高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Sereis **A**

No. **4**

内容

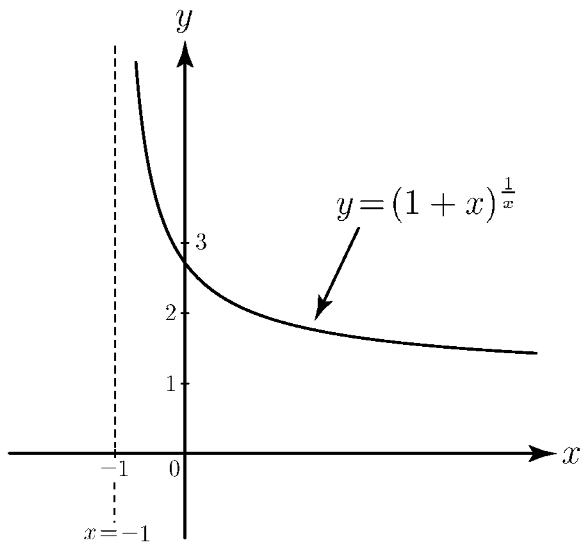
◎ 整数･分数指数

◎ 有理数乗の微分･積分

◎ 指数関数の微分･積分

◎ 対数関数の微分･積分

◎ 三角関数



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜ 分数の微分 ＞

ここでは関数 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$ などの関数の導関数を具体的に計算する。

例 1 $$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

例 2 $$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^2x^2}=-\frac{2}{x^3}$$

問 1 例 1、例 2 と同様なやり方で次の導関数を求めよ。

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}=$$

問 2 例 1、例 2、問 1 の結果を参考にして、次の導関数を類推せよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'=$ (2) $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=$

問 3 上の結果を利用して次の導関数を求めよ。

(1) $\left(-\dfrac{1}{x}\right)'=$ (2) $\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'=$

(3) $\left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)'=$ (4) $\left(-\dfrac{1}{4x^4}\right)'=$

(5) $\left(-\dfrac{1}{nx^n}\right)'=$ (6) $\left(-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right)'=$

< 整数指数 >

例 1 自然数 n と m に対し、$n > m$ ならば

$(*)$ $$\boxed{2^n \div 2^m = 2^{n-m}}$$

が成り立つ。今 $n = m$ のとき $(*)$ の左辺は 1 であり、右辺は 2^0 となる。そこで

$$\boxed{2^0 = 1} \quad (\text{ゼロ乗}=1)$$

と定めることにする。$(*)$ 式で $n = 0$ のとき左辺は $\dfrac{1}{2^m}$ であり、
右辺は 2^{-m} であるから

$$\boxed{2^{-m} = \frac{1}{2^m}}$$

と定めると、全ての整数 n と m に対して $(*)$ 式が成り立つ。

一般に正の数 a と自然数 m に対し

$$\boxed{a^0 = 1 \ (\text{ゼロ乗}=1) \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

と定めることにする。このように決めると全ての整数 n と m に対し

$$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

が成り立つ。

例 2 $5^0 = 1$, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$$3^5 \times 9^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{9^2} = \frac{3^5}{3^4} = 3$$

$$(2^3)^{-2} = \frac{1}{(2^3)^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

問 次の値を求めよ。

(1) 2^0　(2) 1^{-1}　(3) 2^{-2}

(4) 3^{-3}　(5) 6×4^{-3}　(6) $3^6 \times 27^{-2}$

(7) $(2^2)^{-1}$　(8) $(3^{-1})^2$　(9) $(5^{-1})^{-2}$

＜負の累乗関数の微分・積分＞

1 ページの結果より

$$\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

である。これを整数指数で表すと、

$$\boxed{\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}}$$

となる。これは微分の公式

公式 ： $\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$ （ p は整数 ）

において $p = -n$ の場合である。すなわち p は負の整数でもこの公式はなりたつ。

例 1 (1) $(x)' = \left(x^1\right)' = 1x^0 = 1$, (2) $(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \times x^{-1} = 0$

(3) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$ (2) $\left(\dfrac{1}{x^5}\right)' =$ (3) $\left(\dfrac{1}{x^{10}}\right)' =$

例 2 1 ページ問 3 の結果より

$$\left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right)' = \frac{1}{x^n}$$

である。不定積分で表すと

$$\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

となる。これを整数指数で表すと

$$\int x^{-n}dx = -\frac{1}{n-1}x^{-n+1} + C = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + C$$

となる。これは積分の公式

公式 ： $\boxed{\int x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C}$ （ p は整数 ）

で p は負の整数でも成り立つことを示している。

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx =$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{10}}dx =$

(3) $\displaystyle\int x^{-4}dx =$ (4) $\displaystyle\int x^{-7}dx =$

< 累乗根1 >

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m = 1$ のときは $\dfrac{n}{1} = n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。
$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例 1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2 = 2}$ である。

このxは無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の**2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x = \sqrt{2}}$ と書く。

例 2 体積が 2 である立方体のいっぺんの長さを x とすると $\boxed{x^3 = 2}$ である。

この x は無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の**3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x = \sqrt[3]{2}}$ と書く。

例 3 $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4 = 2}$ である。

x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 つの**4 乗根**といい $\boxed{x = \sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して、n 乗すると a になる正の数を x とする。
つまり $\boxed{x^n = a}$ $(x > 0)$ である。この x を a の$\boldsymbol{n}$ **乗根**といい $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$ と書く。
平方根、立方根、n 乗根等をまとめて **累乗根**（るいじょうこん） という。
また記号 $\sqrt{\quad}$、$\sqrt[3]{\quad}$、$\sqrt[n]{\quad}$ をまとめて**根号**という。
(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$ と書く。

例 4 累乗根は常に無理数とは限らない。たとえば

$$\sqrt{49} = 7, \quad \sqrt[3]{0.125} = 0.5, \quad \sqrt[4]{81} = 3, \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{169}$　　(2) $\sqrt[3]{8}$　　(3) $\sqrt[3]{125}$

(4) $\sqrt[4]{256}$　　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$　　(6) $\sqrt[5]{3125}$

< 累乗根2 >

例1 $\sqrt[3]{2}$ は3乗して2になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ がなりたつ。

例2 $x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$

より $x = \sqrt[3]{10}$ つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ がなりたつ。

