高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series **A**

$No.$ **5**

内容

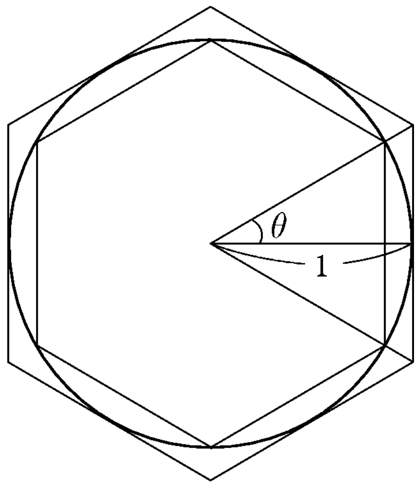
◎ 弧度法

◎ 三角関数のグラフ

◎ 三角関数の微分･積分

◎ 合成関数

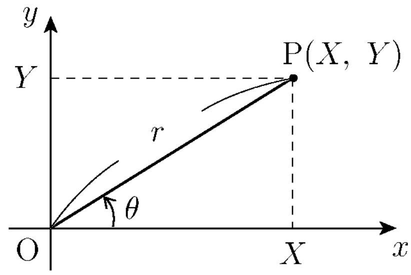
◎ 合成関数の微分



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜ 極座標 ＞



(図1)

座標平面上の点 P$(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

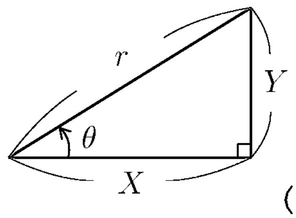
$$\frac{X}{r} = \cos\theta \ ,\ \frac{Y}{r} = \sin\theta$$

だから

$$X = r\cos\theta \ ,\ Y = r\sin\theta$$

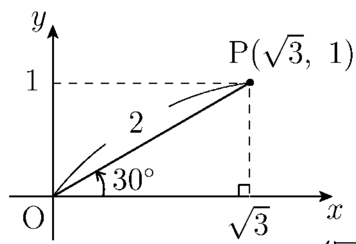
より

$$\boxed{(X,\ Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)} \quad \text{(極座標表示)}$$



(図2)

と表される。$(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ を点 P$(X,\ Y)$ の**極座標**という。



(図3)

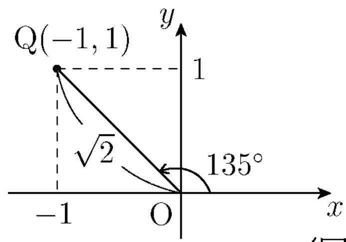
例 (1) 点 P$(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1) = (2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ)$$

となる。

(2) 点 Q$(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1) = (\sqrt{2}\cos 135^\circ\ ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)$$



(図4)

＜検算＞ 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $(2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ) = \left(2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\times\dfrac{1}{2}\right) = (\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ) = \left(\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\dfrac{2}{2},\ \dfrac{2}{2}\right) = (-1,\ 1)$

問 次の座標を極座標になおせ。

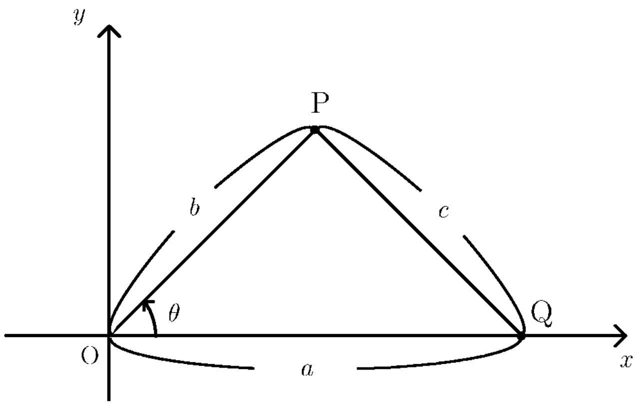
(1) $(-\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(-1,\ -\sqrt{3})$

(3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(4) $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

< 余弦定理1 >



問 (1) 右図の点PとQの座標を

aとbおよび角度θで表せ。

P(　　　,　　　)

Q(　　　,　　　)

Pは極座標を使う。

(2) 平面上の2点間の距離の公式（Ser. **A** , *No.* **4**）を使って、

PQ^2をaとbとθを用いて表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$を用いることによって$\mathrm{PQ}^2$を簡単にせよ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3)の結果を用いて、c^2をaとbと$\cos\theta$だけを使って表せ。

$c^2 =$

＜余弦定理２＞

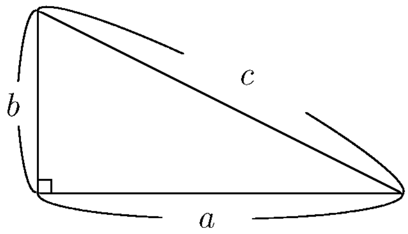
図１のように直角三角形の場合はピタゴラスの定理より

$c^2 = a^2 + b^2$

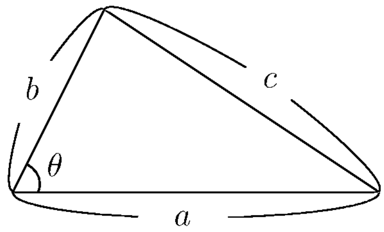
によって斜辺の長さ c を

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

として求まるが、図２のように θ が $90°$ 以外の場合はそうはならない。



（図１）



（図２）

問１ 前ページの結果を用いて、c^2 を a と b と θ で表せ。

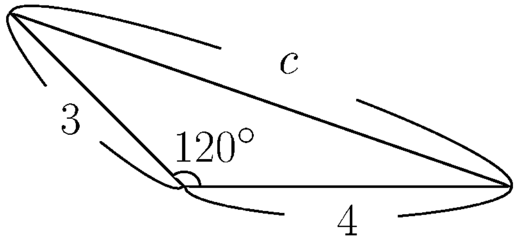
$c^2 =$

（注）この式を**余弦定理**という

例 右図の場合に

$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120°$

が成り立つ。ここで $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ より

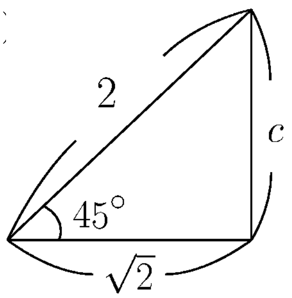


$$c^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 12 = 37$$

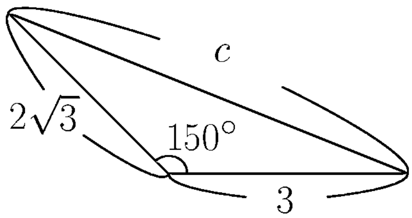
であるから $c = \sqrt{37}$。

問２ 三角形が以下の場合に c を求めよ。

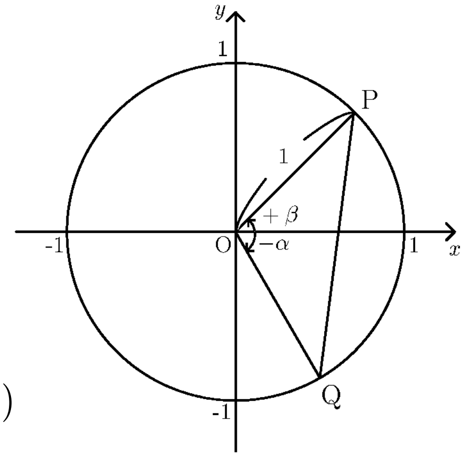
(1)



(2)



＜加法定理１＞



問

(1) 右図において点 P の座標を極座標表示せよ。

P(　　　　,　　　　)

(2) 右図において点 Q の座標を極座標表示すると $Q\big(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\big)$

となるが、ワークブック Ser.**A**,$No.$**4**(38 ページ) 問 2 の性質を用いて、Q の座標を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ で表せ。

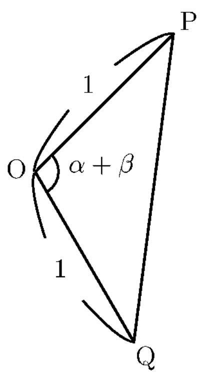
Q(　　　　,　　　　)

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式 (ワークブック Ser.**A**,$No.$**4**(28 ページ)) を使って、PQ^2 を α と β で表せ。

