ における n 次近似式を求めよ。

< テーラー展開 >

関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても、n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**テーラー展開**という。

例 $f(x)=e^x$ に対し、$f^{(n)}(x)=e^x$、$f^{(n)}(2)=e^2$

であるから、$x=2$ におけるテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

問 1 $f(x)=e^x$ に対し、$x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

問 2 $f(x)=e^x$ に対し、a が次の場合の $x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

(1) $a=1$

(2) $a=0$

< マクローリン展開 1 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー展開

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots}$$

をマクローリン展開という。前ページの問 2 (2) では $f(x)=e^x$ の
マクローリン展開を求めた。
すなわち

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots}$$

となる。

例 $f(x)=\cos(x)$ のとき、23 ページの例より

$$f^{(1)}(0)=0\ ,\ f^{(2)}(0)=-1\ ,\ f^{(3)}(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(6)}(0)=-1\ ,\ f^{(7)}(0)=0\ ,\ f^{(8)}(0)=1$$

で数列 $\left\{f^{(n)}(0)\right\}$ は、 $0,\ -1,\ 0,\ 1$ を 4 項おきに繰り返す。

又、 $f(0)=\cos 0=1$ だから $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開は

$$\boxed{\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots}$$

となる。

問 23 ページの結果を使って、 $f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

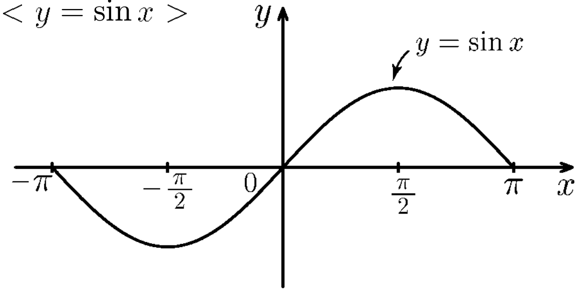
＜マクローリン展開 2＞

例 1　前ページより $\sin x$ のマクローリン展開は

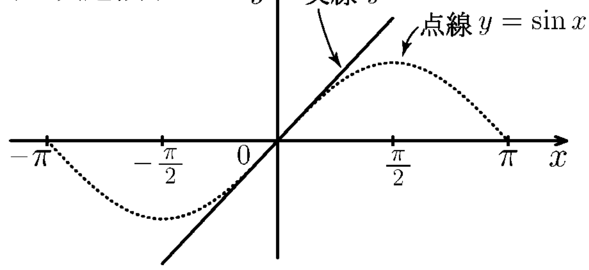
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

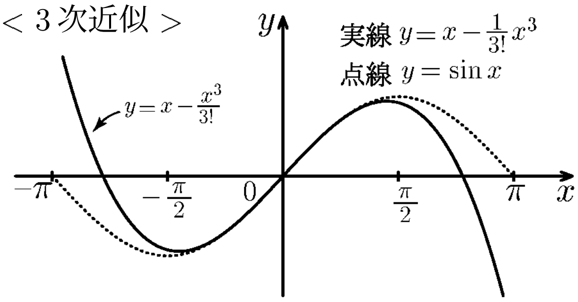
＜ $y = \sin x$ ＞



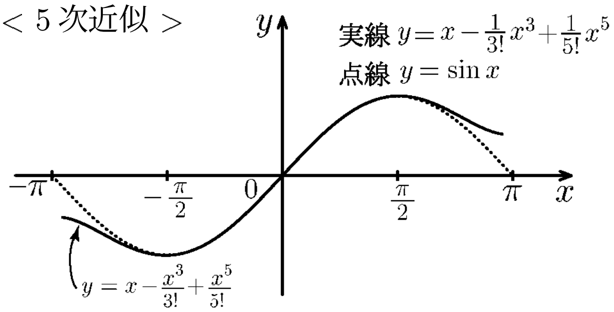
＜ 1 次近似 ＞



＜ 3 次近似 ＞



＜ 5 次近似 ＞

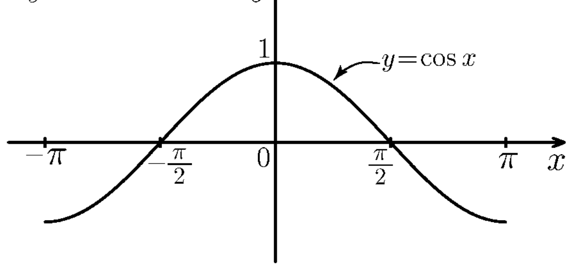


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

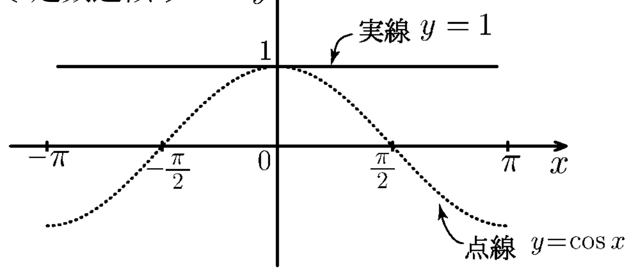
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