例3 $y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ がなりたつ。

(注) $\sqrt[n]{}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または 0(ゼロ)) がはいる。
負の数は根号の中に入れない。

例4 (1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{15}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

＜累乗根3＞

例 1 (1) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} = 2 \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2} = 2 \times \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{54}$　(2) $\sqrt[4]{112}$　(3) $\sqrt[5]{64}$

例 2 $x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3 = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$
$$= \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5 \times 5 = 5^2$$

よって $x^3 = 5^2$ より $x = \sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

がなりたつ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式がなりたつ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

例 3 (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{(5^2)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(2) $\sqrt[3]{8^4} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt[9]{27}\right)^3$

(3) $\sqrt[4]{16^2}$　(4) $\sqrt[6]{25^3}$

＜分数指数１＞

例 1 自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\text{ 個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m\times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

(1) $$2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

(2) $$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ \ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例 2 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$, (2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$, (4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 次の値を求めよ。

(1) $121^{\frac{1}{2}}$　(2) $27^{\frac{1}{3}}$　(3) $25^{\frac{3}{2}}$

(4) $329^{\frac{2}{3}}$　(5) $81^{\frac{5}{4}}$　(6) $32^{\frac{4}{5}}$

(7) $16^{-\frac{1}{2}}$　(8) $27^{-\frac{4}{3}}$　(9) $64^{-\frac{2}{3}}$

＜ 分数指数2 ＞

例 1 $x=\sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$ より $x=\sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$$

例 2 $\sqrt[6]{2^3}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{4^3}$　(2) $\sqrt[12]{7^4}$　(3) $\sqrt[3]{5^9}$　(4) $\sqrt[6]{27^4}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

(別解)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

例 4 $\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5}\times\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{5\times5^3\times5^2}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(別解)　$\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{6}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=5^1=5$

例 5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$

(別解)　$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[2]{10}\times\sqrt[4]{100}$　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9}}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$　(4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$

＜ 指数法則 ＞

分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して

$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$, $2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$

$3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$, $4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 (1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^3}$

(2) $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^2}$

(4) $\sqrt[3]{a^7} \div (\sqrt[3]{a})^4$

(5) $(\sqrt[4]{a})^{\frac{8}{3}}$

(6) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}}\right)^{-2}$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

（注）ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $(3^3 \times 5^2)^{\frac{1}{7}} \times (3^4 \times 5^5)^{\frac{1}{7}}$

(2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{72}$

＜分数乗の微分１＞

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ などの関数の導関数を求めたい。

例１ $(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

ここで $\sqrt{x+h} = a$, $\sqrt{x} = b$ とおくと $h \to 0$ のとき $a \to b$ であり

$x+h = a^2$, $x = b^2$ より $h = a^2 - b^2$

だから

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{a\to b} \frac{a-b}{a^2-b^2} = \lim_{a\to b} \frac{1}{a+b}$$

$$= \frac{1}{b+b} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例２ $(\sqrt[3]{x})' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

ここで $\sqrt[3]{x+h} = a, \sqrt[3]{x} = b$ とおくと $h \to 0$ のとき $a \to b$ であり

$x+h = a^3$, $x = b^3$ より $h = a^3 - b^3$

だから

$$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{a\to b} \frac{a-b}{a^3-b^3} = \lim_{a\to b} \frac{1}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{1}{3b^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \left(= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

（注） ここで

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

を使った。さらに

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+\ ab^{n-2}+b^{n-1})$$

が成り立つ。（右辺を展開すると（各項がうち消しあって）左辺の形になる）

問 上の例を参考にして、次の極限値を求めよ。

$$(\sqrt[4]{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h}$$

＜分数乗の微分2＞

例1 $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^5}-\sqrt[3]{x^5}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{x+h})^5-(\sqrt[3]{x})^5}{h}$

ここで $\sqrt[3]{x+h}=a, \sqrt[3]{x}=b$ とおくと $h\to 0$ のとき $a\to b$ となり

$$x+h=a^3,\quad x=b^3 \quad \text{より} \quad h=a^3-b^3$$

だから

$$(\sqrt[3]{x^5})' = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h})^5-(\sqrt[3]{x})^5}{h} = \lim_{a\to b}\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$$

$$= \lim_{a\to b}\frac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \lim_{a\to b}\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{5b^4}{3b^2} = \frac{5}{3}b^2 = \frac{5}{3}(\sqrt[3]{x})^2 = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

例2 (1) 前ページ例1より $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

となる。

(2) 前ページ例2より $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}$$

となる。

(3) 前ページ問の結果より $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}$$

となる。

(4) 上の例1の結果より $(\sqrt[3]{x^5})' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ である。これを指数で表すと

$$\boxed{(x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}}$$

となる。

一般に

$$\boxed{(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}}$$

がなりたつ。これは微分の公式 $\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$ で p が分数でも成り立つことを意味する。

問 次の導関数を求めよ。

(1) $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'$　(2) $\left(\sqrt[4]{x^7}\right)'$　(3) $\left(\sqrt[4]{x^3}\right)'$　(4) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'$

< 分数乗の不定積分 >

前ページより微分の公式

$$\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$$

は p が分数の場合もなりたつことがわかった。これより

$$\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)' = \frac{1}{p+1}(x^{p+1})' = \frac{1}{p+1} \times (p+1)x^p = x^p$$

であるから

$$\boxed{\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C}$$

がなりたつ。p は分数でもよい。

例 1 $\displaystyle \int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$

例 2 $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

例 3 $\displaystyle \int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1}x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

$$= -3 \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int \sqrt{x}dx$

(2) $\displaystyle \int \sqrt[3]{x}dx$

(3) $\displaystyle \int \sqrt[4]{x^3}dx$

(4) $\displaystyle \int x\sqrt{x}dx$

(5) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

(6) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

(7) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$

(8) $\displaystyle \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

< 分数乗の定積分 >

p が分数の場合にも

$$\boxed{\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C} \quad \text{(不定積分)}$$

が成り立つ。従って定積分は

$$\boxed{\int_a^b x^p dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_a^b = \frac{1}{p+1}b^{p+1} - \frac{1}{p+1}a^{p+1}} \quad \text{(定積分)}$$

