高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2001年度版）

Series **A**

No. **6**

内容

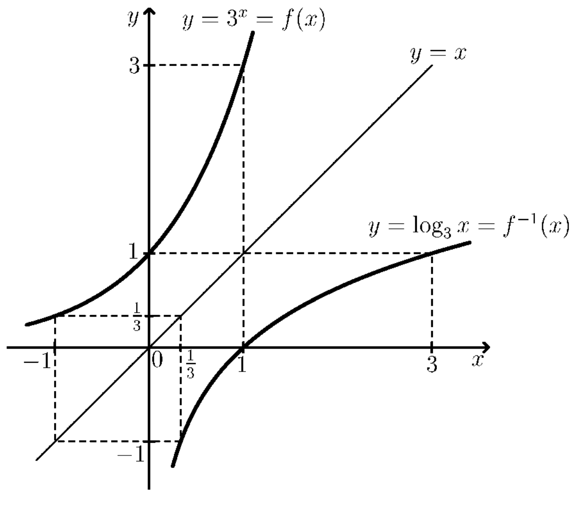
◎ 置換積分

◎ 積・商の微分

◎ 部分積分

◎ 関数の定義域と値域

◎ 逆関数の微分・積分



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜合成関数の不定積分１＞

例１　ワークブック Ser. **A** , $No.$ **5**　P38 より

$$\left(\log|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{(微分)}$$

となる。これを不定積分の形にすると

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad \text{(不定積分)}$$

となる。

問１　左の微分の式を不定積分の式に変えよ。

(微分)　　　　　　　　(不定積分)

(1)　$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \times f'(x)$　$\Longleftrightarrow$

(2)　$\left(\sin(f(x))\right)' = \cos(f(x)) \times f'(x)$　$\Longleftrightarrow$

(3)　$\left(\cos(f(x))\right)' = -\sin(f(x)) \times f'(x)$　$\Longleftrightarrow$

例２　(1) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \int \frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x}dx = \log|x^2+3x| + C$

(2) $\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3+1}dx = \int e^{x^3+1} \times (x^3+1)'dx = e^{x^3+1} + C$

(3) $\displaystyle\int (-2x+1)\sin(x^2-x)dx = \int \left\{-\sin(x^2-x)\right\} \times (x^2-x)'dx = \cos(x^2-x) + C$

問２　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{4x^3+5}{x^4+5x}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

(3) $\displaystyle\int (2x+3)e^{x^2+3x}dx$

(4) $\displaystyle\int (-x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

(5) $\displaystyle\int 4x^3\cos(x^4+3)dx$

(6) $\displaystyle\int (-3x+2)\sin\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)dx$

< 合成関数の不定積分 2 >

例 1 (1) $\left((x^3+4x^2)^7\right)'=7(x^3+4x^2)^6\times(x^3+4x^2)'=7(x^3+4x^2)^6(3x^2+8x)$

これを不定積分の形にすると

$$\int 7(x^3+4x^2)^6(3x^2+8x)dx=(x^3+4x^2)^7+C$$

(2) $\left((f(x))^7\right)'=7(f(x))^6\times f'(x) \iff \int 7(f(x))^6\times f'(x)dx=(f(x))^7+C$

(3) $\left(\dfrac{1}{7}(f(x))^7\right)'=\dfrac{1}{7}\times\left((f(x))^7\right)'=(f(x))^6\times f'(x) \iff \int(f(x))^6\times f'(x)dx=\dfrac{1}{7}(f(x))^7+C$

問 1 次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{8}(f(x))^8\right)'=$ $\iff \int(f(x))^7\times f'(x)dx=$

(2) $\left(\dfrac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}\right)'=$ $\iff \int(f(x))^n\times f'(x)dx=$

(注) 問 1 (2) の不定積分の式は $\boxed{\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C}$ を拡張したものである。

例 2 (1) $\int(x^2+3x)^6(2x+3)dx=\int(x^2+3x)^6\times(x^2+3x)'dx=\dfrac{1}{7}(x^2+3x)^7+C$

(2) $\int(3x^2+4)\sqrt{x^3+4x}dx=\int(x^3+4x)^{\frac{1}{2}}\times(x^3+4x)'dx=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^3+4x)^{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}(x^3+4x)\sqrt{x^3+4x}+C$

(3) $\int\dfrac{4x^3-3}{(x^4-3x)^2}dx=\int(x^4-3x)^{-2}\times(x^4-3x)'dx=\dfrac{1}{-2+1}(x^4-3x)^{-2+1}+C=-\dfrac{1}{x^4-3x}+C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x^3+5x^2)^7(3x^2+10x)dx$

(2) $\int(2+\sin x)^5\cos x dx$

(3) $\int(2x+1)\sqrt{x^2+x}dx$

(4) $\int(3x^2+5)\sqrt[4]{x^3+5x}dx$

(5) $\int\dfrac{5x^4+7}{(x^5+7x)^4}dx$

(6) $\int\dfrac{6x}{\sqrt{3x^2+5}}dx$

＜合成関数の定積分＞

例 1 ワークブック Ser. **A** , $No.$ **5** P39 , P40 の結果より定数 a, b, n $(a \neq 0,\ n \neq -1)$ に対して

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \quad , \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C \quad , \quad \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C$$

が成り立つ。

例 2

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x+\pi)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x+\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\pi\right) + \frac{1}{3}\cos(\pi) = -\frac{1}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(3x+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{3(3x+1)}\right]_0^2 = -\frac{1}{3(6+1)} + \frac{1}{3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4x+1}dx = \left[\frac{1}{4}\log|4x+1|\right]_0^2 = \frac{1}{4}\log 9 - \frac{1}{4}\log 1 = \frac{1}{4}\log 9$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}dx = \left[\frac{2}{15}(5x+4)\sqrt{5x+4}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\times 9\sqrt{9} - \frac{2}{15}\times 4\sqrt{4} = \frac{38}{15}$

問 1 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x-\pi)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^4 dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^2 e^{4x-1}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx$

1 ページ, 2 ページの結果より以下の式がなりたつ。

$$\int e^{f(x)} \times f'(x)dx = e^{f(x)} + C \quad , \quad \int \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \quad , \quad \int \sin(f(x)) \times f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int (f(x))^n \times f'(x)dx = \frac{1}{(n+1)}(f(x))^{n+1} + C$$

問 2 1 ページ, 2 ページを参考にして, 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^3 2xe^{x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+x)^4(3x^2+1)dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}dx$

＜積分記号＞

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2 \quad \text{より} \quad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2 \quad \text{より} \quad \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2 \quad \text{より} \quad \int 3u^2 du = u^3 + C$$

例 2

(1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

< 置換積分法 1 >

積分変数を u にした不定積分の公式は以下のようになる。

$$\int e^u du = e^u + C \quad , \quad \int \frac{1}{u} du = \log|u| + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C \quad , \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad (\text{ただし } n \neq -1)$$

この公式さえ覚えておけば、3 ページの合成関数の積分の公式は覚える必要がない。

例 1 $\int e^{f(x)} f'(x) dx$ を考える。

$u = f(x)$ とおくと $f'(x) = \dfrac{du}{dx}$ ($u = f(x)$ を x で微分)

となる。すると

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx$$

と書ける。そこで形式的に

$$\boxed{\frac{du}{dx} dx = du}$$

とおくと

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{f(x)} + C$$

例 2 $\int \cos(f(x)) f'(x) dx$ を考える。上と同様に $u = f(x)$ とおくと

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \int \cos(u) du = \sin u + C = \sin(f(x)) + C$$

このように積分変数を x から u におきかえる方法を**置換積分法**という。

問 上の例と同様に $u = f(x)$ とおいて、合成関数の積分の公式を導け。
(式変形を書くこと)

(1) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(f(x)) f'(x) dx =$

(3) $\displaystyle\int (f(x))^n f'(x) dx =$

＜ 置換積分法2 ＞

例1　不定積分 $\int e^{3x-2}dx$ を考える。

$$u = 3x-2 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (3x-2)' = 3 \quad (u\ \text{を}\ x\ \text{で微分})$$

となる。ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3 \implies du = 3dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$$

とおくと

$$\int e^{3x-2}dx = \int e^u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C$$