$PQ^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$PQ^2 =$



(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理を使って、PQ^2 を $\alpha+\beta$ で表せ。

$PQ^2 =$

(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha+\beta)$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

< 加法定理2 >

前ページの結果より

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が成立することが分かった。これをコサインの**加法定理**という。

例 75° は 45° と 30° の和であるから、

(1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ$ は $\cos^2(75^\circ)+\sin^2(75^\circ)=1$ から計算してもできないことはないが 2 重根号 $\left(\sqrt{}\right.$ の中に $\sqrt{}$ がある$\left.\right)$ がでてくる。それをさけるために ワークブック Ser.**A**,$No.$**4** で導いた三角関数の性質

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を使って、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \cos(90^\circ-75^\circ)=\cos\big((90^\circ-45^\circ)+(-30^\circ)\big)\\ &=\cos(90^\circ-45^\circ)\cos(-30^\circ)-\sin(90^\circ-45^\circ)\sin(-30^\circ)\\ &=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ(-\sin 30^\circ)\\ &=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

問 105° は 60° と 45° の和であることを利用して、次の値を求めよ。

$\cos 105^\circ =$

$\sin 105^\circ =$

< 加法定理3 >

問1 前ページの例の (2) を参考にして、$\sin(\alpha+\beta)$ を
$\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

$\sin(\alpha+\beta) =$

注） この式をサインの加法定理という。

問2 $165^\circ = 105^\circ + 60^\circ$ と考えて、前ページの例の結果を使って次の値を求めよ。

(1) $\cos 165^\circ =$

(2) $\sin 165^\circ =$

例 15° は 45° から 30° を引いた角度である。三角関数の性質

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

とサイン、コサインの加法定理を使うと、次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \cos 45^\circ \cos(-30^\circ) - \sin 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \sin 45^\circ \cos(-30^\circ) + \cos 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問3 例を参考にして、次式を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

(1) $\cos(\alpha-\beta) =$

(2) $\sin(\alpha-\beta) =$

＜ 加法定理4 ＞

例 5 ページの例より $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで分母の有理化をするために分母と分子に $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ をかけると

$$\tan 75^\circ = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

（別解） $\cos 75^\circ$ と $\sin 75^\circ$ の一方しかわかっていない場合は次のように考える。

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}}{\frac{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}{1 - \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

問 1 $\tan 105^\circ$ を求めよ。

問 2 上の別解を参考にして $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha+\beta) =$

この式をタンジェントの加法定理という。

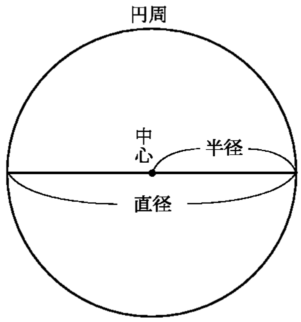
< 円周率 >

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから

$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$



となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ∼ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ、現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma$) の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率} \quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味、曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後、円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

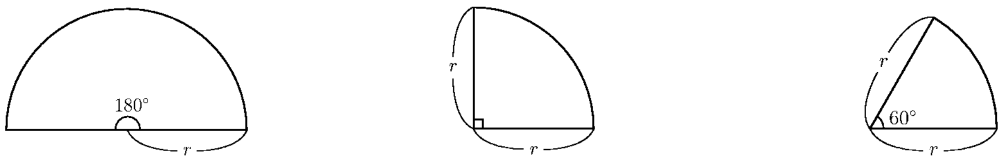
$$\pi = \frac{\ell}{2 \times 5} = \frac{\ell}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答})\ \ \ell = 10\pi\ (\text{cm})}$$

問 1　次の半径の円周を求めよ。

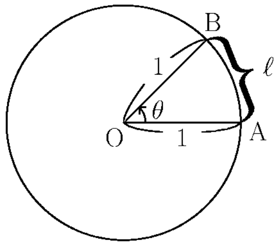
(1) 半径 2cm　　　(2) 半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

(1) 半径 r の半円の弧の長さ　　(2) 半径 r の $\frac{1}{4}$ 円の弧の長さ　　(3) 半径 r, 中心角 60° の弧の長さ



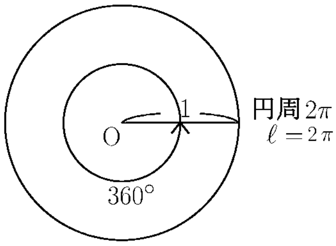
＜弧度法１＞



右図のように、角度θを、半径１の円の弧 AB の長さℓで表す方法を**弧度法**という。
単位をラジアンで表し、

$\theta^\circ = \ell$（ラジアン）

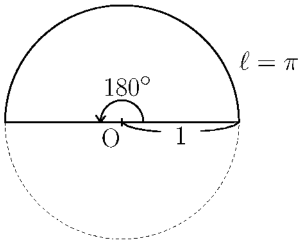
と記す。



例 (1) $\theta = 360^\circ$ のとき、半径１の円周の長さは2πだから

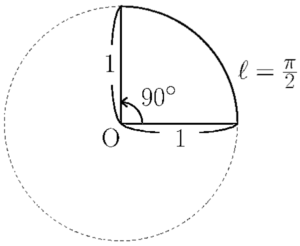
$360^\circ = 2\pi$（ラジアン）

である。（πは円周率$\fallingdotseq 3.14$）



(2) $\theta = 180^\circ$ のとき、半径１の半円の長さはπだから

$180^\circ = \pi$（ラジアン）



(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、半径１の円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さは $\dfrac{\pi}{2}$ だから

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）

以上の例から、１（ラジアン）は弧の長さが１に対する角度θで、

１（ラジアン）$= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$

である。

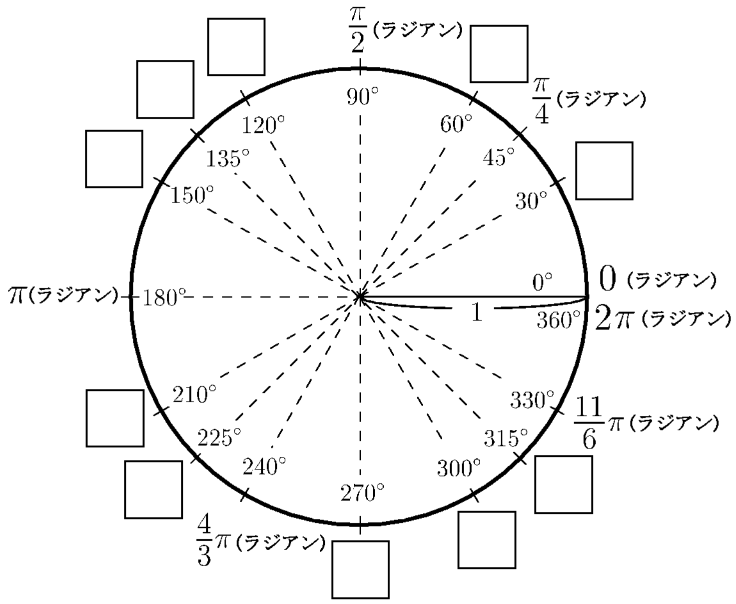
（注） 360° , 180° , 90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π

＜弧度法2＞

問1 右図は半径1の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の $\boxed{}$ 内に弧度法による角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例 0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1) $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ = 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \dfrac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

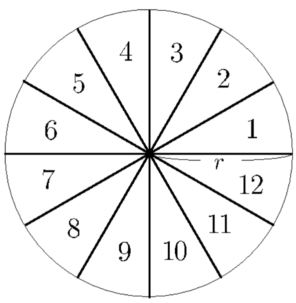
(2) $-510^\circ = -360^\circ - 150^\circ = -2\pi - \dfrac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\dfrac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

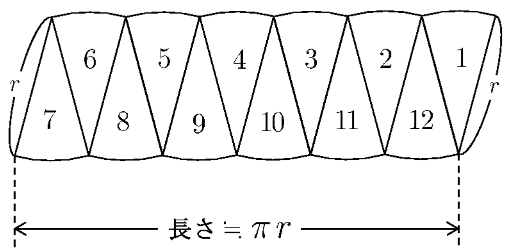
問2 次の角度を弧度法で表せ。

(1) 540°　(2) -270°　(3) 630°

(4) -405°　(5) 750°　(6) -855°

問3 1ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)