となる。

例 (1) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x^2}dx = \int_0^8 x^{\frac{2}{3}}dx = \left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}\right]_0^8 = \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_8^0$

$$= \frac{3}{5}\times 8^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{5}\times 0 = \frac{3}{5}\times(2^3)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\times 2^5 = \frac{3\times 32}{5} = \frac{96}{5}$$

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^3}dx = \int_1^4 x^{-3}dx = \left[\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right]_1^4 = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(3) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^9 = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 2\times\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 5$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{27} \sqrt[3]{x}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^4}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

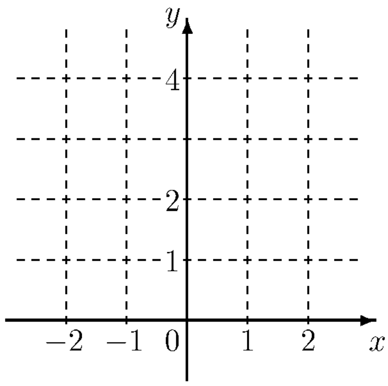
(6) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

＜ 指数関数 ＞

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

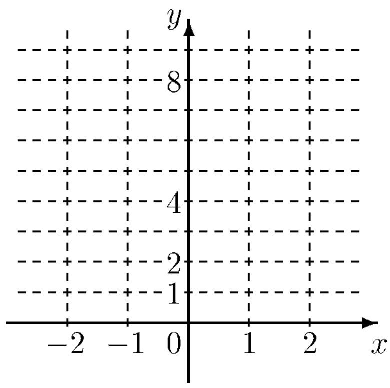
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



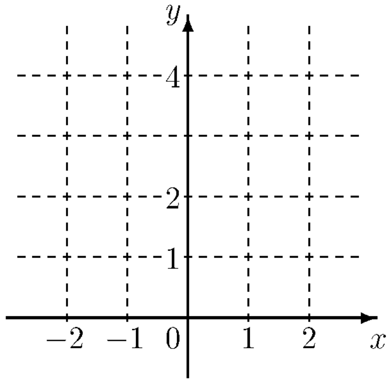
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



＜ 指数方程式 ＞

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$ (2) $4^x = 0.5$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より (答) $x = \frac{7}{2}$

(2) $4^x = 0.5 \;\Rightarrow\; \left(2^2\right)^x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2^{2x} = 2^{-1} \;\Rightarrow\; 2x = -1$ より (答) $x = -\frac{1}{2}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \;\Rightarrow\; \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \;\Rightarrow\; 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; -x = \frac{2}{3}$ より (答) $x = -\frac{2}{3}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$ (2) $3^x = 3$ (3) $3^x = 9$ (4) $3^x = \frac{1}{3}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$ (6) $10^x = 1$ (7) $10^x = 100$ (8) $10^x = \sqrt[3]{10}$

(9) $10^x = 0.1$ (10) $10^x = 0.01$ (11) $2^x = 1$ (12) $2^x = 4$

(13) $2^x = 32$ (14) $2^x = \sqrt[4]{2}$ (15) $2^x = 2\sqrt{2}$ (16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$ (18) $2^x = \frac{1}{4}$ (19) $2^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (20) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$ (22) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.125$ (23) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$ (24) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ (26) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$ (27) $4^x = 1$ (28) $4^x = 16$

(29) $4^x = 2$ (30) $4^x = 8$ (31) $4^x = 0.25$ (32) $4^x = \sqrt{2}$

＜ 対数1 ＞

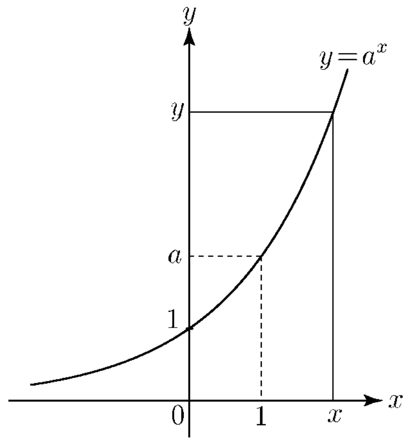
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例1 (1) $2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2) $4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問1 次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (2) $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$ (3) $3 = \log_3 27$ (4) $\dfrac{3}{2} = \log_9 27$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例2 (1) $\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2) $\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問2 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$

(2) $\log_3 243$

(3) $\log_{10} 1000$

(4) $\log_5 625$

＜ 対数 2 ＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4 \left(\sqrt{4}\right) = \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5 \left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2 \left(\dfrac{25}{100}\right) = \log_2 \left(\dfrac{1}{4}\right) = \log_2 \left(\dfrac{1}{2^2}\right) = \log_2 \left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$ (2) $\log_2 \sqrt{2}$ (3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2 \left(2\sqrt{2}\right)$ (5) $\log_4 64$ (6) $\log_4 1$

(7) $\log_6 \sqrt[3]{6}$ (8) $\log_5 0.2$ (9) $\log_{10} 0.01$

(10) $\log_7 \sqrt[3]{49}$ (11) $\log_2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (12) $\log_4 8$

例 2

$$\log_2 (8 \times 16) = \log_2 \left(2^3 \times 2^4\right) = \log_2 \left(2^7\right) = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2 \left(2^3\right) + \log_2 \left(2^4\right) = 3 + 4 = 7$$

より

$$\log_2 (8 \times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

がなりたつ。

一般に正の数 M と N に対して

$$\boxed{\log_2 (M \times N) = \log_2 M + \log_2 N}$$

がなりたつ。

問 2 $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ の場合に次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2 (M \times N)$

(2) $\log_2 M + \log_2 N$

< 対数3 >

例 1 $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{2^5}{2^2}\right) = \log_2\left(2^3\right) = 3$

$\log_2 32 - \log_2 4 = \log_2(2^5) - \log_2(2^2) = 5 - 2 = 3$

より $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4$

が成り立つ。

問 1 $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ のとき次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$

(2) $\log_2 M - \log_2 N$

例 2 (1) $\log_2(M^2) = \log_2(M \times M) = \log_2 M + \log_2 M = 2\log_2 M$

(2) $\log_2(M^3) = \log_2(M^2 \times M) = \log_2(M^2) + \log_2 M = 3\log_2 M$

問 2 次の対数の値を $\log_2 M$ で表せ。

(1) $\log_2(M^4)$　　(2) $\log_2(M^5)$

問 3 実数 α と r に対し $M = 2^\alpha$ のとき次式を α と r で表せ。

(1) $\log_2(M^r)$

(2) $r\log_2 M$

問 4 $\log_2 M = \log_2\left(\dfrac{M}{N} \times N\right) = \log_2\left(\dfrac{M}{N}\right) + \log_2 N$