例2　定数 $a,\ b\ (a \neq 0)$ に対し $\int e^{ax+b}dx$ を考える。

$$u = ax+b \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = a \quad (u\ \text{を}\ x\ \text{で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = adx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a}du}$$

とおくと

$$\int e^{ax+b}dx = \int e^u \frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a}e^u + C = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

となり 3 ページの上の式が導かれる。

例3　定数 $a,\ b\ (a \neq 0)$ に対し $\int \cos(ax+b)dx$ を考える。上と同様に $u = ax+b$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = adx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a}du}$$

より

$$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos(u)\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int \cos(u)du = \frac{1}{a}\sin(u) + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

問1　上と同様にして定数 $a,\ b\ (a \neq 0),\ (n \neq -1)$ に対して $u = ax+b$ とおくことにより 3 ページ上の不定積分の公式を導け。(式変形を書くこと)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

問2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{4x+5}dx$　(2) $\displaystyle\int \cos(3x-5)dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{5x+6}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin(2x+\pi)dx$　(5) $\displaystyle\int (8x+7)^5 dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+6)^2}dx$

< 置換積分法3 >

例1 $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ を考える。

$$\boxed{u = x^3} \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies du = 3x^2 dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とおくと

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int e^{x^3} du = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例2 $\int x^2 e^{x^3} dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおき

$$\boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とすると

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

例3 $\int x \cos(x^2 + 1) dx$ を考える。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2 + 1)' = 2x \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{2x} du}$$

とおくと

$$\int x \cos(x^2 + 1) dx = \int x \cos(x^2 + 1) \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x e^{x^2+1} dx =$

(2) $\int x^3 e^{x^4} dx =$

(3) $\int x^2 \cos(x^3 + 2) dx =$

(4) $\int x \sin(x^2 + 3) dx =$

(5) $\int \frac{x}{x^2 + 3} dx =$

(6) $\int x(x^2 + 1)^5 dx =$

< 定積分の積分変数 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変っても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta d\theta = [4\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 9.8t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u} du$

< 定積分の置換積分法1 >

例題 定積分 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ の値を求めよ。

(解) まず不定積分 $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ を求める。

$$u = x^3+1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{3x^2}du$$

より

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int 3x^2\sqrt{x^3+1}\frac{1}{3x^2}du = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

となるから

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1^3+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2\times 27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

(別解) $u = x^3+1$ とおくと

$$\begin{cases} x=2 \iff u=9 \\ x=0 \iff u=1 \end{cases}$$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_{u=1}^{u=9}\sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

別解の方法を**定積分の置換積分法**という。

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2(x^3+1)^4dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 2x\sqrt{x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}dx$

< 定積分の置換積分法2 >

例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1} dx$ を求めたい。

$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{3x^2} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 1 & \Longleftrightarrow \quad u = 2 \\ x = -1 & \Longleftrightarrow \quad u = 0 \end{cases}$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1} dx = \int_{x=-1}^{x=1} x^2 e^{x^3+1} \frac{1}{3x^2} du = \int_{u=0}^{u=2} \frac{1}{3} e^u du = \left[\frac{1}{3} e^u\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3}$$

例 2 $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1} dx$ を求めたい。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 2 & \Longleftrightarrow \quad u = 5 \\ x = 0 & \Longleftrightarrow \quad u = 1 \end{cases}$$

より

$$\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{x}{x^2+1} \times \frac{1}{2x} dx = \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{2} \times \frac{1}{u} du = \left[\frac{1}{2} \log|u|\right]_{u=1}^{u=5}$$
$$= \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 1 = \frac{1}{2} \log 5$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} x(x^2+2)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} x e^{x^2} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^3+2} dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

< 積の微分１ >

例 $h \to 0$ のとき

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \longrightarrow \left(\sin x\right)'$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \longrightarrow \left(\cos x\right)'$$

$$\cos(x+h) \longrightarrow \cos x$$

であるから

$$(\sin x \times \cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos(x+h)+\sin x\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)\cos(x+h)+\sin x\left(\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right)\right\}$$

$$= \left(\sin x\right)' \times \cos x + \sin x \times \left(\cos x\right)'$$

$$= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

となる。

問 例を参考にして、一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数を
$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ で表せ。

$$\left(f(x) \times g(x)\right)' =$$

＜積の微分２＞

前ページの結果より、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数は

$$\boxed{\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)}$$

である。

例 (1) $\big(x^3\sin x\big)' = \big(x^3\big)'\times\sin x + x^3\times(\sin x)'$

$$= 3x^2\sin x + x^3\cos x$$

(2) $\big(\cos^2 x\big)' = (\cos x\times\cos x)'$

$$\begin{aligned} &= (\cos x)'\times\cos x + \cos x\times(\cos x)' \\ &= -\sin x\times\cos x + \cos x\times(-\sin x) \\ &= -2\sin x\cos x \end{aligned}$$

問 次の関数の微分せよ。

(1) $(x\cos x)' =$

(2) $\big(x^5\sin x\big)' =$

(3) $\big(\sin^2 x\big)' =$

< 商の微分 1 >

例 $h \longrightarrow 0$ のとき

$$\sin(x+h) \quad \longrightarrow \quad \sin x$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \quad \longrightarrow \quad (\sin x)'$$

であるから

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin(x+h)} - \dfrac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\dfrac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \right\} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ - \frac{\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \right\} = -\frac{(\sin x)'}{\sin x \sin x}$$

$$= -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

問 例を参考にして、一般の関数 $g(x)$ に対する次の関数の導関数を $g(x)$ と $g'(x)$ で表せ。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

＜ 商の微分 2 ＞

前ページの結果より

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}}$$

が成り立つ。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = -\dfrac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\dfrac{4x^3}{x^8} = -\dfrac{4}{x^5}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x+\sin x}\right)' = -\dfrac{(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2} = -\dfrac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$

(4) $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' =$

＜分数関数の微分＞

分数関数 $\dfrac{\square}{\triangle}$ の微分は、$\dfrac{\square}{\triangle} = \square \times \dfrac{1}{\triangle}$ と考え

積の微分 $(\square \times \bigcirc)' = (\square)' \times \bigcirc + \square \times (\bigcirc)'$

と商の微分 $\left(\dfrac{1}{\triangle}\right)' = -\dfrac{(\triangle)'}{(\triangle)^2}$ を組み合わせてできる。

例

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\sin x \times \frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= (\sin x)' \times \left(\frac{1}{\cos x}\right) + (\sin x) \times \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'}{\cos x} + (\sin x) \times \left\{-\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}\right\}$$

$$= \frac{(\sin x)' \times \cos x - (\sin x) \times (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \times \cos x - (\sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 次の関数を微分し、できるだけ簡単にせよ。

(1) $\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' =$

＜ 部分積分法1 ＞

例題 $\displaystyle\int x\cos dx$ を求めよ。

(解) 微分して $x\cos x$ になる関数の候補として

$x\sin x$ を考える。積の微分法より

$$(x\times\sin x)' = (x)'\times(\sin x) + (x)\times(\sin x)'$$

$$= 1\times\sin x + x\times\cos x$$

となる。これを式変形すると

$$x\cos x = (x\times\sin x)' - 1\times\sin x$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$\int x\cos dx = x\times\sin x - \int 1\times\sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

注) $(x\times\sin x)'$ を積分すると $x\times\sin x$ になる。

微分と積分は逆の操作であり、微分したものを
積分すると元にもどる。

問 積の微分法の公式より

$$\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

である。これを式変形すると

$$f(x)\times g'(x) = \big(f(x)\times g(x)\big)' - f'(x)\times g(x)$$

である。この両辺を積分することにより、次の

不定積分を $g'(x)$ を使わないで表せ。

$$\int f(x)\times g'(x)dx =$$

< 部分積分法2 >

前ページの問より

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

が成り立つ。これを **部分積分法** という。

例 $\displaystyle\int (2x+1)\sin x \; dx$ を求めたい。

$$f(x) = 2x+1 \quad , \quad g'(x) = \sin x$$

とおくと、微分して $\sin x$ になる関数は $-\cos x$ だから、

$$g(x) = -\cos x$$

より

$$\int (2x+1)\sin x dx = (2x+1)\times(-\cos x) - \int (2x+1)' \times (-\cos x)dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x-2)\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int (x^2+1)\cos x dx$