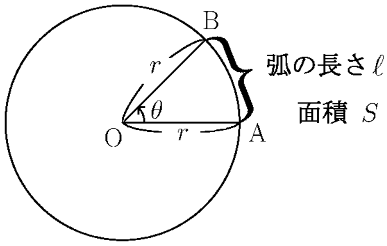


(1) 半径 r の円周の長さ ℓ を求めよ。　$\ell =$

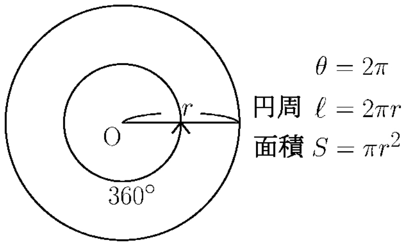
(2) 半径 r の円の面積 S を求めよ。　$S =$

＜弧度法3＞

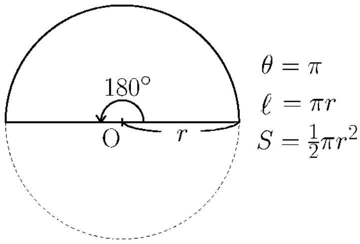
中心角 θ、半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



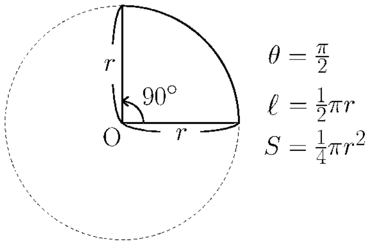
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは
ℓ は円周の長さだから
$\ell = 2\pi r$
であり S は円の面積だから
$S = \pi r^2$



(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは
(1) の半分であるから
$\ell = \pi r$
$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$



(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90^\circ$ のときは
(1) の $\dfrac{1}{4}$ であるから
$\ell = \dfrac{1}{2}\pi r$
$S = \dfrac{1}{4}\pi r^2$



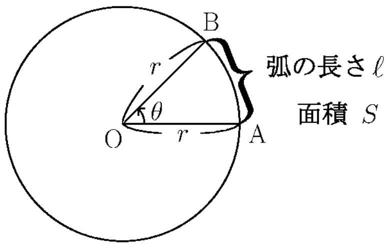
問 1 次の表を完成させよ。

度数法		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

問 2 上の表を参考にして、一般に角度が θ（ラジアン）であるとき弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$

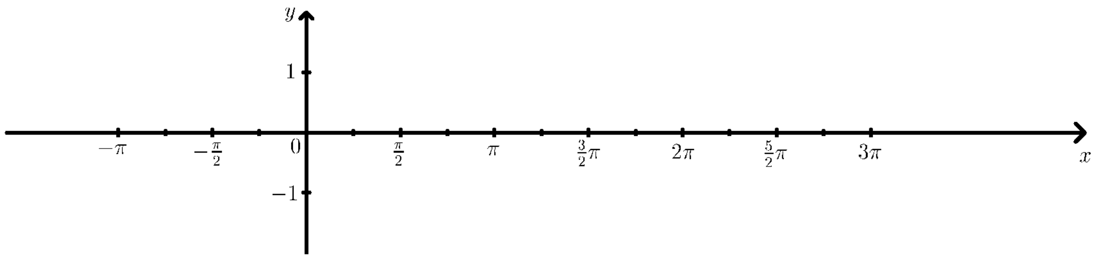


< 三角関数のグラフ >

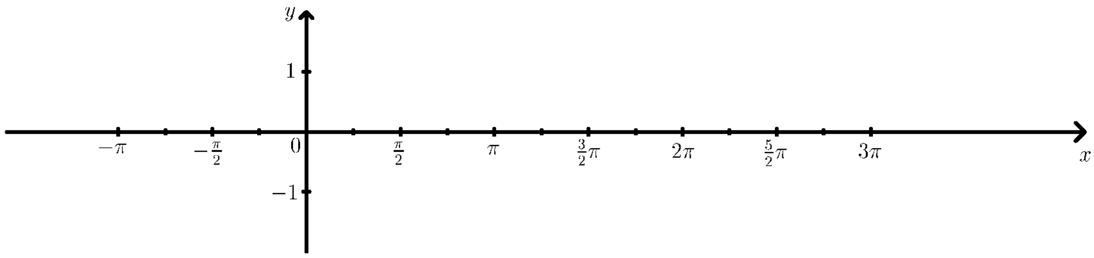
問　表を完成し、$y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法	$-180°$			$-45°$	$0°$		$90°$				$270°$	$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

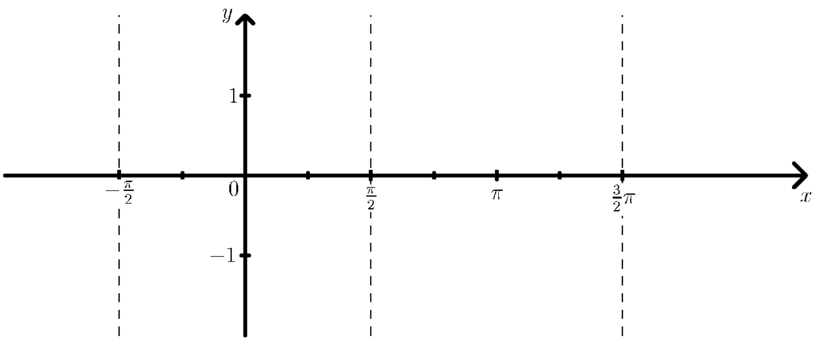


(2) $y = \cos x$



x																		
x	度数法	$-90°$			$-30°$	$0°$	$30°$		$60°$		$120°$			$180°$		$225°$	$240°$	
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$																		

(3) $y = \tan x$



< 正弦波 1 >

定数 A , B , C に対し、正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを **正弦波**という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

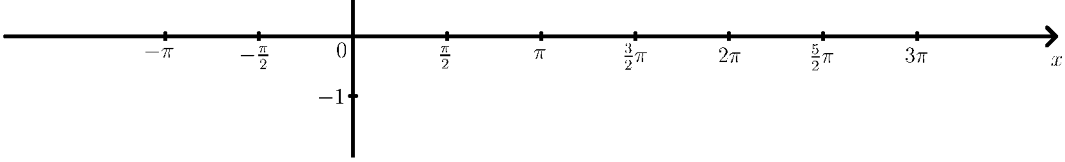
であるが $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**」という。
一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において、(　　) の中の部分 (この場合は $Bx + C$) を**位相**という。

問 次の表を完成し、$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

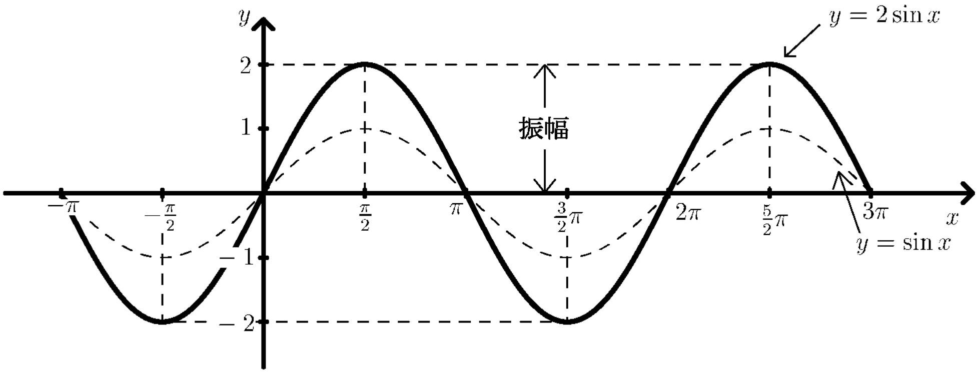
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