を利用して $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$ を $\log_2 M$ と $\log_2 N$ で表せ。

$\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right) =$

＜ 対数4 ＞

17 ページと同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(\,M \times N\,) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問 1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) =$$

問 2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$$\log_a(\,M^r\,) =$$

例　(1)　$\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2)　$\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50 \times 20) = \log_{10} 1000 = 3$

(3)　$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3\left(6^2\right) - \log_3 4 = \log_3\left(\frac{6^2}{4}\right) = \log_3 9 = 2$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1)　$\log_2 12 + \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$

(2)　$\log_3 108 - \log_3 4$

(3)　$\log_6 12 + \log_6 2 + 2\log_6 3$

(4)　$\log_{10} 4 + \log_{10} 25 - \log_{10} 0.1$

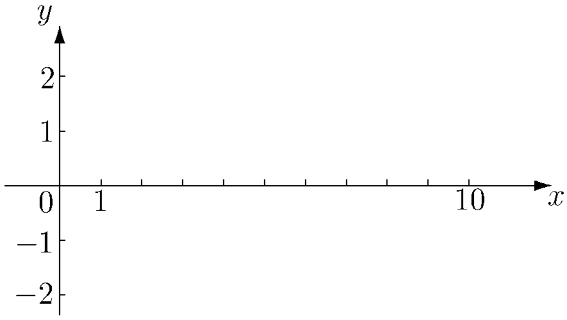
< 対数関数 >

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域 (括弧内の x の範囲) 内で、グラフの概形を書け。

(1) $y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

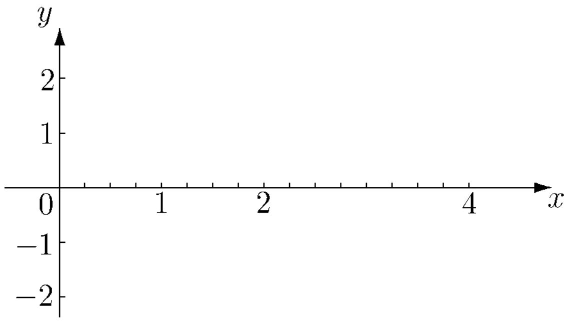
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



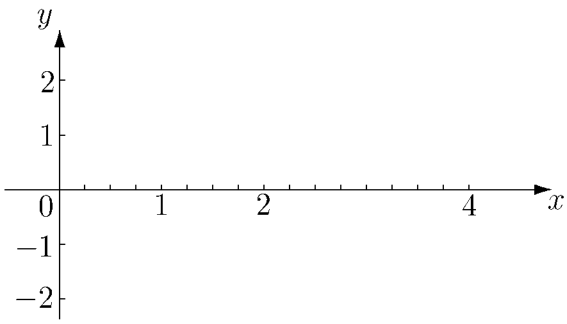
(2) $y = \log_2 x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



< ネピアの数 1 >

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を考える。

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \ , \ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \ , \ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} \fallingdotseq 2.44 \ , \ a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.48 \ , \ \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59 \ , \ \cdots \ , \ a_{100} \fallingdotseq 2.70 \ , \ \cdots \ , \ a_{1000} \fallingdotseq 2.716 \ , \ \cdots \ , \ a_{10000} \fallingdotseq 2.718$$

となり少しずつ増えながらある一定の値に近づく、その極限値を e で表す。

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e は無理数であり、その値は

$$e = 2.71828182845\cdots$$

であることが知られている。e をネピアの数ということもある。

問 関数

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

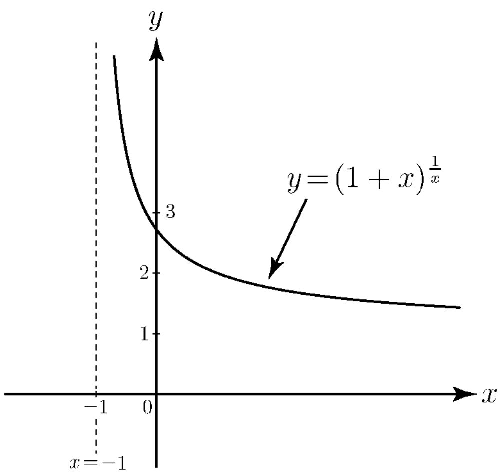
を考える。この関数は $x=0$ と $x=-1$ で定義されていないが、グラフは右図のようになっている。

y 軸との交点 (y 切片) を求めたい。

y 切片は $x \to 0$ のときの極限値

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

である。この極限値を求めよ。



(ヒント $x = \dfrac{1}{n}$ とおいて $n\to\infty$ の極限を考える。)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} =$$

＜ネピアの数2＞

前ページの結果から

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \; (\fallingdotseq 2.718)$$

であることがわかる。変数 x を h に変えた式

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$$

を考える。この式から h が十分小さいとき、すなわち

$h \fallingdotseq 0$ ならば $e \fallingdotseq (1+h)^{\frac{1}{h}}$

である。両辺を h 乗すれば

$h \fallingdotseq 0$ のとき $e^h \fallingdotseq 1+h$

だから $\Downarrow$

$$e^h - 1 \fallingdotseq h$$

より

$h \fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{e^h-1}{h} \fallingdotseq 1$

よって

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

がわかる。

例 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^2(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} e^2 \times \left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^2 \times 1 = e^2$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{3+h}-e^3}{h} =$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$

< 指数関数の微分・積分 >

前ページの結果より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x$$

がわかった。関数 $f'(x) = e^x$ に対する導関数の定義

$$(e^x)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

から

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

がわかる。

(注) 一般に 1 以外の正の整数 a に対しては

$$\boxed{(a^x)' = a^x \times \log_e a}$$

がなりたつ。特に $a = e$ のときは $\log_e e = 1$ より上の公式がなりたつ。

例 1 (1) $(2e^x)' = 2 \times (e^x)' = 2 \times e^x = 2e^x$

(2) $(3e^x)' = 3 \times (e^x)' = 3 \times e^x = 3e^x$

(3) $(2^x)' = 2^x \times \log_e 2$

(4) $(3^x)' = 3^x \times \log_e 3$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $(4e^x)'$ (2) $(-2e^x)'$ (3) $(4^x)'$ (4) $(5^x)'$