(3) $\displaystyle\int xe^x dx$

＜部分積分法3＞

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

は、左辺より右辺が簡単になる場合に使われる。つまり

$f(x)g'(x)$ より $f'(x)g(x)$ の方が簡単になるように、 $f(x)$ と $g(x)$

をえらぶ 。

例題 $\int \log x dx$ を求めよ。

（解） $\log x = (\log x) \times 1$ と考え、

とおくと、

$$f(x) = \log x \quad , \quad g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = x$$

より

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int (\log x) \times 1 dx \\ &= (\log x) \times x - \int \left(\frac{1}{x}\right) \times x dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

注） $\log x$ は、微分すると $\dfrac{1}{x}$ になり、簡単になるから、こちらを $f(x)$ とした。

問 次の不定積分を求めよ。

$$\int (\log x) \times x dx =$$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例1 $$\int x^2(x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\big((x^3+1)^5\big)' = \frac{1}{15} \times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3} \times (x^3+1)^4 \times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい。**

例2 $$\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$\big(\log(\cos x)\big)' = \dfrac{1}{\cos x} \times (\cos x)' = \dfrac{1}{\cos x} \times (-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

より**正しくない。**

例3 $$\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$\big(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\big)' = -(2x+1)' \times \cos x - (2x+1) \times (\cos x)' + 2 \times (\sin x)'$

$= -2\cos x - (2x+1) \times (-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$

より**正しい。**

問 次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

＜ 定積分の部分積分 ＞

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx \ = \ f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx \ = \ \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)^2 dx \ = \ \int_2^4 (x-2) \times \left\{\frac{(x-4)^3}{3}\right\}' dx$

$$= \ \left[(x-2)\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4 \ - \ \int_2^4 (x-2)' \times \frac{(x-4)^3}{3} \ dx$$

$$= \ (0-0) \ - \ \frac{1}{3}\int_2^4 (x-4)^3 \ dx$$

$$= \ -\frac{1}{3}\left[\frac{(x-4)^4}{4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{(-2)^4}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x \ dx \ = \ \int_0^\pi x \times (\sin x)' \ dx$

$$= \ \Big[x\sin x\Big]_0^\pi \ - \ \int_0^\pi (x)' \times \sin x \ dx$$

$$= \ (\pi\sin\pi - 0) \ - \ \int_0^\pi \sin x \ dx$$

$$= \ -\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\Big\{-\cos\pi - (-\cos 0)\Big\} = -2$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)^3 dx$

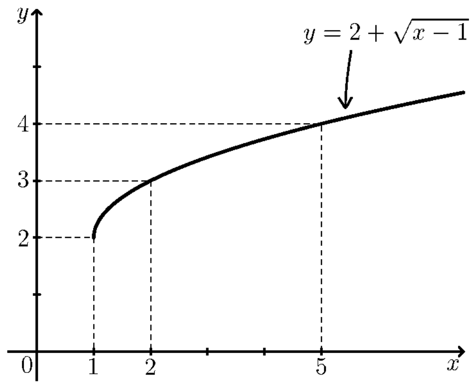
(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

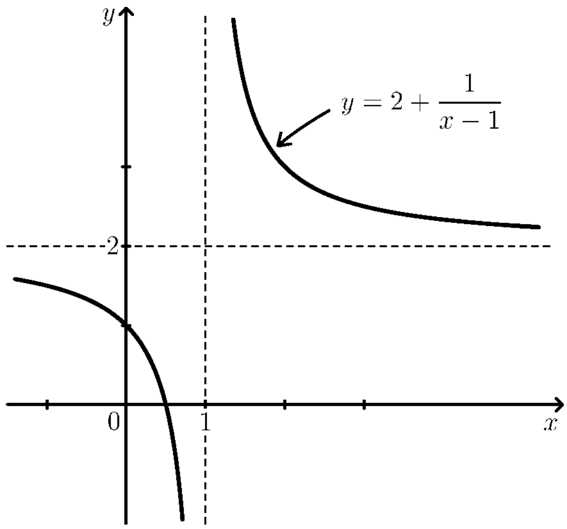
＜関数の定義域と値域1＞

y が x の関数 $y=f(x)$ であるとき、変数 x を**独立変数**といい、
y は x によって変わるから変数 y を**従属変数**という。
関数 $y=f(x)$ において、独立変数 x の範囲を**定義域**、
従属変数 y の範囲を**値域**という。

例1 無理関数 $f(x)=2+\sqrt{x-1}$
は $\sqrt{}$ の中が 0 以上の制限
があるから、$x-1 \geqq 0$ より
$f(x)$ の 定義域は $x \geqq 1$ 。
$y=2+\sqrt{x-1}$ とおくと $\sqrt{} \geqq 0$
より 値域は $y \geqq 2$ 。



例2 分数関数 $f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$
は分母が 0 以外であるから
$x-1 \neq 0$ より $x \neq 1$ 。
$f(x)$ の 定義域は 1 以外の全ての実数である。
$y=2+\dfrac{1}{x-1}$ とおくと
$\dfrac{1}{x-1} \neq 0$ より $y \neq 2$ 。
値域は 2 以外の全ての実数である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x)=2-\sqrt{x-1}$　　(2) $f(x)=1+\sqrt{1-x}$　　(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$

定義域＿＿＿＿＿＿　　定義域＿＿＿＿＿＿　　定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿　　値域＿＿＿＿＿＿　　値域＿＿＿＿＿＿

＜関数の定義域と値域2＞

例1 対数関数 $f(x) = \log_4(x-2)$ を考える。一般に対数

$$◯ = \log_4 □$$

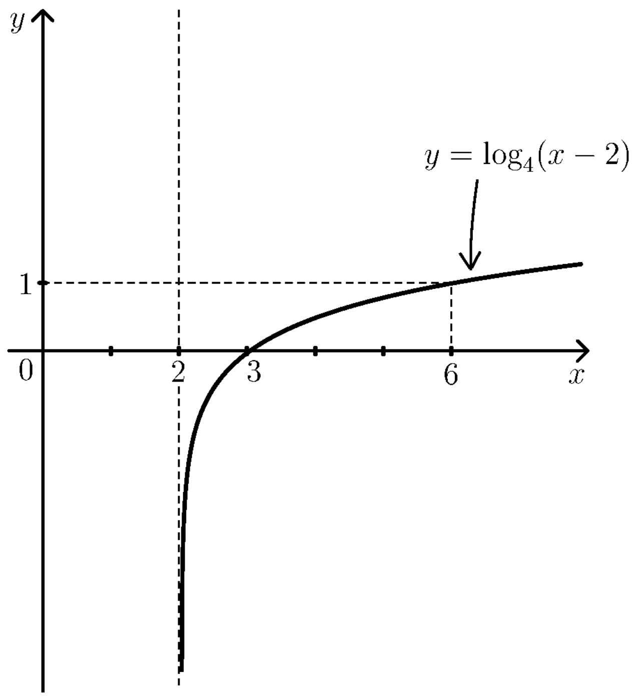
に対し、□内にはいる数を**真数**という。上の対数を指数の形にすると

$$□ = 4^{◯} > 0$$

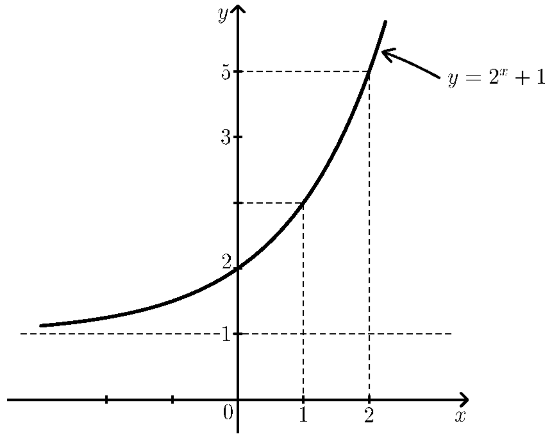
より真数は正でなければならない。従って真数 $= x - 2 > 0$ より $f(x)$ の定義域は $x > 2$ である。又 $y = \log_4(x-2)$ とおくと

$$x - 2 = 4^y$$

となり指数 y に制限はないので値域は実数全体である。



例2 指数関数 $f(x) = 2^x + 1$ を考える。指数 x に制限はないので $f(x)$ の定義域は実数全体である。一方 $y = 2^x + 1$ とおくと $2^x > 0$ より $2^x + 1 > 1$ であるから値域は $y > 1$ である。