＜ 正弦波 2 ＞

例 $y = 2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0

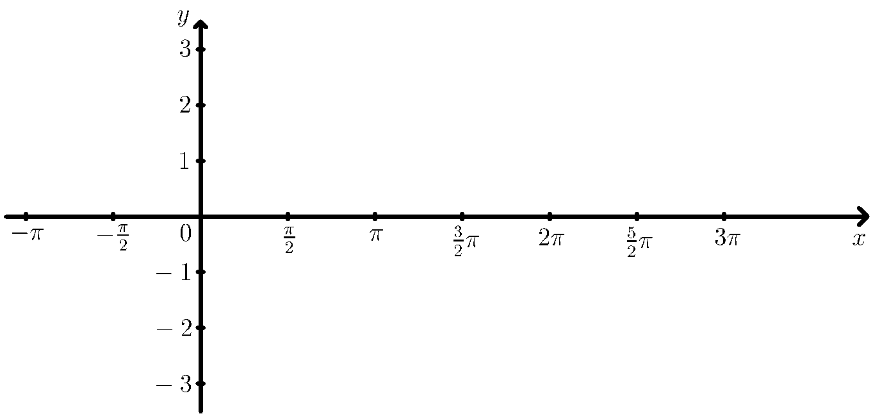


このグラフでは実線が $y = 2\sin x$ のグラフであり、点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は -2 である。

このような場合に「この正弦波の**振幅は 2**」という。

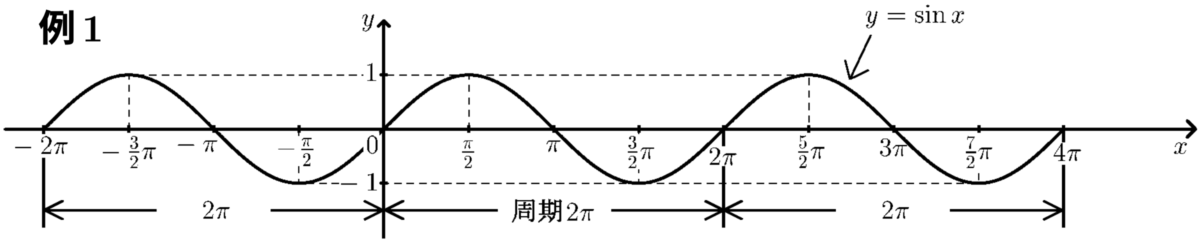
一般の正弦波の場合に、x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問 $y = -3\sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。



< 正弦波 3 >

例 1

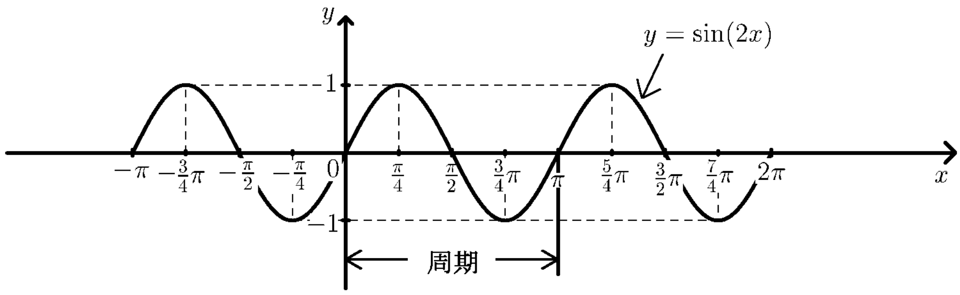


このグラフは $y=\sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい、一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$y=\sin x$ の周期は 2π である。

例 2 $y=\sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

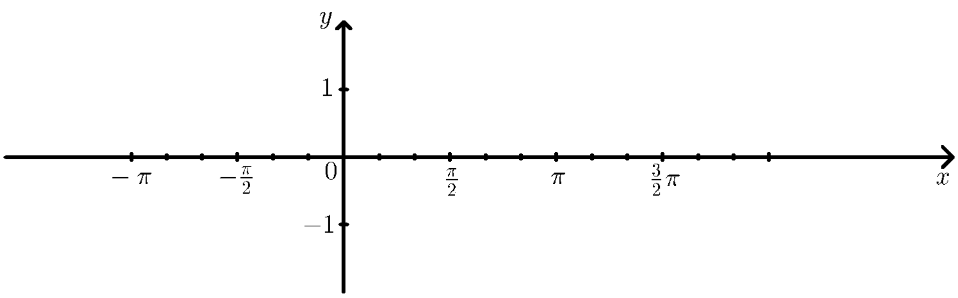


このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、

$y=\sin(2x)$ の周期は π である。

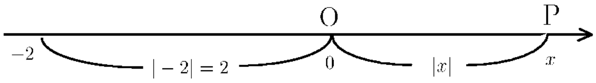
問 次の表を完成し、$y=\sin(3x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													



＜絶対値＞

問 1 実数 x の数直線上の位置



を点 P (x) とする。原点 O(0) からの距離 OP を x の 絶対値といい、

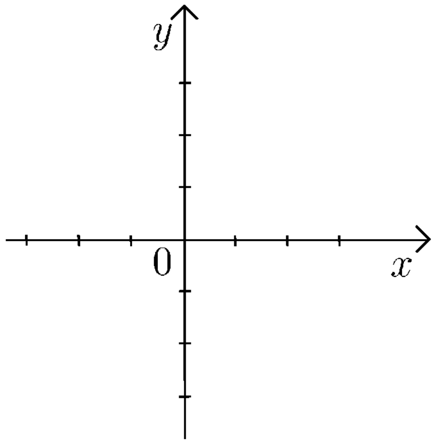
$$\mathrm{OP}=|x|$$

と表わす。例えば、$|2| = 2$ 、$|-2| = 2$ である。ここで、

$$y = |x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを書け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



又、以下の文章の $\boxed{\quad}$ の中に適当な文字式を入れよ。

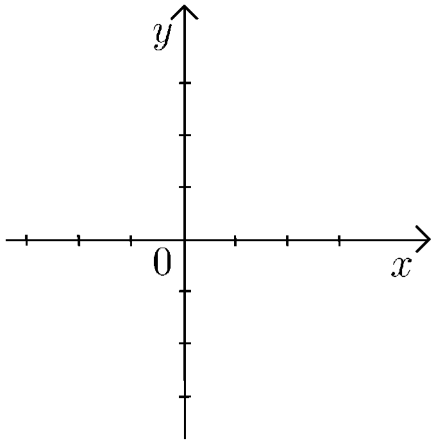
「右のグラフより、$y = |x|$ のグラフは

$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad}$ であり
$x < 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad}$ であることから、

$$y = |x| = \begin{cases} \boxed{\quad} & (x \geqq 0) \\ \boxed{\quad} & (x < 0) \end{cases}$$ が分かる。」

問 2 関数 $y = |x^2 - 4|$ に対し、表を完成し、

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



右図に、グラフを書き、以下の文章の $\boxed{\quad}$ の中に、
適当な数字又は文字式を入れよ。
「右のグラフより、 $y = |x^2 - 4|$ のグラフは、
３つの領域に分かれた式

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} \boxed{\qquad} & (\boxed{\quad} \leqq x) \\ \boxed{\qquad} & (\boxed{\quad} < x < \boxed{\quad}) \\ \boxed{\qquad} & (x \leqq \boxed{\quad}) \end{cases}$$

で、表わされる。グラフをよく見ると、このグラフは２次関数

$$y = \boxed{\qquad}$$

のグラフで x 軸より下にある部分を、x 軸を対称軸として折り返したものと同じ。」

< ガウス記号 >

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leqq x < n+1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例

$[1.5] = \ \ 1,$ $\qquad [2.76] = 2$

$[3.024] = \ \ 3,$ $\qquad [4.8196] = 4$

$[0.135] = \ \ 0,$ $\qquad [-0.52] = -1$

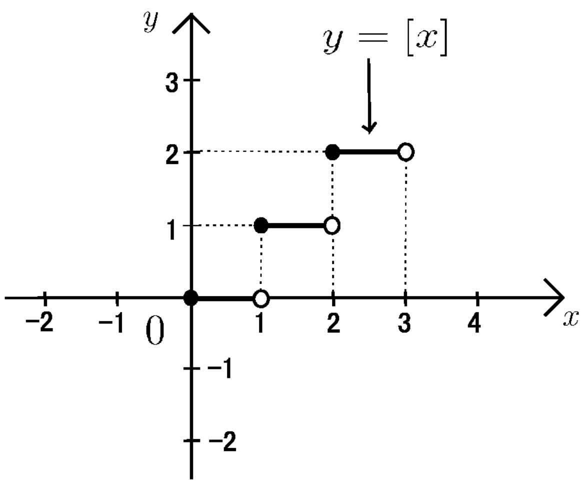
$[-1.23] = -2,$ $\qquad [-2.746] = -3$

問 1　次の値を求めよ。

(1) $[1.23] =$　　(2) $[9.87] =$　　(3) $[\ 0.9999\ ] =$

(4) $[-0.1] =$　　(5) $[-3.69] =$　　(6) $[-9.5\ ] =$

問 2　関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。



$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。

< 左極限・右極限 1 >

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a-0}$

(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a+0}$

と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2-0}$ とは $x = 1.9,\ \ x = 1.99,\ \ x = 1.999, \cdots$

というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$$[1.9] = 1\ ,\quad [1.99] = 1\ ,\quad [1.999] = 1\ , \cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2-0}[x] = 1}$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2+0}$ とは $x = 2.1,\ \ x = 2.01,\ \ x = 2.001, \cdots$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$$[2.1] = 2\ ,\quad [2.01] = 2\ ,\quad [2.001] = 2\ , \cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2+0}[x] = 2}$$

(注) (1) 0 への左極限 $x \to 0-0$ を略して $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{x \to -0}$ とは $x = -0.1\ ,\ \ x = -0.01\ ,\ \ x = -0.001, \cdots$

というふうに 0 より小さい値をとりながら 0 に近づく極限である。

(2) 0 への右極限 $x \to 0+0$ を略して $\boxed{x \to +0}$ と書く。

$\boxed{x \to +0}$ とは $x = 0.1\ ,\ \ x = 0.01\ ,\ \ x = 0.001, \cdots$

というふうに 0 より大きい値をとりながら 0 に近づく極限である。

問 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}[x]$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 3+0}[x]$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -0}[x]$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to +0}[x]$

＜ 左極限・右極限 2 ＞

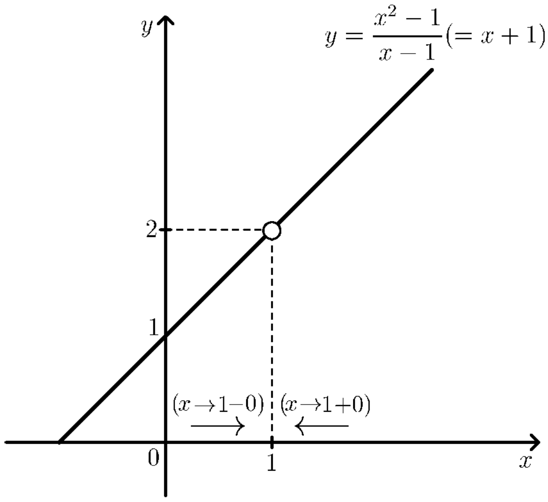
例 1　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ で定義されないが、$x=1$ における左極限と右極限は

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

のように一致する。このような場合は単に

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

と書く。



一般の関数 $f(x)$ に対し、$x=a$ における左極限と右極限が同じ値 α に収束するとき、すなわち

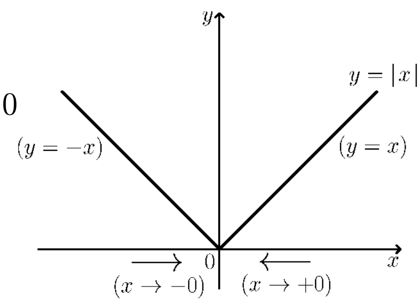
> $$\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$$
> の両方の式がなりたつとき、単に
> $$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$
> と書く。

例 2　$f(x)=|x|$（絶対値）の場合

(1) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $\displaystyle\lim_{x\to -0}|x|=\lim_{x\to -0}(-x)=0$

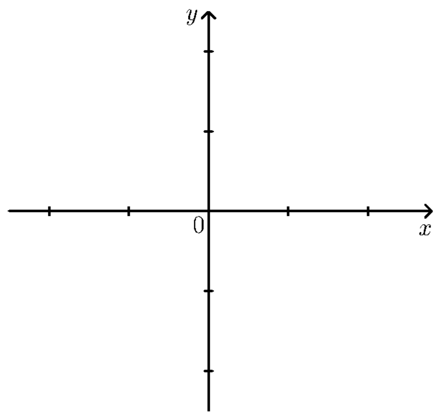
(2) $x>0$ のとき $|x|=\ x$ より $\displaystyle\lim_{x\to +0}|x|=\lim_{x\to +0}x=0$

よって (1) と (2) より $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$

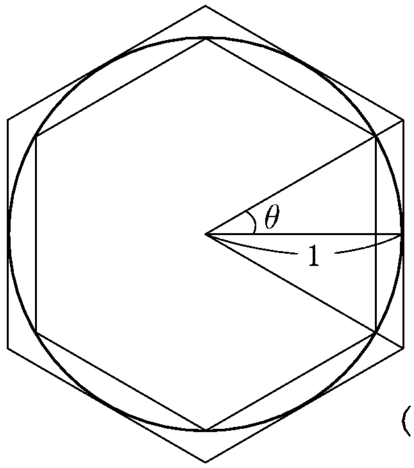


問　$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$ に対し、次の極限値を求め、$y=\dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=$　　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=$



＜三角関数の極限1＞

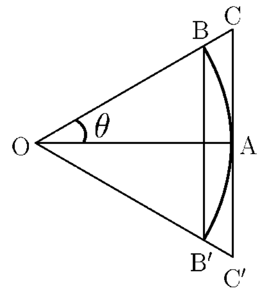


(図1)

円周率 π は半径 1 の円周の長さである。
アルキメデスは半径 1 の円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さを計って円周率 π を計算した。実際には正 6 角形から始めて正 12 角形、正 24 角形、48 角形、96 角形と計算して

$$3\frac{10}{71}(=3.1408) < \pi < 3\frac{1}{7}(=3.1429)$$

を得たのである。



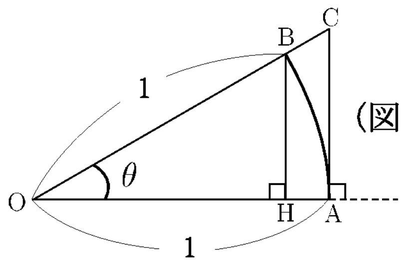
(図2)

アルキメデスの考えは図 2 の角 θ が小さくなるとき、弧 BAB′ の長さは内接多角形の辺 BB′ と外接多角形の辺 CC′ で近似でき、さらに

BB′ の長さ ＜ 弧 BAB′ の長さ ＜ CC′ の長さ

がなりたつ。

ここではアルキメデスの考えを極限の式で表すことを目的にする。



(図3)

図 3 において

ℓ_1 : 線分 BH の長さ

ℓ_2 : 弧 AB の長さ

ℓ_3 : 線分 AC の長さ

とする。

問 1 ℓ_1 と ℓ_3 の長さを θ を用いた三角関数で表せ。

$\ell_1 =$ $\qquad\qquad$, $\qquad \ell_3 =$

問 2 ℓ_2 の長さを θ を用いて表せ。(ヒント:半径 r、中心角 θ の弧の長さは 11 ページ問 2 の ℓ)

$\ell_2 =$

問 3 アルキメデスの考えより $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$ である。この不等式を θ で表し、単純化せよ。

問 4 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して問 3 で得られた不等式を次の形にせよ。

$$\boxed{} < \theta < \boxed{}$$

$\boxed{}$ の中を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

< 三角関数の極限 2 >

前ページの結果より、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \qquad \sin\theta \quad < \quad \theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

がわかる。右側の不等式で $\dfrac{\cos\theta}{\theta} > 0 \ (\theta > 0,\ \cos\theta > 0)$ より

$$\theta \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \theta \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$$

がわかる。

問 1 上の結果より、次の不等式が得られる。

$$(**) \qquad \cos\theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \quad < \quad \boxed{}$$

$(*)$ の左側の不等式を θ で割ることにより、□の中に適当な数字を入れよ。

問 2 $\theta \to +0$（右極限）のとき $\cos\theta \to \cos 0 = 1$ である。不等式 $(**)$ から次の極限値を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{\theta\to+0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ =$$

問 3 $\theta \to -0$（左極限）のとき $\theta = -\theta_1$ とおくと $\theta_1 \to +0$ であるから

$$(2) \quad \lim_{\theta\to-0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ = \ \lim_{\theta_1\to+0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1}$$