例 2 (1) 例 1 の (1) と (2) より

$$\int 2e^x dx = 2e^x + C \quad , \quad \int 3e^x dx = 3e^x + C$$

(2) 例 1 (3) より

$$\left(\frac{1}{\log_e 2}2^x\right)' = \frac{1}{\log_e 2} \times (2^x)' = \frac{1}{\log_e 2} \times 2^x \times \log_e 2 = 2^x$$

だから $\displaystyle\int 2^x dx = \frac{1}{\log_e 2}2^x + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 4e^x dx$ (2) $\displaystyle\int 3^x dx$ (3) $\displaystyle\int 4^x dx$

< 対数関数の微分 >

例 関数 $f(x)=\log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。

定義から

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\log_{10}(2+h)-\log_{10}2\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{2}=t$ とおくと、 $h\to 0$ のとき $t\to 0$ より

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\log_{10}(1+t)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\log_{10}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{1}{2}\log_{10}e$$

(注) ここで 22 ページの結果 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ を使った。

問 例と同じ関数 $f(x)=\log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ を例と同様な極限計算で求め、導関数 $f'(x)$ を類推せよ。

$f'(3)=$

$f'(x)=$

＜ 自然対数 ＞

問 1 前ページの結果より、底が $a > 0$ $(a \neq 1)$ である対数関数 $\log_a x$ の導関数を類推せよ。

(答) $\boxed{(\log_a x)' = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

問 2 上の結果を用いて、底が e(ネピアの数 $\fallingdotseq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \quad \text{(自然対数)}$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。

例

$$\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

$$\log(\frac{1}{e^2}) = \log_e(\frac{1}{e^2}) = \log_e(e^{-2}) = -2$$

問 3 次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$ (2) $\log(\sqrt[3]{e})$ (3) $\log\left(\frac{1}{e}\right)$ (4) $\log 1$

問 4 問 2 の結果を使って自然対数 $\log x$ の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

問 5 問 4 の結果を使って次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{x} dx =$$

＜ 指数・対数関数の定積分 ＞

23,25 ページの結果より

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad , \quad (a^x)' = a^x \times \log a \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}} \quad (\text{微分})$$

である。(ただし $\log x = \log_e x$(自然対数)) ,　この式を積分の式になおすと

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C \quad , \quad \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C \quad , \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x + C} \quad (\text{不定積分})$$

例 1 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x dx = \left[\frac{1}{\log 2} 2^x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\log 2}\left(2^1 - 2^{-1}\right) = \frac{1}{\log 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2\log 2}$

(2) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^1 - e^0 = e^2 - 1$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^e = \log e - \log 1 = 1 - 0 = 1$

(4) $\displaystyle\int_2^8 \frac{1}{x} dx = [\log x]_2^8 = \log 8 - \log 2 = \log\left(\frac{8}{2}\right) = \log 4$

問 1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 3^x dx =$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x dx =$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} dx =$　　(4) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x} dx =$

上の不定積分の公式より定数 k に対し

$$\boxed{\int k e^x dx = k e^x + C \quad , \quad \int \frac{k}{x} dx = k \log x + C} \quad (k \text{ は定数})$$

がなりたつ。

例 2 (1) $\displaystyle\int_0^3 4e^x dx = [4e^x]_0^3 = 4e^3 - 4e^0 = 4e^3 - 4$

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{5}{x} dx = [5\log x]_1^4 = 5\log 4 - 5\log 1 = 5\log 4$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \log x\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + \log 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \log 1\right) = \frac{3}{2} + \log 2$

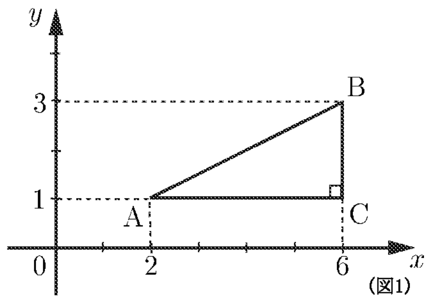
問 2　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 5e^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^6 \frac{4}{x} dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+1}{x} dx$

＜平面上の距離＞

例 1　平面上の 2 点 A(2, 1), B(6, 3) の間の距離 AB を求めたい。

図 1 より三角形 ACB は直角三角形だからピタゴラスの定理より

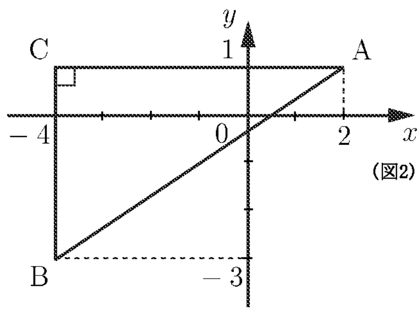


(図1)

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 \\ &= (6-2)^2 + (3-1)^2 \ = \ 4^2 + 2^2 = 20 \end{aligned}$$

よって　　(答) $\mathrm{AB} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

例 2　平面上の 2 点 A(2, 1), B(−4, −3) の間の距離 AB を求めたい。図 2 より



(図2)

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 \\ &= \big(2-(-4)\big)^2 + \big(1-(-3)\big)^2 \ = \ 6^2 + 4^2 \\ &= 52 \end{aligned}$$

よって　(答) $\mathrm{AB} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

(注)　例 2 で　$\mathrm{AC}^2 = (-4-2)^2 = (-6)^2 = 36$, $\mathrm{BC}^2 = (-3-1)^2 = (-4)^2 = 16$　と計算しても良い。

問 1　平面上の 2 点 A,B が以下のような座標のとき、2 点間の距離 AB を求めよ。

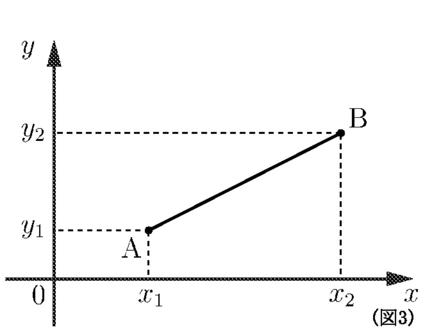
(1) A(2, 3), B(6, 1)　　(2) A(1, 2), B(−1, 0)　　(3) A(2, −1), B(−1, −3)