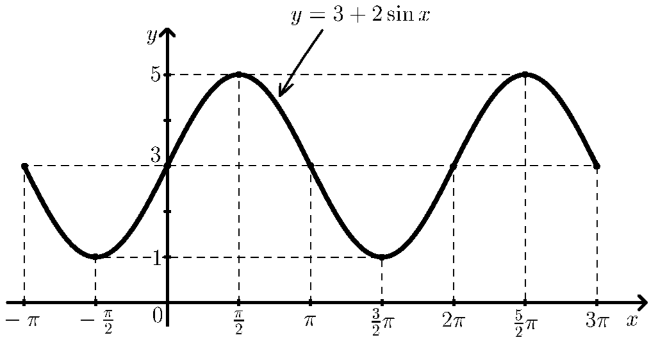
問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = \log_3(1-x)$ (2) $f(x) = 2^x - 1$ (3) $f(x) = 1 - 5^x$

(1)	(2)	(3)
定義域	定義域	定義域
値域	値域	値域

< 関数の定義域と値域3 >

例 1 三角関数 $f(x) = 3 + 2\sin x$ を考える。正弦関数の角度 x の範囲に制限はないから、関数 $f(x)$ の 定義域は実数全体 である。



一方

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1$$

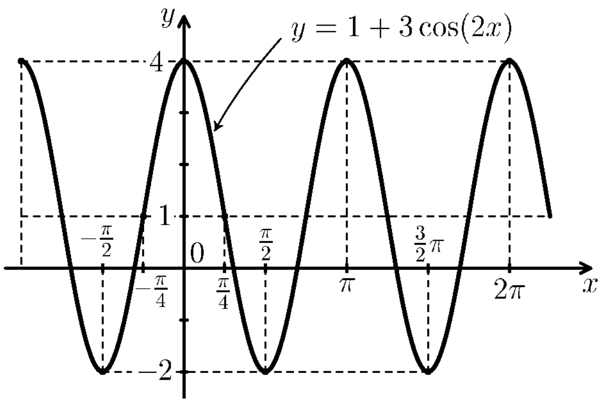
$$-2 \leqq 2\sin x \leqq 2$$

より

$$3 - 2 \leqq 3 + 2\sin x \leqq 3 + 2$$

$1 \leqq 3 + 2\sin x \leqq 5$ だから 値域は $1 \leqq y \leqq 5$ である。

例 2 三角関数 $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$ を考える。$\cos x$ の角度 x に制限はないから、関数 $f(x)$ の 定義域は実数全体 である。



一方

$$-1 \leqq \cos(2x) \leqq 1$$

$$-3 \leqq 3\cos(2x) \leqq 3$$

より

$$1 - 3 \leqq 1 + 3\cos(2x) \leqq 1 + 3$$

$$-2 \leqq 1 + 3\cos(2x) \leqq 4$$

だから 値域は $-2 \leqq y \leqq 4$ である。

問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = 1 + \sin x$

定義域 ______________

値域 ______________

(2) $f(x) = 2 - 2\cos x$

定義域 ______________

値域 ______________

(3) $f(x) = 1 + 3\sin(2x)$

定義域 ______________

値域 ______________

(4) $f(x) = 3 + 4\cos(-x)$

定義域 ______________

値域 ______________

＜関数の定義域と値域4＞

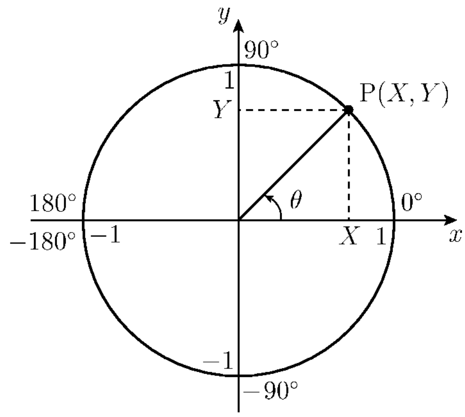
例1 角度θが右図のようなとき

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

であった。θが90°または-90°のときはx座標が0 ($X=0$)となるので分母が0になるから定義されない。一般に$\tan\theta$の定義域は

$$\pm 90^\circ, \ \pm 270^\circ, \ \pm 450^\circ, \ \cdots$$

以外の角度である。弧度法で表すと、



$\tan\theta$ の定義域は $\theta \neq \pm\dfrac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

である。正接関数$y=\tan x$のグラフはワークブック Ser. **A** , *No.* **5** 12ページのようになる。

$y=\tan x$ のグラフより値域は実数全体である。

例2 関数$f(x)=\tan(2x)$を考える。

一般に$\tan(\square)$は

$$\square \neq \pm\frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

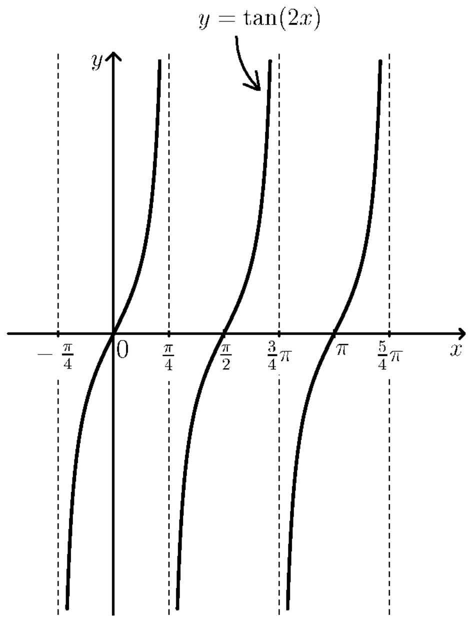
という制限があるから

$$2x \neq \pm\frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

より

$$x \neq \pm\frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi$$

であるから、$f(x)$の定義域は$\pm\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{n}{2}\pi$($n$は整数)以外のすべての実数である。また値域は実数全体である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x)=\tan(3x)$

定義域 __________

値域 __________

(2) $f(x)=\tan(\pi x)$

定義域 __________

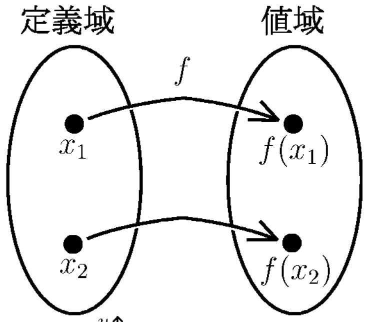
値域 __________

＜ 1対1関数 ＞

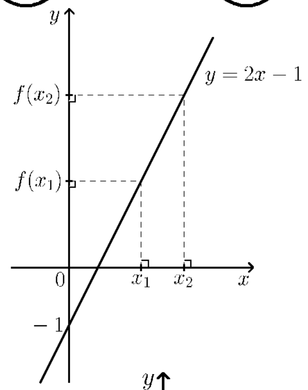
関数 $y=f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり

$(*)$　$\underline{x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)}$

が成り立つとき、関数 $y=f(x)$ は **1対1** であるという。



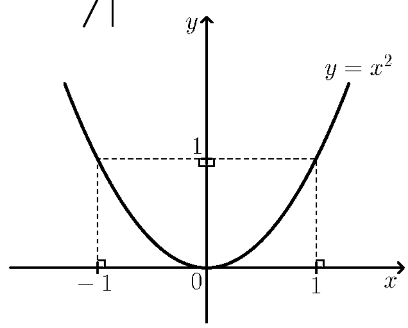
例1　$f(x)=2x-1$ のとき、
関数 $y=f(x)$ は 1 対 1 である。



例2　$f(x)=x^2$ のとき、
定義域を実数全体とすれば、関数 $y=f(x)$ は 1 対 1 ではない。
なぜなら、$x_1=-1$, $x_2=1$ のとき

$$f(x_1)=f(x_2)=1$$

となり $(*)$ 式が成立しないから。

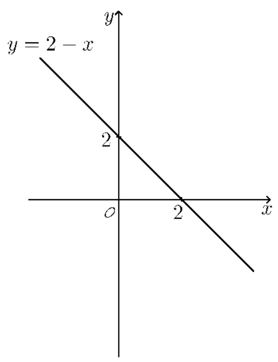


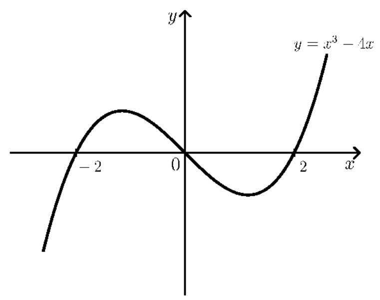
（注）　このような x_1 , x_2 が 1 組でもあれば 1 対 1 ではない。