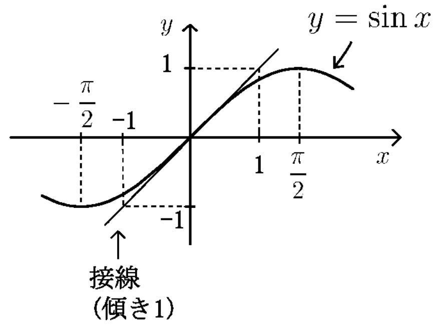
となる。$\sin(-\theta_1) = -\sin(\theta_1)$ と (1) 式の結果を利用して、
(2) 式の極限値を求めよ。

＜三角関数の極限3＞

前ページの問 2，問 3 の結果より

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \ , \qquad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

である。従って右極限と左極限が一致するから



$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ = \ 1}$$

が成り立つ。
(注) 上の極限は「$y = \sin x$ のグラフの原点における接線の傾きが 1 である」ことを意味する。

例 1 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \cos 0 = 1$, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = \sin 0 = 0$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)}{\theta \qquad \times(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \right) = 1 \times \frac{0}{1+1} = 0$$

例 2 加法定理と上の結果より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta)-\sin x}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta - \sin x}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x(\cos\theta - 1) + \cos x\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left\{ -\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\sin x + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos x \right\}$$

$$= -0 \times \sin x + 1 \times \cos x = \cos x$$

問 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ と上の結果を使って、
次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(x+\theta)-\cos x}{\theta} =$$

＜三角関数の導関数＞

導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

より $\sin x$ の導関数は次の極限値

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

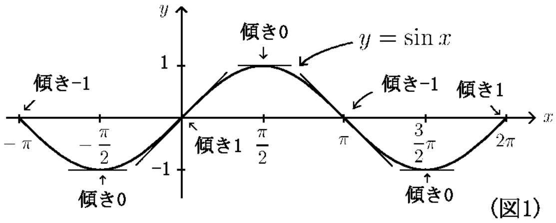
である。ここで 0 に近づく変数 h を θ に変えると、

前ページの結果より

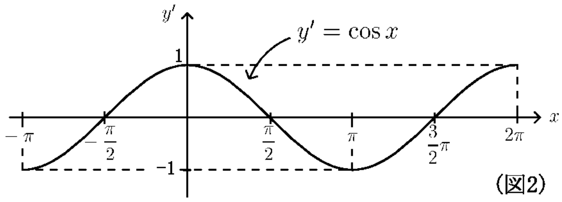
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \cos x$$

であるから $\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$



(図1)



(図2)

図 1 は $y = \sin x$ のグラフである。

図 1 の曲線の傾き (=接線の傾き) をグラフにしたものが図 2($y' = \cos x$) である。

$x = 0$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos 0 = 1$　　,　$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x = \pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos(\pi) = -1$　　,　$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 0$

問 1　前ページの問の結果を用いて $\cos x$ の導関数を求めよ。

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

問 2　問 1 の結果から以下の傾きを求めよ。

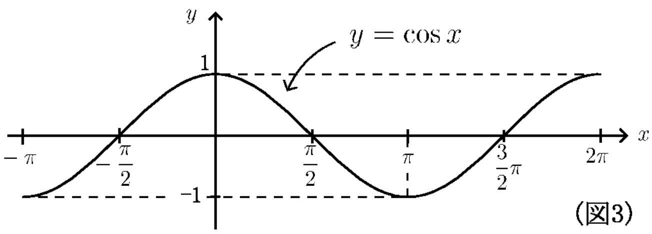
$x = 0$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \pi$ のとき　　$y = \cos x$ の傾き=

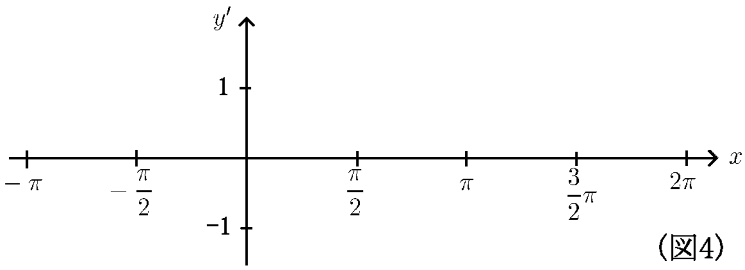
$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

$x = 2\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=



(図3)

問 3　$y = \cos x$ の**導関数**のグラフを $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で図 4 に書け。



(図4)

＜三角関数の微分・積分＞

前ページの結果より

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad , \qquad (\cos x)' = -\sin x}$$

例1 (1) $(-\cos x)' = (-1 \times \cos x)' = -1 \times (\cos x)' = -1 \times (-\sin x) = \sin x$

(2) $(5\sin x + 4\cos x)' = 5 \times (\sin x)' + 4 \times (\cos x)' = 5\cos x - 4\sin x$

問1 次の関数を微分せよ。

(1) $(4\sin x + 6\cos x)' =$　　(2) $(5 + 3\sin x - 4\cos x)' =$

上の微分の公式と例1(1)より以下の不定積分が分かる。

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int \sin x dx = -\cos x + C}$$

例2 $\displaystyle\int (2\cos x + 3\sin x)dx = 2\sin x - 3\cos x + C$

問2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3\cos x + 4\sin x)dx$

(2) $\displaystyle\int (5\cos x - 6\sin x)dx$

例3 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx = \Big[3\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin 0 = 3 \times 1 - 3 \times 0 = 3$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} 4\sin x dx = \Big[-4\cos x\Big]_0^{\pi} = -4\cos\pi + 4\cos 0 = -4 \times (-1) + 4 \times 1 = 8$

問3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2\sin x)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} (3\cos x - \sin x)dx$

＜ 微分・不定積分の練習 ＞

問1 次の導関数を求めよ。

(1) $(1)'$ (2) $(x^5)'$ (3) $(x^n)'$

(4) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$ (5) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'$ (6) $(\sqrt{x})'$

(7) $(\sqrt[3]{x})'$ (8) $(\sqrt[4]{x^5})'$ (9) $(x\sqrt{x})'$

(10) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ (11) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$ (12) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

(13) $(2^x)'$ (14) $(e^x)'$ (15) $(\log x)'$

(16) $(\sin x)'$ (17) $(\cos x)'$ (18) $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'$

(19) $(5x^4 - 6x^3 + 7x + 8)'$ (20) $\left(\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x}\right)'$

(21) $\left(3\sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)'$ (22) $(3e^x + 4\log x)'$

(23) $(3\sin x + 4\cos x)'$ (24) $\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)'$

問2 次の不定積分を求めよ。$\left(\text{ただし} \displaystyle\int dx = \int 1dx\right)$

(1) $\displaystyle\int dx$ (2) $\displaystyle\int x^3 dx$ (3) $\displaystyle\int x^n dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx$ (6) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx$

(7) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

(10) $\displaystyle\int 3^x dx$ (11) $\displaystyle\int e^x dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx$

(13) $\displaystyle\int \cos x dx$ (14) $\displaystyle\int \sin x dx$ (15) $\displaystyle\int (x+1)(x-1)dx$

(16) $\displaystyle\int (3\cos x - 4\sin x + 5e^x)dx$ (17) $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$

＜定積分の練習＞

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}\ \text{(定積分)}$$

問1 定数 a, b に対し以下の定積分の値を上の $F(b) - F(a)$ の形にせよ。

$$\left(\text{ただし } n \neq -1 \quad , \qquad \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

(1) $\displaystyle\int_a^b dx = \int_a^b 1dx =$

(2) $\displaystyle\int_a^b x^n dx =$

(3) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx =$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^x dx =$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos x dx =$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx =$

問2 以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^{10} dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 + x^3 + x^4)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$

(5) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}dx$

(6) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(8) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{x}dx$

(10) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx$

(11) $\displaystyle\int_{-1}^1 4e^x dx$

(12) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx$

＜ 合成関数 ＞

2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。
これらの関数を $f(x)$ と $g(x)$ の **合成関数** という。

例 1 $f(x)=x^3\ ,\ g(x)=\sin x$ のとき

$$g(f(x))=g(x^3)=\sin(x^3)$$

$$f(g(x))=f(\sin x)=(\sin x)^3=\sin^3 x$$

注) $\sin(x^3)\neq\sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2+1,\ g(x)=3x$, $g(f(x))=$, $f(g(x))=$