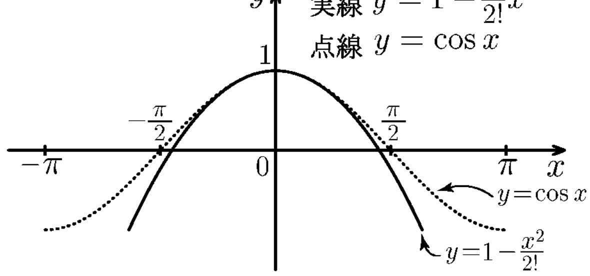
＜ $y = \cos x$ ＞



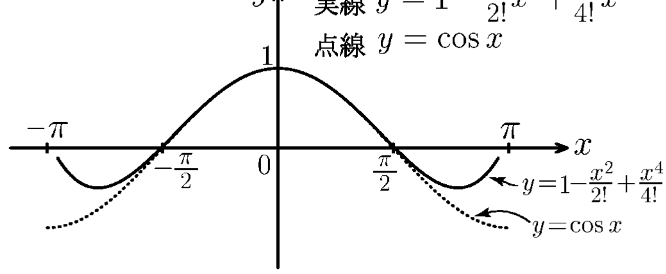
＜ 定数近似 ＞



＜ 2 次近似 ＞



＜ 4 次近似 ＞



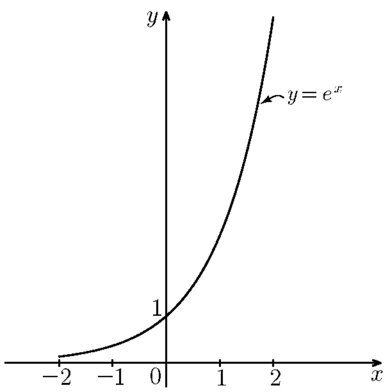
< マクローリン展開 3 >

指数関数 e^x のマクローリン展開は

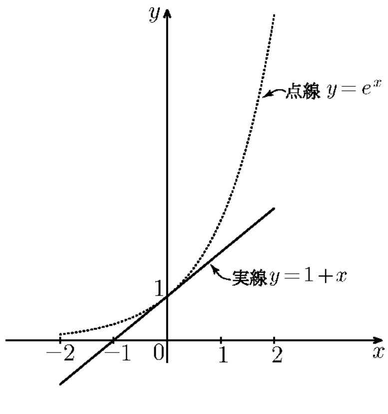
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように e^x のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