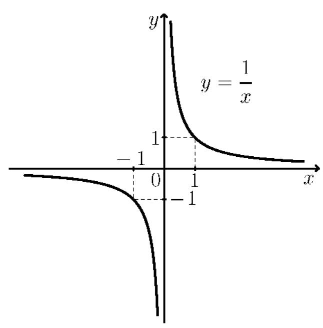
問　次の関数が 1 対 1 であるかどうか判定せよ。

(1) $y=2-x$　　(2) $y=x^3-4x$　　(3) $y=\dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$

(答)＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿







＜ 逆関数１ ＞

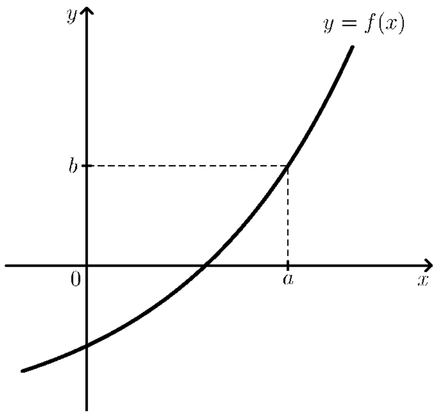
関数 $f(x)$ が１対１であるとき、y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ１つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は１対１である。

$b = f(a)$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$b = 2a - 1$

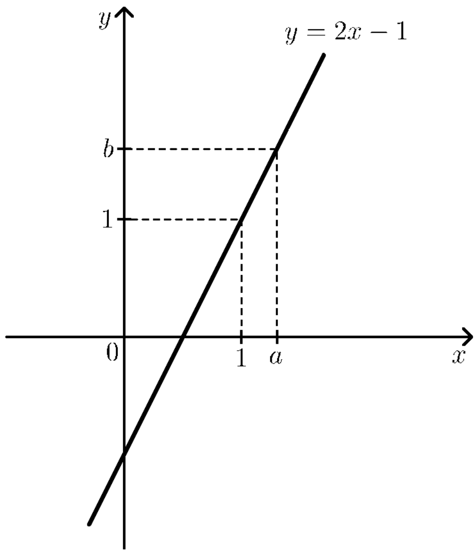
である。これを a について解くと

$a = \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。

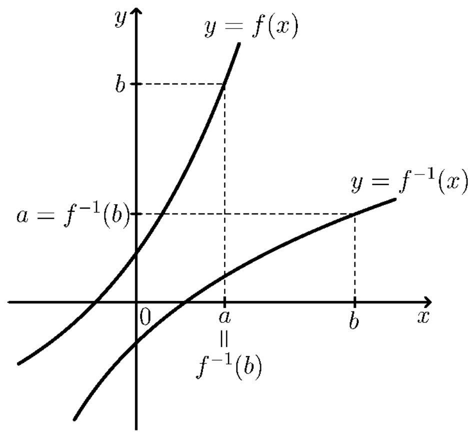


問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて１対１である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 2 - x$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$　　(3) $f(x) = \sqrt{x}$

（解）　　（解）　　（解）

＜ 逆関数2 ＞



関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 のとき、y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。

例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

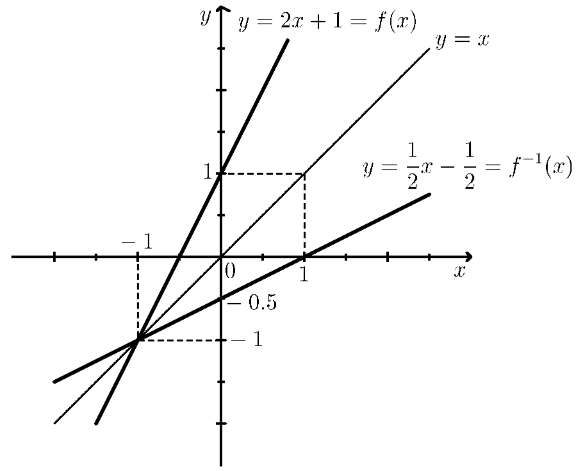
より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。



元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に書くと、右図のように直線 $y = x$ に関して対称になる。

(注) 例の場合、逆関数 $f^{-1}(x)$ は次のようにしても求まる。

$$\left.\begin{array}{lcl} y = 2x + 1 & \iff & x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = f(x) & \iff & x = f^{-1}(y) \end{array}\right) \Longrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

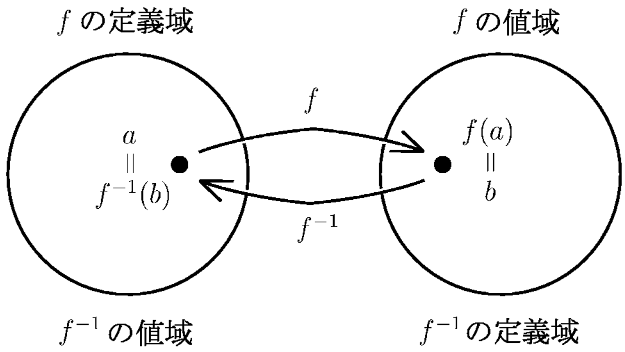
問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x - 1$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$　　(3) $f(x) = \sqrt{x+1}$

（解）　　（解）　　（解）

＜逆関数 3 ＞

関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。

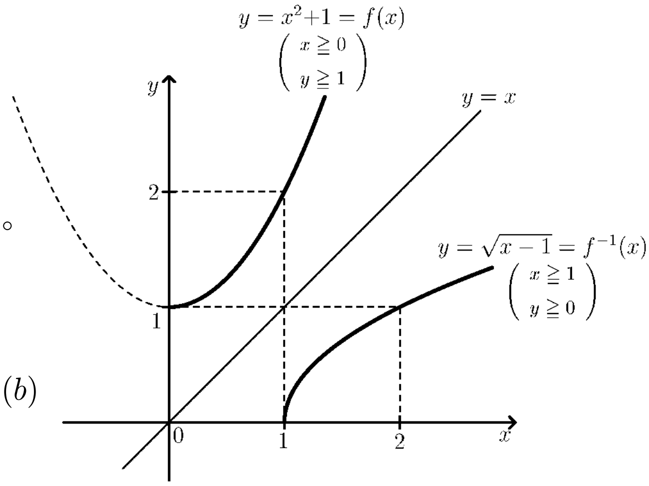


例 $f(x)=x^2+1$ のとき、f の定義域を $x \geqq 0$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 にある。
この逆関数を以下のようにして求める。

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より

$$\underset{(a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1)}{b=a^2+1} \iff \underset{(a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1)}{a=\sqrt{b-1}=f^{-1}(b)}$$



となる。b を x でおきかえると、逆関数

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\quad (\text{定義域}\ x \geqq 1)$$

が求まる。$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y=x$ に関し、対称になる。

(注) 例の逆関数は以下のようにしても求まる。

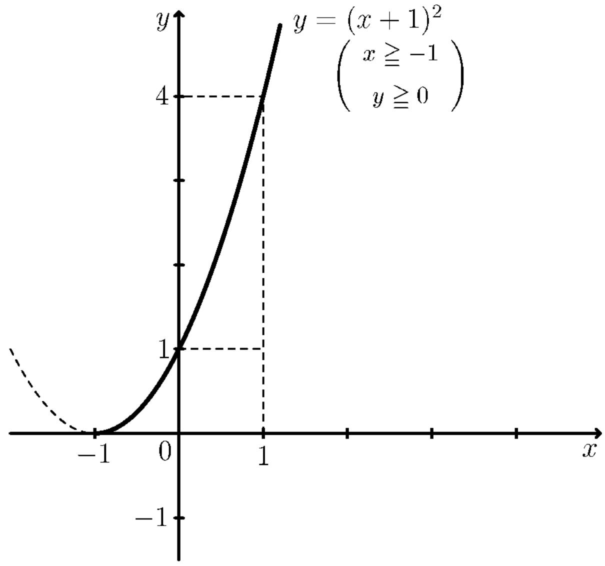
$$\left.\begin{array}{lcl} y=f(x) & \iff & x=f^{-1}(y) \\ y=x^2+1 & \iff & x=\sqrt{y-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y-1}\ \ (y \geqq 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\ \ (x \geqq 1)$$