AB=　　AB=　　AB=

問 2　平面上の 2 点 A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) の間の距離 AB を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ。

(注) $\sqrt{\ \ }$ の中の 2 乗の式は展開しないほうがよい。

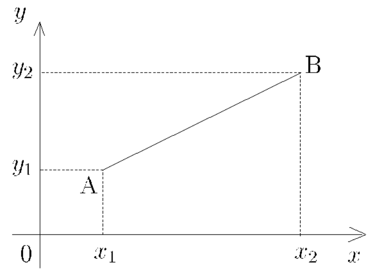
AB=



(図3)

< 円の方程式 >

平面上の 2 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)
間の距離 AB は、前ページより



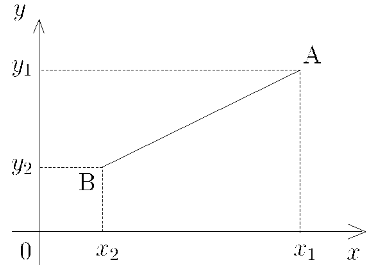
(図1)

$$(*) \quad \boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

であることがわかった。これは 2 点 A,B が図 1 のような位置関係だけでなく、図 2 のような位置関係でも成立する。それは

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 \ , \ (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

が成り立つからである。公式 $(*)$ は 2 点 A,B が平面上のどんな位置にあっても成立する。



(図2)

例 点 (6,4) を中心として半径 3 の円周上に点 P(x, y) があるとする。

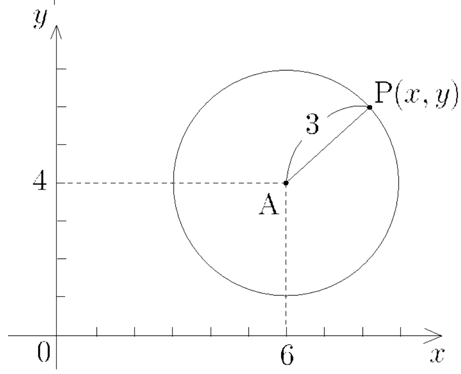
$$\mathrm{AP} = 3$$

より

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = 3$$

であるから両辺を 2 乗すれば

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 9 \quad \cdots \quad (1)$$



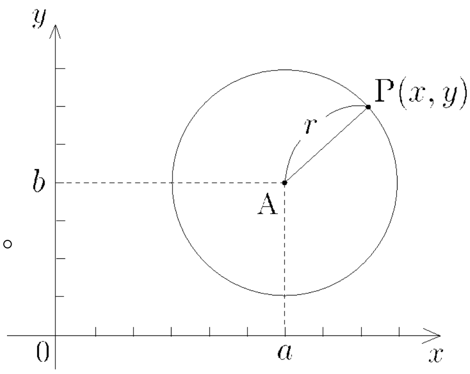
(図3)

となる。この式は円周上の任意の点 P(x, y) の x 座標と y 座標が満足する関係式である。(1) 式をこの**円の方程式**という。

問 1 点 A(a, b) を中心として半径 r の円周上に点 P(x, y) があるとき、式

$$\left(x - \square\right)^2 + \left(y - \square\right)^2 = \square \qquad \cdots (**)$$

が成り立つ。$\square$ に適当な文字を入れよ。
$(**)$ 式を 中心 (a, b)、半径 r の円の方程式という。



(図4)

問 2 次の円の方程式が表す円の中心と半径を求めよ。

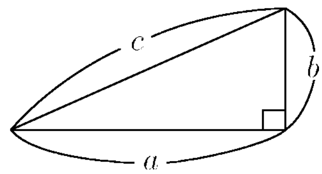
(1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$: 中心 (,), 半径=

(2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$: 中心 (,), 半径=

(3) $x^2 + y^2 = 1$: 中心 (,), 半径=

＜直角三角形＞

問 1　右辺 a, 高さ b, 斜辺 c, の直角三角形に対し，ピタゴラスの定理を用いて斜辺の長さ c を a と b で表せ。

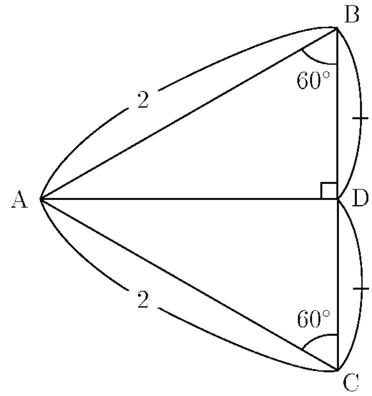


（図 1）

(注)　$\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$ であるが $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

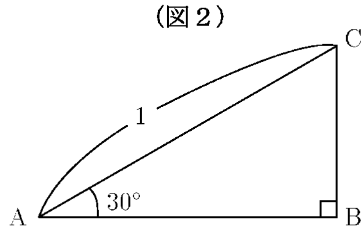
たとえば　$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$

問 2　図 2 のように一辺の長さが 2 である正三角形 ABC に対し，BC の中点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