(2) $f(x)=\tan x,\ g(x)=x+2$, $g(f(x))=$, $f(g(x))=$

(3) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2-1$, $g(f(x))=$, $f(g(x))=$

(4) $f(x)=x^2+2,\ g(x)=\log_2 x,\ g(f(x))=$, $f(g(x))=$

例 2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。
たとえば

$$y=\log_{10}(x^2+3x)$$

は

$$f(x)=x^2+3x\ ,\quad g(x)=\log_{10} x$$

とおくと

$$y=\log_{10}(f(x))=g(f(x))$$

問 2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y=(x^2-x+2)^7$, $f(x)=$, $g(x)=$

(2) $y=\cos(2x+3)$, $f(x)=$, $g(x)=$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$, $f(x)=$, $g(x)=$

＜微分記号＞

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限でもあるから、導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す（全て同じ意味である）。 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数（ x についての微分）であることを明記するためにある。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\qquad \dfrac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\qquad \dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ （π は円周率） $\qquad \dfrac{dS}{dr} =$

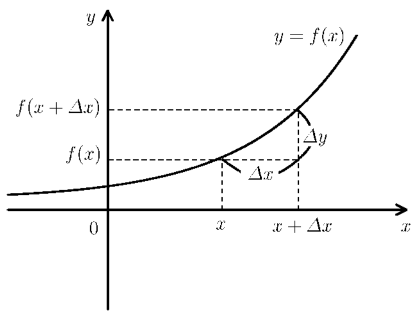
(5) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad \dfrac{dV}{dr} =$

< 増分記号 Δ (デルタ) >

関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \to 0$ のときの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\dfrac{dy}{dx}$ と書く。



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限値を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\displaystyle \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

< 合成関数の微分 1 >

例 関数 $y=\sin(x^3)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u=x^3$ とおくと $y=\sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u=(x+\Delta x)^3-x^3$$

$$\Delta y=\sin(u+\Delta u)-\sin(u)\quad\Big(=\sin\big((x+\Delta x)^3\big)-\sin(x^3)\Big)$$

とおくと、 $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin(u+\Delta u)-\sin(u)}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\right)$$

$$=(\sin u)'\times(x^3)'$$

$$=\cos(u)\times 3x^2=\cos(x^3)\times 3x^2=3x^2\cos(x^3)$$

問 関数 $y=\cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u=x^4$ とおくと、 $y=\cos(u)$ となる。

$$\Delta u=(x+\Delta x)^4-x^4$$

$$\Delta y=\cos(u+\Delta u)-\cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx}=$

＜合成関数の微分２＞

問１ 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき、 $\dfrac{dy}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ を、 $\dfrac{dy}{du}\left(= \lim_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)$ と $\dfrac{du}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \qquad\qquad}$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(u^7\right)' \times \left(x^3 + 5x^2\right)' = 7u^6 \times \left(3x^2 + 10x\right) = 7\left(x^3 + 5x^2\right)^6\left(3x^2 + 10x\right)$$

問２ 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 2x + 5)^3$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^5 - 2x^2)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分3 >

例 1 $y=(x^3+4x)^7$ を考える。$u=x^3+4x$ とおくと $y=u^7$ より

$$\left((x^3+4x)^7\right)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times(x^3+4x)'=7(x^3+4)^6(3x^2+4)$$

例 2 $y=\big(f(x)\big)^7$ を考える。$u=f(x)$ とおくと $y=u^7$ より

$$\left(\big(f(x)\big)^7\right)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times\big(f(x)\big)'=7u^6\times f'(x)=7\big(f(x)\big)^6\times f'(x)$$

例 3 $y=\big(f(x)\big)^n$ を考える。$u=f(x)$ とおくと $y=u^n$ より

$$\left(\big(f(x)\big)^n\right)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^n)'\times\big(f(x)\big)'=nu^{n-1}\times f'(x)=n\big(f(x)\big)^{n-1}\times f'(x)$$

よって

$$\boxed{\left(\big(f(x)\big)^n\right)'=n\big(f(x)\big)^{n-1}\times f'(x)}$$

が成り立つ。

例 4 $\left((x^5+6x)^8\right)'=8(x^5+6x)^7\times(x^5+6x)'=8(x^5+6x)^7\times(5x^4+6)$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\left((3x+5)^7\right)'$
$=$

(2) $\left((4x^2+9x)^6\right)'$
$=$

(3) $\left((x^4-2x^3)^{10}\right)'$
$=$

(4) $\left((x+e^x)^5\right)'$
$=$

(5) $\left((x^2+3\sin x)^5\right)'$
$=$

(6) $\left((e^x-2\cos x)^8\right)'$
$=$

例 5 $\left(\dfrac{1}{(x^5+6x)^2}\right)'=\left((x^5+6x)^{-2}\right)'=-2(x^5+6x)^{-3}\times(x^5+6x)'=-\dfrac{2(5x^4+6)}{(x^5+6x)^3}$

問 2 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{(x^4+7x^2)^3}\right)'=$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^5+6x}\right)'=$

(3) $\left(\dfrac{1}{(2+\cos x)^3}\right)'=$

(4) $\left(\dfrac{1}{(1+e^x)^2}\right)'=$

＜合成関数の微分4＞

前ページより

$$\boxed{\left(\big(f(x)\big)^n\right)' = n\big(f(x)\big)^{n-1} \times f'(x)}$$

であった。ここで n は分数の場合でも成り立つ。

例 1 $\left(\sqrt[3]{(x^6+7x)^4}\right)' = \left((x^6+7x)^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3}(x^6+7x)^{\frac{4}{3}-1} \times (x^6+7x)'$

$$= \frac{4}{3}(x^6+7x)^{\frac{1}{3}} \times (6x^5+7) = \frac{4}{3}(6x^5+7)\sqrt[3]{x^6+7x}$$

例 2 $\left((1+\cos x)\sqrt{1+\cos x}\right)' = \left((1+\cos x)^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}(1+\cos x)^{\frac{3}{2}-1} \times (1+\cos x)'$

$$= \frac{3}{2}(1+\cos x)^{\frac{1}{2}} \times (-\sin x) = -\frac{3}{2}\sin x\sqrt{1+\cos x}$$

問 1　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\sqrt[3]{(4x+6)^5}\right)' =$

(2) $\left(\sqrt{(5x^2+6x)^3}\right)' =$

例 3 $\left(\sqrt{5x-7}\right)' = \left((5x-7)^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}(5x-7)^{\frac{1}{2}-1} \times (5x-7)' = \dfrac{1}{2}(5x-7)^{-\frac{1}{2}} \times 5$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{(5x-7)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$$

例 4 $\left(\sqrt[3]{1+e^x}\right)' = \left((1+e^x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}(1+e^x)^{\frac{1}{3}-1} \times (1+e^x)' = \dfrac{1}{3}(1+e^x)^{-\frac{2}{3}} \times e^x$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1+e^x)^{\frac{2}{3}}} \times e^x = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}$$

問 2　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\sqrt{x^3+4x^2}\right)'$

$=$

(2) $\left(\sqrt[4]{2+\sin x}\right)'$

$=$

例 5 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+5x}}\right)' = \left((x^4+5x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}(x^4+5x)^{-\frac{1}{2}-1} \times (x^4+5x)'$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^4+5x)^{\frac{1}{2}+1}} \times (4x^3+5) = -\frac{4x^3+5}{2(x^4+5x)\sqrt{x^4+5x}}$$

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$

$=$

(2) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

$=$

＜ 合成関数の微分５ ＞

例 1　$y = \cos(x^3 + 4x)$ を考える。$u = x^3 + 4x$ とおくと $y = \cos u$ より

$$\left(\cos\left(x^3+4x\right)\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\cos u)' \times \left(x^3+4x\right)' = -\sin(u) \times \left(3x^2+4\right)$$
$$= -\sin\left(x^3+4x\right) \times \left(3x^2+4\right) = -\left(3x^2+4\right)\sin\left(x^3+4x\right)$$

一般に $\boxed{\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' = -\sin\big(f(x)\big) \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 1　次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\cos(4x+3)\big)'$

$=$

(2) $\big(\cos(x^5 - 2x + 1)\big)'$

$=$

例 2　$y = \sin(x^3 + 4x)$ を考える。$u = x^3 + 4x$ とおくと $u = \sin u$ より

$$\left(\sin(x^3+4x)\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\sin(u)\right)' \times (x^3+4x)' = \cos(u) \times (3x^2+4)$$
$$= (3x^2+4)\cos(x^3+4x)$$