問 $f(x)=(x+1)^2$ のとき f の定義域を $x \geqq -1$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を求め、グラフを右図に書け。



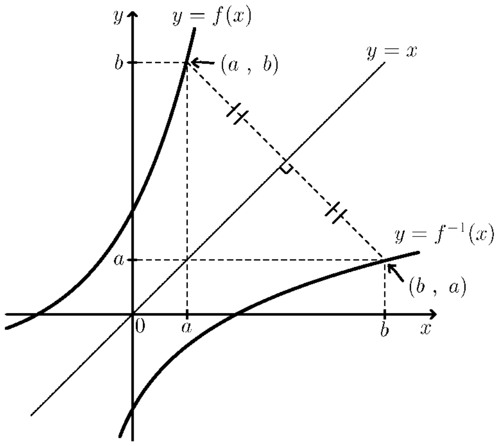
（解）

＜逆関数 4 ＞

関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 であるとき、$y=f(x)$ のグラフ上の点の座標を $(a\ ,\ b)$ とすると

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より、点 $(b\ ,\ a)$ は逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。



このことから、逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y=f(x)$ のグラフを、直線 $y=x$ に関して、対称に折り返したものになっている。

例 $f(x)=3^x$ のとき、

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

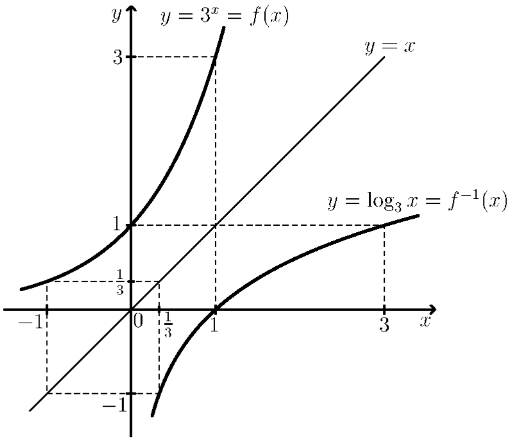
より

$$b=3^a \iff a=\log_3 b=f^{-1}(b)$$

であるから、逆関数は

$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

である。対数関数 $y=\log_3 x$ は指数関数 $y=3^x$ の逆関数である。



$y=\log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y=3^x$ のグラフを直線 $y=x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。

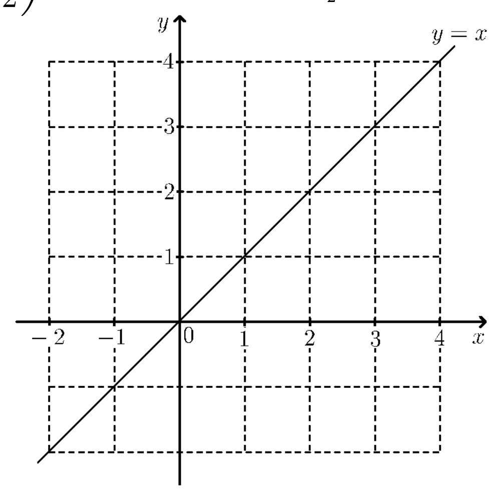
(注) 例の逆関数は以下のようにしても求まる。

$$\left.\begin{array}{lcl} y=f(x) & \iff & x=f^{-1}(y) \\ y=3^x & \iff & x=\log_3 y \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(y)=\log_3 y$$

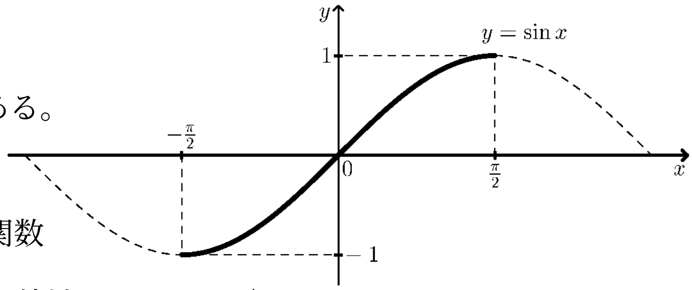
$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

問 指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ と対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを同じ座標平面上に書け。



< 逆三角関数1 >



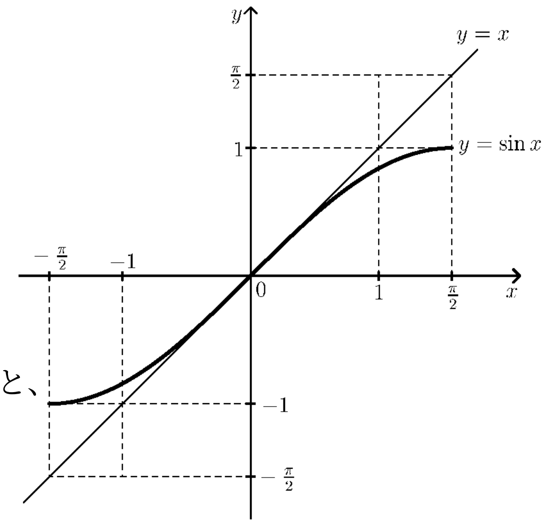
正弦関数 $y = \sin x$ の通常の定義域は
実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。
この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に
制限すると、1 対 1 になる。このとき、関数

$$y = \sin x \quad （定義域\ -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\text{，} 値域\ -1 \leqq y \leqq 1）$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y = \sin^{-1} x \qquad 又は \qquad y = \arcsin x \quad （定義域\ -1 \leqq x \leqq 1\text{，} 値域\ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}）$$

（インバースサイン）　　（アークサイン）



と表す。$y = \sin^{-1} x$ のグラフは、$y = \sin x$ のグラフを
直線 $y = x$ に関して対称におり返したものである。

問 1　右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。たとえば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。表より $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから、

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

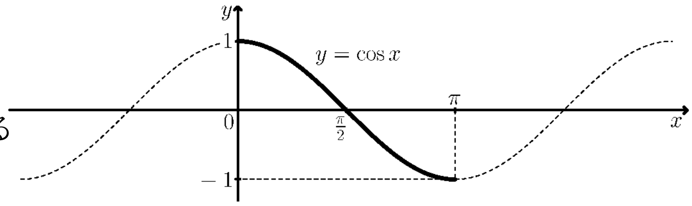
（答）$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

問 2　表を完成せよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　　(2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$　　　(3) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

＜逆三角関数2＞



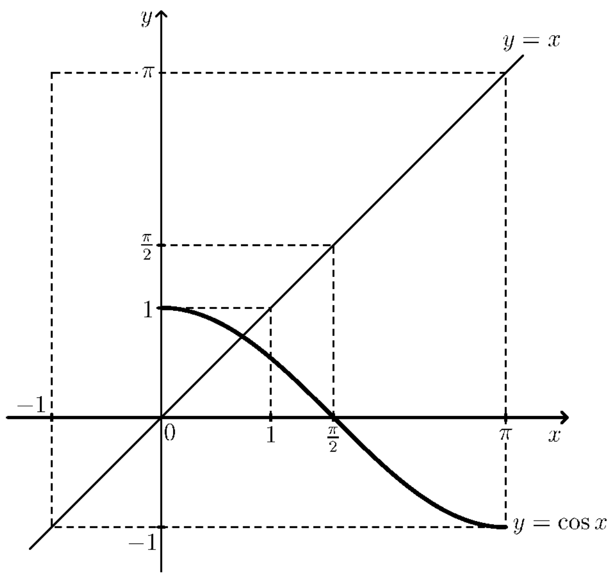
余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、1対1になる。そのとき、関数

$y=\cos x$ （定義域 $0 \leqq x \leqq \pi$, 値域 $-1 \leqq y \leqq 1$）

の逆関数が存在し、これを

$y=\cos^{-1} x$ 又は $y=\arccos x$ （定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$, 値域 $0 \leqq y \leqq \pi$）
（インバースコサイン）（アークコサイン）