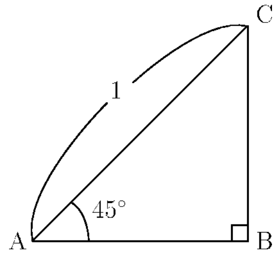
（図 2）

問 3　図 3 の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図 3）

問 4　図 4 の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図 4）

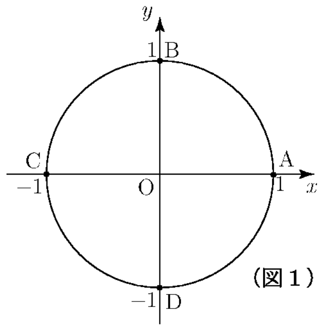
＜円周上の点＞

原点 O を中心として半径 1 の円周上の点の座標を
求める練習をする。前ページの結果を使ってもよい。

問 1　図 1 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

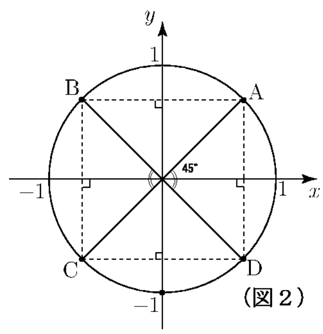


（図 1）

問 2　図 2 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

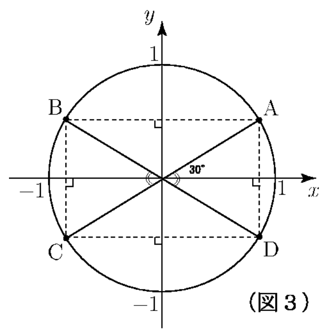


（図 2）

問 3　図 3 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

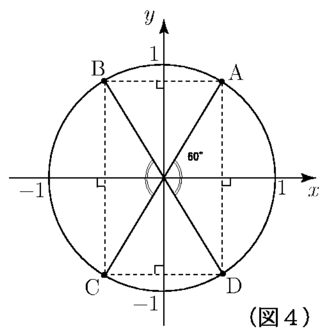


（図 3）

問 4　図 4 の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

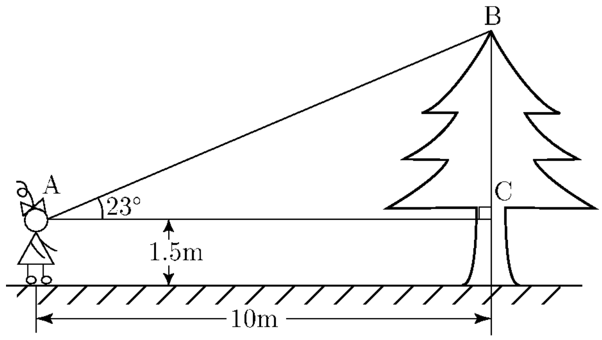


（図 4）

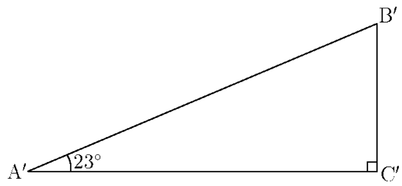
< 三角法 >

例 昔の人は三角形の相似を利用して、ピラミッドとか山の高さを測った。ここでは最も簡単な場合を考える。

右図のような木の高さを測りたい。ある人が木から 10m 離れた場所から木の頂点 B を見上げたら、水平から 23° であった。人の目の位置を A(目の高さは地上 1.5m とする)、木の中心線上で地上 1.5m の位置を C とする。三角形 ABC と相似な三角形を右下図のように紙に正確に描く。A′C′ と B′C′ の長さを実際に測ると



$$\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$



であった。一方 $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$ より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$

であるから

$$\mathrm{BC} = 0.4245 \times \mathrm{AC} = 4.245 \text{ (m)}$$

よって木の高さはこれに 1.5(m) をたして <u>(答) 5.745 (m)</u>

このような直角三角形の比 (高さ/底辺) を**正接** (*tangent*) という。この場合は

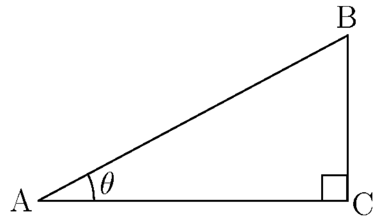
$$\tan 23^\circ = 0.4245$$

である。

問 例と同じ問題で見上げる角度が 30° のとき、木の高さを求めよ。
(ただし $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$ とする。)

< 三角比 1 >

右図のような直角三角形 ABC に対し、角 A が θ であるとき、辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を角 θ の**正接** (*tangent*) といい



$$\tan\theta \ = \ \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \ \left(=\frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}\right)$$

と書く。同様に辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦** (*sine*) といい

$$\sin\theta \ = \ \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \ \left(=\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}\right)$$

と書く。又、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦** (*cosine*) といい

$$\cos\theta \ = \ \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \ \left(=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

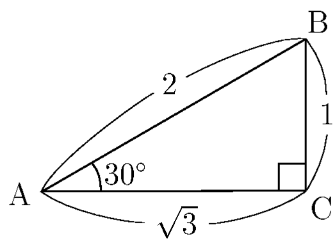
と書く。これらをまとめて**三角比**という。

例 図 1 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



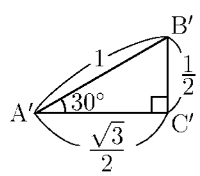
(図 1)

となる。一方、図 2 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \ (= \mathrm{B'C'})$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ (= \mathrm{A'C'})$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(図 2)

で上と同じ結果になる。どちらで考えてもよい。

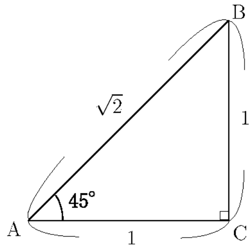
＜三角比2＞

前ページを見て、以下の問に答えよ。

問1

(1)　図1を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} =$



(図1)

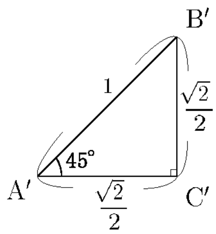
(2)　図2を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} =$

(3)　次の値を求めよ。

$\sin 45^\circ =$ 　　　　　, $\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$ 　　　　　, $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} =$



(図2)

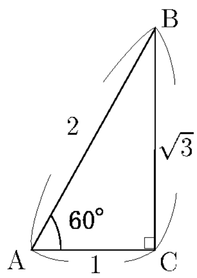
問2

(1)　図3を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} =$

(2)　図4を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} =$ 　　　, $\dfrac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} =$

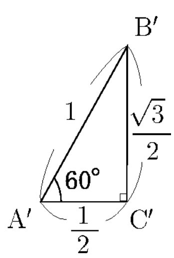


(図3)

(3)　次の値を求めよ。

$\sin 60^\circ =$ 　　　　　, $\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$ 　　　　　, $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$



(図4)

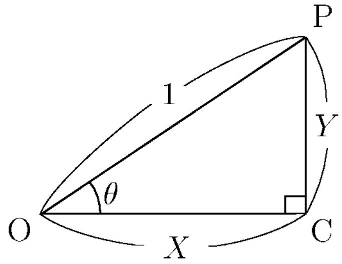
＜三角関数の定義＞

図 1 のように斜辺の長さが 1 の直角三角形 OPC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{OP}} = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OP}} = \frac{X}{1} = X$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OC}} = \frac{Y}{X}$$