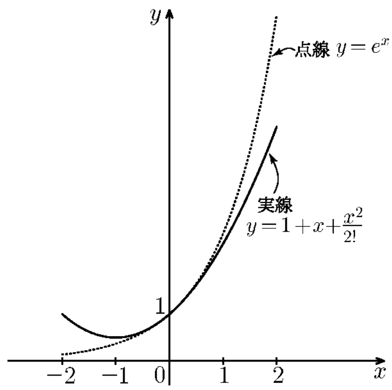
$< y = e^x >$



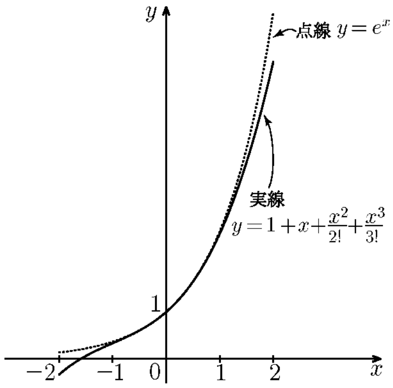
< 1 次近似 >



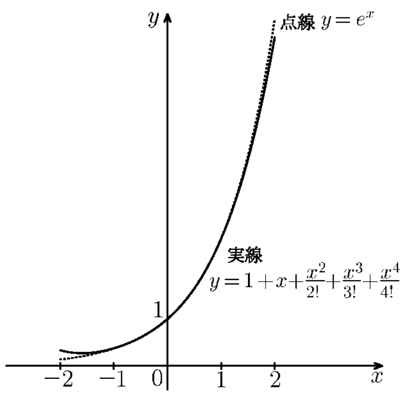
< 2 次近似 >



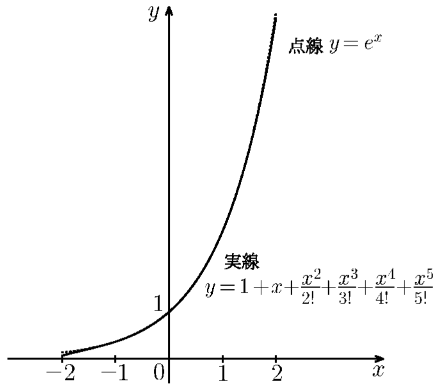
< 3 次近似 >



< 4 次近似 >



< 5 次近似 >



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式がなりたつ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

問 この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

となる。この式の右辺を計算することにより e の近似値を求めよ。

< 有理数 >

我々が、物心がついて最初に教わる数は、物を数えるのに必要な $1, 2, 3, \cdots$ という数である。これを **自然数** といい、自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ で表す。

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

この自然数に対し、いつでも引き算ができるように新しい数

零 : $\mathbf{0}$

および

負の整数 : $-1, -2, -3, -4, \cdots$

を導入し、自然数のことを **正の整数** ともよび、正負の整数と 0 をあわせた数を **整数** という。整数全体を集めた集合を $\boldsymbol{Z}$ で表す。

$$\boldsymbol{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

整数 a と b に対し、一次方程式

$$ax = b$$

をみたす数 x があるものとして、新しい数

$$x = \frac{b}{a}$$

を **分数** とよぶ。このようにして得られた分数と、整数とを合わせて **有理数** とよぶ。有理数全体の集合を $\boldsymbol{Q}$ で表す。分数は有限小数か循環小数で表される。

例 $\dfrac{3}{8} = 0.375$, $\dfrac{5}{12} = 0.41666\cdots = 0.41\dot{6}$

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $\dfrac{1}{15}$

< 実数 >

一辺１の正方形の対角線の長さ x は２次方程式

$$x^2 = 2$$

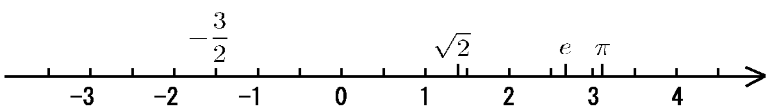
をみたすが、この式をみたす数 x は有理数ではない。この式を満足する x に相当する数も存在するものと考えて、この新しい数を

$$\sqrt{2} \quad \text{および} \quad -\sqrt{2}$$

で表す。このような数（有理数でない数 = 整数と整数の比で表されない数）を **無理数** とよび、有理数と無理数とを総称して **実数 (real number)** とよぶ。実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す。

- 実数 $(\boldsymbol{R})$
  - 有理数 $(\boldsymbol{Q})$
    - 整数 $(\boldsymbol{Z})$
      - 正の整数（自然数）$(\boldsymbol{N})$
      - 零　0
      - 負の整数
    - 分数
      - 正の分数
      - 負の分数
  - 無理数
    - 正の無理数 $\cdots$ $\sqrt{2}$, π , e （自然対数の底）など
    - 負の無理数 $\cdots$ $-\sqrt{3}$, $-\sin 1$, $-\log 2$ など

これらの実数は数直線上の点によって表現される。



無理数を小数で表現すると、循環しない無限小数になる。

問　有理数と無理数を区別せよ。

(1) $\sqrt{3}$　　(2) $\dfrac{e}{2.18}$　　(3) $\dfrac{1}{3}$　　(4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(5) $\dfrac{13}{100}$

< 虚数の導入 1 >

2 次方程式

(1) $$x^2 = -1$$

をみたす実数 x は存在しない。しかし、この方程式を
満足する数、つまり 2 乗すれば -1 となるような新しい数
があるものと考えることにして、それを $\boldsymbol{i}$ という記号で表す
ことにする。すなわち