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称におり返したものである。



問1 右図の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを書け。

例 逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。たとえば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で、$\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから（答）$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問2 表を完成せよ。

問3 次の値を求めよ。

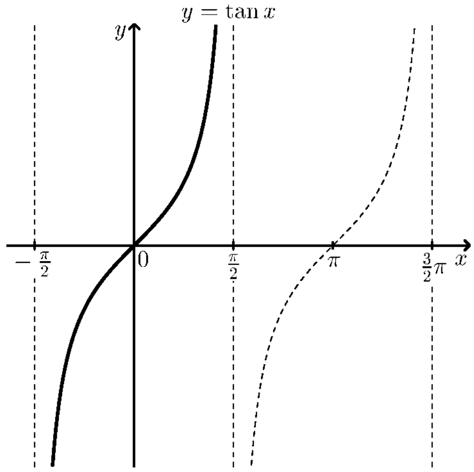
(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ (2) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$ (3) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

< 逆三角関数3 >

正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は $\frac{\pi}{2} + n\pi$（n は整数）以外の実数であり、値域は実数全体である。この関数の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数

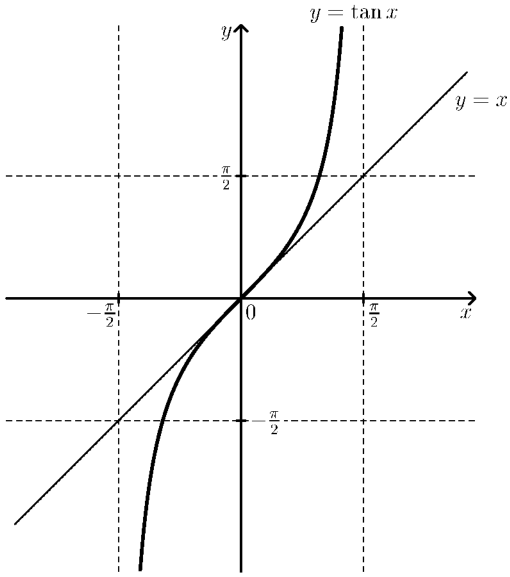
$y = \tan x$ （定義域 : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 値域 : 実数全体）

の逆関数が存在し、これを、



$y = \tan^{-1} x$ 又は $y = \arctan x$ （定義域 : 実数全体 , 値域 : $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$）
（インバースタンジェント）（アークタンジェント）

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは $y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称におり返したものである。



問 1 右の座標平面上に $\tan^{-1} x$ のグラフを書け。

例 逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。たとえば、$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan \theta$$

より、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、$\tan \theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから （答）$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan \theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2 表を完成せよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$　　(2) $\tan^{-1}(-1) =$　　(3) $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$

＜ 逆関数の微分 ＞

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \cos^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(ヒント) 15 ページの例および $\dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$ を使う

< 逆三角関数の積分 >

前のページの結果より

$$\boxed{(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad , \quad \boxed{(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

である。従って不定積分の形にすると

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}(x) + C} \quad , \quad \boxed{\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x) + C}$$

となる。

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ を求めたい。

$\boxed{x = 2u}$ とおくと $\boxed{dx = 2du}$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\times 2du = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sin^{-1}(u)+C = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

問 1 正の数 a に対し $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ を求めよ。

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}dx$ を求めたい。

$\boxed{x = 3u}$ とおくと $\boxed{dx = 3du}$ より

$$\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9+9u^2}\times 3du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u)+C = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

問 2 正の数 a に対し $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ を求めよ。

< 不定積分の特例1 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式 $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2},\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

2. 積を和に直す公式

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\end{aligned}}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos x dx &= \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx\\ &= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(-x)\sin x dx =$

＜不定積分の特例2＞

例1 $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$ を求めたい。

$$\boxed{x=\sin\theta} \text{ とおくと } \frac{dx}{d\theta}=\cos\theta \Longrightarrow \boxed{dx=(\cos\theta)d\theta}$$

より

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta$$

ここで前のページの例 (1) より

$$\int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\theta)\big)d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C$$

となる。一方

$$x=\sin\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \theta = \sin^{-1}x$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

より

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C = \frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{4}\times 2x\sqrt{1-x^2}+C$$

であるから

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}$$

例2 $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}dx$ を求めたい。

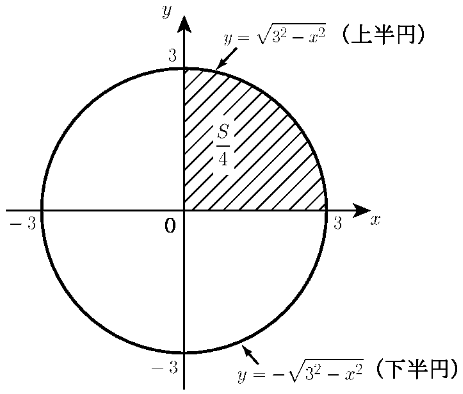
$$\boxed{x=3u} \text{ とおくと } \boxed{dx=3du} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-x^2}dx &= \int \sqrt{9-9u^2}3du = 9\int \sqrt{1-u^2}du \\
&= 9\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}(u) + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\times\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} + C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C
\end{aligned}$$

問 正の数 a に対し $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ を求めよ。

< 円の面積 >

例 半径 3 の円の面積 S を求めたい。



原点を中心として半径 3 の円の方程式は

$$x^2+y^2=3^2$$

である。従って上半円の方程式は

$$y=\sqrt{3^2-x^2} \quad (\text{上半円})$$

である。四分の 1 円の面積は右図の斜線部分より

$$\frac{S}{4}=\int_0^3\sqrt{3^2-x^2}dx=\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$$

となる。前のページの結果より

$$\begin{aligned}\frac{S}{4}&=\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\left[\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}\right]_0^3\\&=\left(\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)+\frac{3}{2}\sqrt{9-3^2}\right)-\left(\frac{9}{2}\sin^{-1}(0)+\frac{0}{2}\sqrt{9-0^2}\right)\\&=\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)-\frac{9}{2}\sin^{-1}(0)\end{aligned}$$

となる。30 ページより

$$\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}\ ,\quad \sin^{-1}(0)=0$$

だから

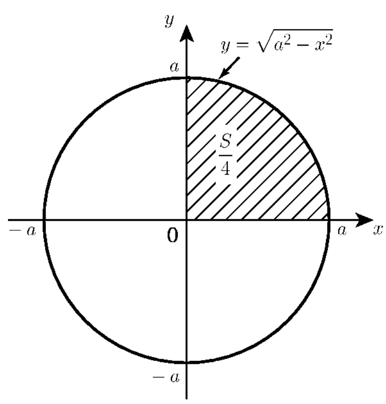
$$\frac{S}{4}=\frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{9}{2}\times 0=\frac{9\pi}{4}$$

よって

$$\underline{S=9\pi \quad (\text{半径 3 の円の面積})}$$

問 右図から $\dfrac{S}{4}=\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ である。

(1) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ の値を逆三角関数 $\sin^{-1}x$ を用いて表せ。



(2) S を求めよ。

< 楕円の面積 >

例 右図の楕円の方程式は

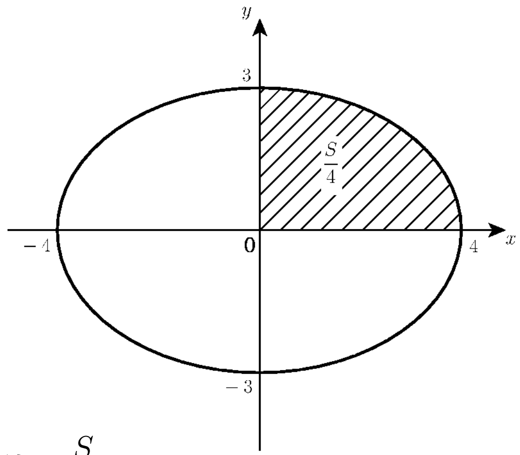
$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

である。従って上半楕円の方程式は

$$\frac{y}{3}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y=\frac{3}{4}\sqrt{4^2-x^2}} \quad (\text{上半楕円})$$