一般に $\boxed{\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' = \cos\big(f(x)\big) \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 2　次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\sin(5x-4)\big)'$

$=$

(2) $\big(\sin(x^6 + 7x^2 - 3)\big)'$

$=$

例 3　$y = e^{x^3+4x}$ を考える。$u = x^3 + 4x$ とおくと $y = e^u$ より

$$\left(e^{x^3+4x}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times \left(x^3+4x\right)' = e^u \times \left(3x^2+4\right) = \left(3x^2+4\right)e^{x^3+4x}$$

一般に $\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \times f'(x)}$ がなりたつ。

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(e^{2x}\right)' =$

(2) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' =$

(3) $\left(e^{1+3x}\right)' =$

(4) $\left(e^{x+x^3}\right)' =$

< 合成関数の微分 6 >

例　関数 $y = \log(x^2 + 3x + 4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2 + 3x + 4$　とおくと　$y = \log u$　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log u)' \times (x^2 + 3x + 4)'$$
$$= \frac{1}{u} \times (2x + 3) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}$$

問 1　例にならって、次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^3 + 2x - 5)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log(1 + \sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log(5 - \cos x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2　上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y = \log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx} = \Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)' = \qquad\qquad}$

＜合成関数の微分 7 ＞

微分の公式

$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$, $\boxed{(e^x)' = e^x}$, $\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$, $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$, $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

に対し、x を $f(x)$ でおきかえた合成関数の微分の公式は

$\boxed{\Big(\big(f(x)\big)^n\Big)' = n\big(f(x)\big)^{n-1} \times f'(x)}$, $\boxed{\Big(e^{f(x)}\Big)' = e^{f(x)} \times f'(x)}$, $\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)' = \dfrac{1}{f(x)} \times f'(x)}$

$\boxed{\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' = \cos\left(f(x)\right) \times f'(x)}$, $\boxed{\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' = -\sin\big(f(x)\big) \times f'(x)}$

となる。

例 1 (1) $\big((3x+4)^7\big)' = 7(3x+4)^6 \times (3x+4)' = 21(3x+4)^6$

(2) $\big((ax+b)^7\big)' = 7(ax+b)^6 \times (ax+b)' = 7a(ax+b)^6$

この例より定数 a, b と有理数 n に対し

$$\boxed{\Big((ax+b)^n\Big)' = na(ax+b)^{n-1}}$$

がわかる。

問 1 定数 a, b に対し次の導関数を求めよ。

(1) $\Big(e^{ax+b}\Big)' =$

(2) $\Big(\log(ax+b)\Big)' =$

(3) $\Big(\sin(ax+b)\Big)' =$

(4) $\Big(\cos(ax+b)\Big)' =$

例 2 (1) $\left(\dfrac{1}{21}(3x+4)^7\right)' = \dfrac{1}{21} \times \Big((3x+4)^7\Big)' = \dfrac{1}{21} \times 21(3x+4)^6 = (3x+4)^6$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = \dfrac{1}{2} \times \left(e^{2x+1}\right)' = \dfrac{1}{2} \times 2e^{2x+1} = e^{2x+1}$

問 2 定数 a, b $(a \neq 0)$ と有理数 n $(n \neq -1)$ に対し、次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{7a}(ax+b)^7\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{1}{a}e^{ax+b}\right)' =$

(4) $\left(\dfrac{1}{a}\log(ax+b)\right)' =$

(5) $\left(\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)\right)' =$

(6) $\left(\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)\right)' =$

< 対数微分法 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (35 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

（注）両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。
(解)

問 2 例と問 1 の結果を使って、一般の正数 $(a > 0)$ に対する指数関数 $y = a^x$ の導関数 $y' = (a^x)'$ を類推せよ。

(答) $(a^x)' =$

問 3 $a = e$（ネピア数）のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

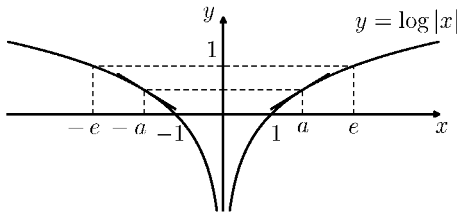
(答) $(e^x)' =$

$< \log|x|$ の微分 $>$

例 1 関数 $y=\log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より、 $y=\log|x|$ のグラフは右図の
ように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$

となる。

例 2 関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。
$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\sin x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|2x^3-3x^2|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

< 不定積分の練習 1 >

微分と不定積分は逆演算である。すなわち

$$\boxed{F'(x) = f(x)\ \text{(微分)}\ \Leftrightarrow\ \int f(x)dx = F(x) + C\ \text{(不定積分)}}$$

問 1　次の微分の式を不定積分の式に変えよ。

(1) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \Leftrightarrow$

(2) $(e^x)' = e^x \quad \Leftrightarrow$

(3) $(\log x)' = \dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$

(4) $(\sin x)' = \cos x \quad \Leftrightarrow$

(5) $(\cos x)' = -\sin x \quad \Leftrightarrow$

例 1　$\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}$ より $\left(\dfrac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = \dfrac{1}{2} \times \left(2e^{2x+1}\right) = e^{2x+1}$ であるから

$$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

例 2　$(\sin(3x+4))' = 3\cos(3x+4)$ より $\left(\dfrac{1}{3}\sin(3x+4)\right)' = \dfrac{1}{3} \times (3\cos(3x+4)) = \cos(3x+4)$ であるから

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$$

問 2　次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{3}e^{3x-2}\right)' =$ 　　$\Leftrightarrow \displaystyle\int e^{3x-2}dx =$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}\sin(4x+5)\right)' =$ 　　$\Leftrightarrow \displaystyle\int \cos(4x+5)dx =$

(3) $\left(\dfrac{1}{5}\log(5x+6)\right)' =$ 　　$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{1}{5x+6}dx =$

(4) $\left(-\dfrac{1}{7}\cos(7x-3)\right)' =$ 　　$\Leftrightarrow \displaystyle\int \sin(7x-3)dx =$

問 3　定数 a, b $(a \neq 0)$ に対し、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{ax+b}dx =$ 　　(2) $\displaystyle\int \cos(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$ 　　(4) $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

< 不定積分の練習 2 >

問 1　次の微分を求め、微分の式を不定積分の式に変えよ。

(1) $\left(\frac{1}{7}x^7\right)' =$ 　　　　$\Leftrightarrow \int x^6 dx =$

(2) $\left(\frac{1}{21}(3x+5)^7\right)' =$ 　　　　$\Leftrightarrow \int (3x+5)^6 dx =$

(3) $\left(\frac{1}{7a}(ax+b)^7\right)' =$ 　　　　$\Leftrightarrow \int (ax+b)^6 dx =$

(4) $\left(\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}\right)' =$ 　　　　$\Leftrightarrow \int (ax+b)^n dx =$

例 (1) $\int (5x-3)^8\, dx = \frac{1}{(8+1)\times 5}(5x-3)^{8+1} + C = \frac{1}{45}(5x-3)^9 + C$

(2) $\int \sqrt{7x+4} dx = \int (7x+4)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\times 7}(7x+4)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{21}(7x+4)\sqrt{7x+4} + C$

(3) $\int \frac{1}{(5x+7)^3} dx = \int (5x+7)^{-3}\, dx = \frac{1}{(-3+1)\times 5}(5x+7)^{-3+1} + C = \frac{1}{-10}(5x+7)^{-2} + C$

$$= -\frac{1}{10}\times\frac{1}{(5x+7)^2} + C = -\frac{1}{10(5x+7)^2} + C$$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (4x+1)^2\, dx$ 　　　　(2) $\int (5x-3)^6\, dx$

(3) $\int \sqrt{4x+3} dx$ 　　　　(4) $\int \sqrt[3]{6x-5} dx$

(5) $\int \frac{1}{(3x+1)^2} dx$ 　　　　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}} dx$

問 3　前ページ問 3 の結果を利用して次の不定積分を求めよ。

(1) $\int e^{3x-2} dx$ 　　　　(2) $\int \cos(5x+4)\, dx$

(3) $\int \frac{1}{10x+13} dx$ 　　　　(4) $\int \sin(6x-1)\, dx$