$$i^2 = -1$$

である。

さらにこの新しい数 i に対しても、いままでの計算の
規則が成り立つと考えることにする。そうすれば

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

であるから

$x^2 = -1$ の解は i と $-i$ の 2 つである

と考えられる。

次に 2 次方程式

(2) $$x^2 = -9$$

を考える。この式の両辺を 3^2 で割ると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -1$$

であるから、いま導入した i を用いて

$$\frac{x}{3} = \pm\, i$$

より (2) の解は

$$x = 3i \quad \text{および} \quad x = -3i$$

という新しい数であるとするのがいいであろう。

問 次の 2 次方程式の解を i を用いて表せ。

(1) $x^2 = -25$　　(2) $4x^2 = -9$　　(3) $6x^2 = -2$

< 虚数の導入 2 >

２次方程式

$$(*) \qquad x^2 - 2x + 10 = 0$$

を考える。この式の両辺から 9 を引くと

$$x^2 - 2x + 1 = -9$$

$$(x-1)^2 = -9$$

となる。ここで

$$x - 1 = X$$

とおくと

$$X^2 = -9$$

となるから、前ページの i を用いて

$$X = 3i \quad \text{および} \quad X = -3i$$

すなわち

$$x - 1 = 3i \quad \text{および} \quad x - 1 = -3i$$

より $(*)$ 式の解は、新しい数

$$x = 1 + 3i \quad \text{および} \quad x = 1 - 3i$$

であると考えるのがいいであろう。
このような数

$$i, \ \ -i, \ \ 3i, \ \ -3i, \ \ 1+3i, \ \ 1-3i$$

等を総称して **虚数** と呼ぶ。２次方程式の解の範囲を虚数にまで拡張すれば、２次方程式は必ず解が存在する。

問 次の２次方程式の解を i を用いて表せ。（ただし $a,\ b,\ c$ は実数）

(1) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = -2$

(2) $x^2 - 6x + 12 = 0$

(3) $(x-a)^2 = -\dfrac{c^2}{b^2}$

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。（電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。）

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** (*complex number*) とよび、複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** (*real part*) および **虚部** (*imaginary part*) とよび、

$$a = \mathrm{Re}(z)\ ,\ b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0\ \text{のとき}\quad z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、z を **虚数** とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\textbf{複素数}\,(\boldsymbol{C})\begin{cases}\textbf{実数}\,(\boldsymbol{R}) \\ \textbf{虚数}\begin{cases}\textbf{純虚数} & \cdots\ 2i,\ \frac{1}{3}i,\ -\sqrt{2}i\ \textbf{など} \\ \textbf{その他の虚数} & \cdots\ 1+2i,\ -2+\sqrt{3}i\ \textbf{など}\end{cases}\end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

とくに $\quad a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$

例

(1) $a + bi = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ a = \sqrt{3},\ \ b = 0$

(2) $a + bi = -3i \ \Leftrightarrow\ a = 0,\ \ b = -3$

(3) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \ \Leftrightarrow\ a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問　次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1) $a + bi = \dfrac{1 - 3i}{2}$　　　(2) $a + bi = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}\, i$

＜複素数の四則演算 1＞

複素数の和（差）は実部どうしの和（差）と虚部どうしの和（差）にわけて計算すればよい。

> a, b, c, d が実数のとき
> $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
> $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

例 1　$(2+3i)+(4+5i)=(2+4)+(3+5)i=6+8i$

$(5+7i)-(8+i)=(5-8)+(7-1)i=-3+6i$

問 1　次式を簡単にせよ。

(1)　$(1+i)+(1-i)$

$=$

(2)　$(2-i)-(2-3i)$

$=$

(3)　$\left(0.25+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(\dfrac{3}{4}+0.5i\right)$

$=$

(4)　$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}i\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}i\right)$

$=$

(5)　$\left(\sqrt{2}-i\right)+(1+2i)$

$=$

(6)　$\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}i\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\sqrt{3}i\right)$

$=$

複素数の実数倍は、実部と虚部のそれぞれの実数倍となる。

> a, b, k が実数のとき
> $k(a+bi)=(ka)+(kb)i$

例 2　$2(1+4i)+5(3-2i)=(2+8i)+(15-10i)=17-2i$

問 2　次式を簡単にせよ。

(1)　$3(2-i)$

$=$

(2)　$\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$=$

(3)　$2(6-2i)-5(2-i)$

$=$

(4)　$\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}i\right)-\left(\dfrac{1}{3}-2i\right)$

$=$

< 複素数の四則演算 2 >

複素数どうしの積は通常の計算規則（分配法則）によって計算すればよいが、i^2 が出たところで $i^2=-1$ とおきかえて答を出す。

例

(1) $$\begin{aligned}(3+4i)(5+7i) &= 3\times 5+3\times 7i+4i\times 5+4i\times 7i\\ &= 15+21i+20i+28i^2\\ &= 15+41i-28\\ &= -13+41i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(3+5i)^2 &= 3^2+2\times 3\times 5i+(5i)^2\\ &= 9+30i+25i^2\\ &= 9+30i-25\\ &= -14+30i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(2+5i)^3 &= 2^3+3\times 2^2\times 5i+3\times 2\times (5i)^2+(5i)^3\\ &= 8+60i+150i^2+125i^3\\ &= 8+60i-150+125(i^2\times i)\\ &= -142+60i-125i\\ &= -142-65i\end{aligned}$$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $i^3=$ (2) $i^4=$ (3) $i^5=$