楕円の面積を S とすると右図斜線部分の面積は $\dfrac{S}{4}$ であり,

$$\frac{S}{4}=\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{4^2-x^2}dx=\frac{3}{4}\int_0^4\sqrt{4^2-x^2}dx$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{4^2-x^2}\right]_0^4$$

$$=\frac{3}{4}\left\{8\sin^{-1}(1)-8\sin^{-1}(0)\right\}=\frac{3}{4}\times 8\times\frac{\pi}{2}=3\pi$$

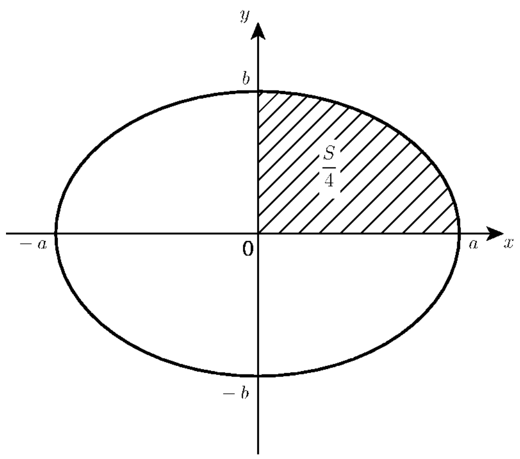
よって

$$\underline{S=12\pi \quad (\text{楕円の面積})}$$

問 $a>b>0$ である定数 $a,\ b$ に対し, 右図の楕円の方程式は

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

である。



(1) 上半楕円の方程式を求めよ。

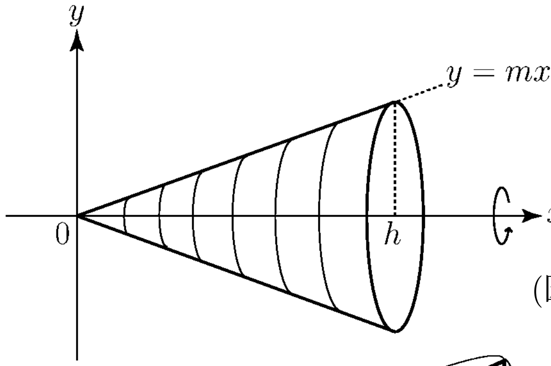
(2) 右図の斜線部分の面積 $\dfrac{S}{4}$ を積分の式で表せ。

$$\frac{S}{4}=$$

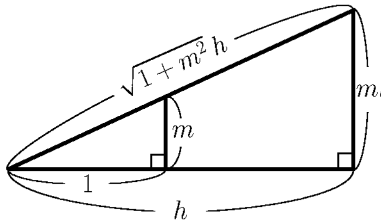
(3) S を求めよ。

< 回転体の表面積1 >

例 直線 $y=mx$ の $0 \leqq x \leqq h$ の範囲の線分を x 軸のまわりに１回転して出来た円錐の側面の表面積 $S(h)$ を求めたい。この円錐の側面を図３のような扇形の紙をまるめて作ったと考えると、$S(h)$ はこの扇形の面積になる。図２よりこの扇形は半径 $\sqrt{1+m^2}\,h$ であり、弧の長さは $2\pi mh$ である。よって中心角 θ は



(図 1)

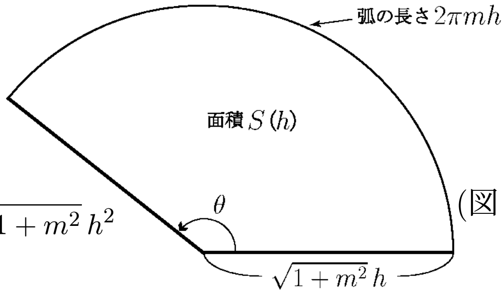


(図 2)

$$\theta = \frac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}} = \frac{2\pi mh}{\sqrt{1+m^2}\,h} = \frac{2\pi m}{\sqrt{1+m^2}}$$

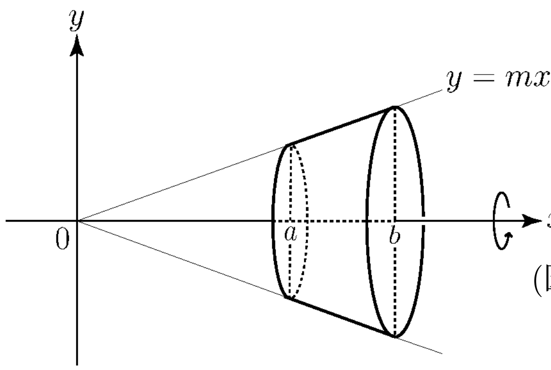
である。従って面積 $S(h)$ は

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{1}{2} \times (\text{中心角}) \times (\text{半径})^2 \\ &= \frac{1}{2}\theta \cdot \left(\sqrt{1+m^2}\,h\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{\sqrt{1+m^2}} \times (1+m^2)\,h^2 = \pi m\sqrt{1+m^2}\,h^2 \end{aligned}$$



(図 3)

問 直線 $y=mx$ の $a \leqq x \leqq b$ の範囲の線分を x 軸のまわりに１回転してできた回転体 (図 4) の側面の表面積を S とする。



(図 4)

(1) S を上の例の $S(h)$ を使って表せ。

(2) S を $a,\ b$ と m だけで表せ。

(3) 上の例の $S(h)$ を h の関数と考える。$S(x)$ およびその導関数 $S'(x)$ を求めよ。

$S(x) =$, $S'(x) =$

(4) 式 $\boxed{S(b)-S(a) = \int_a^b S'(x)dx}$ を m と $a,\ b$ を使って書きなおせ。

< 回転体の表面積2 >

前ページ図 4 の回転体の側面の表面積 S は

$$S=\pi m\sqrt{1+m^2}\,b^2-\pi m\sqrt{1+m^2}\,a^2=\int_a^b 2\pi mx\sqrt{1+m^2}dx$$

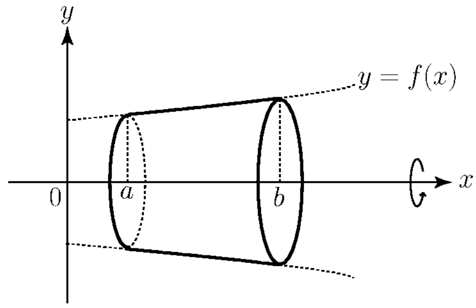
と表される。ここで

$$y=mx \quad \text{のとき} \quad y'=m$$

より

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

と表現できる。一般に曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体 (図 1) の側面の表面積 S は

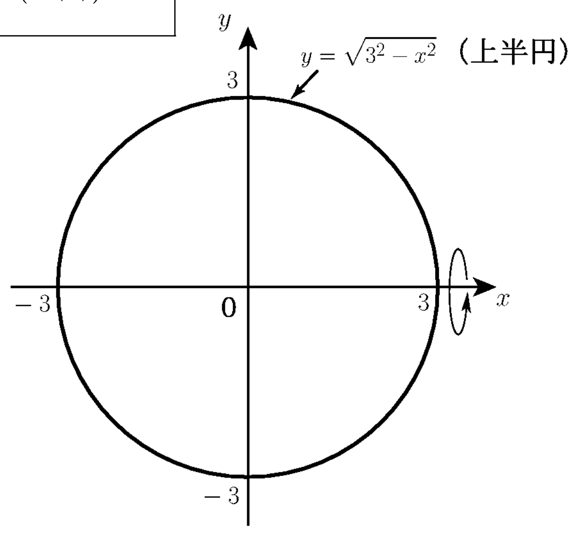


$$\boxed{S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$$

となる。

例 半径 3 の球の表面積 S を求めたい。

S は右図の円を x 軸のまわりに 1 回転してできた曲面の表面積だから



$$y=\sqrt{3^2-x^2}=\sqrt{9-x^2}$$

$$y'=\left(\sqrt{9-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

より

$$1+(y')^2=1+\frac{x^2}{9-x^2}=\frac{9}{9-x^2}$$

だから

$$S=\int_{-3}^{3} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-3}^{3} 2\pi\sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}dx=\int_{-3}^{3} 6\pi dx=36\pi$$

問 1 半径 r の球の表面積 $S(r)$ を求めよ。

問 2 問 1 で求めた $S(r)$ を r の関数とみる。$\displaystyle\int_0^r S(x)dx$ を求めその値は球の何を意味するか説明せよ。