(4) $i^6=$ (5) $i^7=$ (6) $i^8=$

(7) $(1+i)(1-i)=$ (8) $(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=$

(9) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+i}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{3}\right)=$ (10) $(1+i)^2=$

(11) $(1-i)^2=$ (12) $(5+2i)(3-i)=$

(13) $(3-2i)(1-i)=$ (14) $(2-i)^3=$

＜複素数の四則演算 3＞

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

例

(1) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1 \times i}{i \times i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

(2) $\dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{1 \times (2-3i)}{(2+3i) \times (2-3i)} = \dfrac{2-3i}{4-(3i)^2} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

(3) $\dfrac{2+i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{(2+i) \times (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \times (1+\sqrt{3}i)} = \dfrac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\right)i$$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i} =$

(2) $\dfrac{1}{1-i} =$

(3) $\dfrac{i}{1-i} =$

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-i} =$

(5) $\dfrac{7}{2+\sqrt{3}i} =$

(6) $\dfrac{i}{1+i} =$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}i(\sqrt{2}+i)} =$

(8) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} =$

(9) $\dfrac{1}{(1-i)^2} =$

(10) $\dfrac{4}{(1+i)^4} =$

< 複素数の四則演算 3 >

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

例

(1) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1 \times i}{i \times i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

(2) $\dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{1 \times (2-3i)}{(2+3i) \times (2-3i)} = \dfrac{2-3i}{4-(3i)^2} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

(3) $\dfrac{2+i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{(2+i) \times (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \times (1+\sqrt{3}i)} = \dfrac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\right)i$$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i} =$

(2) $\dfrac{1}{1-i} =$

(3) $\dfrac{i}{1-i} =$

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-i} =$

(5) $\dfrac{7}{2+\sqrt{3}i} =$

(6) $\dfrac{i}{1+i} =$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}i(\sqrt{2}+i)} =$

(8) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} =$

(9) $\dfrac{1}{(1-i)^2} =$

(10) $\dfrac{4}{(1+i)^4} =$

＜負の数の平方根＞

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}i)^2 = -2\ , \quad (-\sqrt{2}i)^2 = -2$$

となるから、 -2 の平方根は $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\ , \quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}i$$

のように表すことにする。一般に

$$\boxed{a > 0 \text{ のとき} \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\ i}$$

と定める。

例１ $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

（注） $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)}\ \ (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになるときは、普通の $\sqrt{\ }$ の計算規則がなりたたない。 $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになる場合は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例２

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2 \times i}{3i \times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}i = \frac{2}{3}i$$

従って $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\dfrac{4}{-9}}$ である。

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(-1) \times (-2) \times (-3)}$

(2) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-4}}$

(4) $\sqrt{\dfrac{5}{-4}}$

< 2次方程式 >

実数 a, b, c $(a \neq 0)$ に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

が求まる。ここで $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになれば、答は虚数になる。虚数解も 2 次方程式の解と考えると、2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例　2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問　次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)　$x^2 + 3x + 3 = 0$　　　$x =$

(2)　$x^2 + 3x + 6 = 0$　　　$x =$

(3)　$2x^2 - x + 3 = 0$　　　$x =$

＜ 2 次式の因数分解 ＞

例 1　2 次式 $2x^2 - 16x + 30$ を因数分解すると

$$(*) \quad 2x^2 - 16x + 30 = 2(x^2 - 8x + 15) = 2(x-3)(x-5)$$

となる。ところで 2 次方程式

$$(**) \qquad 2x^2 - 16x + 30 = 0$$

の解は前ページの解の公式を使うと

$$x = 3 \quad \text{および} \quad x = 5$$

であるから、因数分解 $(*)$ を求めるために、2 次方程式 $(**)$ の解 3 と 5 を用いればよい。

一般に、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ は実数 }, a \neq 0)$$

の解が

$$x = \alpha \quad \text{および} \quad x = \beta$$

ならば

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

と因数分解できる。

例 2　2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

の解は解の公式を使うと

$$x = -\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \quad \text{および} \quad x = -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

であるから

$$3x^2 + 5x + 7 = 3\left(x - \left(-\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\right)$$

$$= 3\left(x + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\left(x + \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i\right)$$

問　次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2x + 3 =$

(2) $-2x^2 + 4x - 3 =$

(3) $3x^2 + 3x + 3 =$