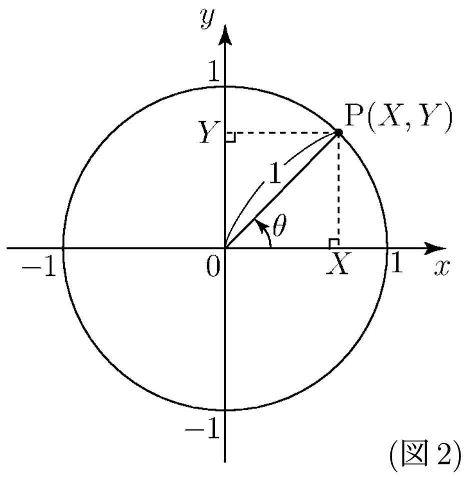


(図 1)

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径 1 の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は $(1, 0)$ から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で

$$\boxed{\sin\theta = Y\ ,\quad \cos\theta = X\ ,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。角度 θ は図 2 のように x 軸を基準に反時計まわりにはかる。



(図 2)

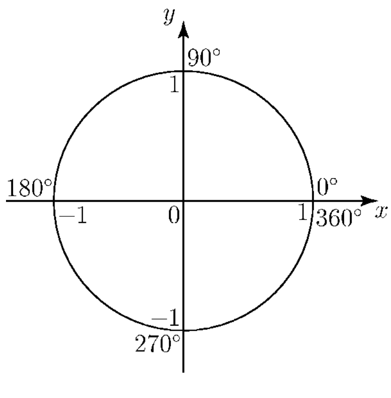
例 1 $\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから、このときは $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0\ ,\quad \cos 0^\circ = 1\ ,\quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

例 2 $\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0$, $Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1\ ,\quad \cos 90^\circ = 0$$

であるが、このとき $\tan 90^\circ$ は求まらない。(分母に 0 がくるので計算できない。)



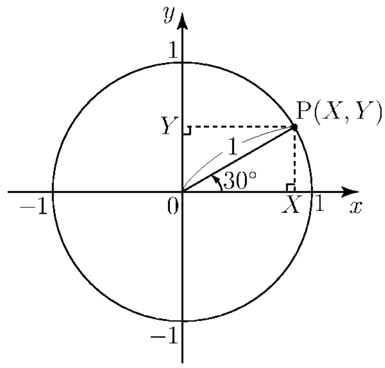
問 次の値を求めよ。

(1) $\sin 180^\circ =$, $\cos 180^\circ =$, $\tan 180^\circ =$

(2) $\sin 270^\circ =$, $\cos 270^\circ =$

＜三角関数の値1＞

問1 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

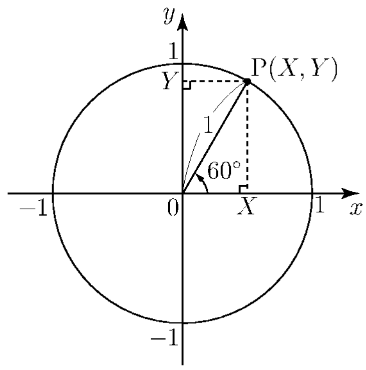


(1) $\cos 30^\circ =$

(2) $\sin 30^\circ =$

(3) $\tan 30^\circ =$

問2 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

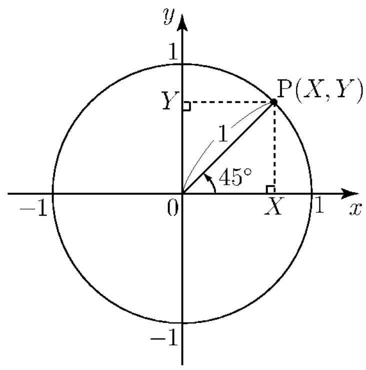


(1) $\cos 60^\circ =$

(2) $\sin 60^\circ =$

(3) $\tan 60^\circ =$

問3 右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

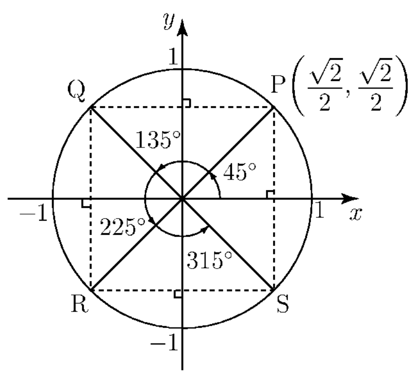


(1) $\cos 45^\circ =$

(2) $\sin 45^\circ =$

(3) $\tan 45^\circ =$

問4 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



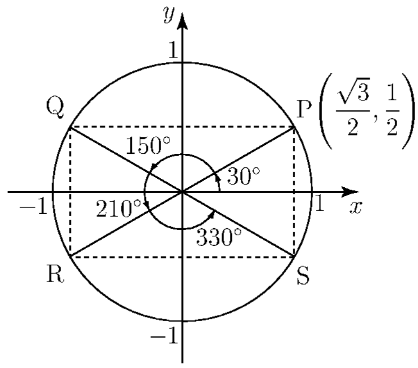
(1) $\cos 135^\circ =$ 　　　, $\sin 135^\circ =$ 　　　, $\tan 135^\circ =$

(2) $\cos 225^\circ =$ 　　　, $\sin 225^\circ =$ 　　　, $\tan 225^\circ =$

(3) $\cos 315^\circ =$ 　　　, $\sin 315^\circ =$ 　　　, $\tan 315^\circ =$

＜三角関数の値 2 ＞

問 1 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。

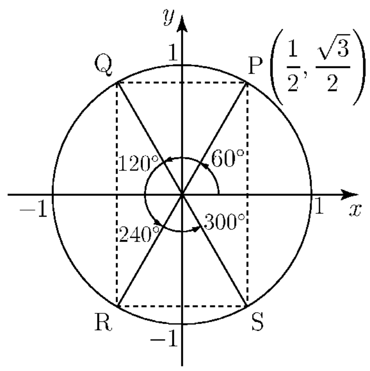


(1) $\cos 150° =$ 　　　, $\sin 150° =$ 　　　, $\tan 150° =$

(2) $\cos 210° =$ 　　　, $\sin 210° =$ 　　　, $\tan 210° =$

(3) $\cos 330° =$ 　　　, $\sin 330° =$ 　　　, $\tan 330° =$

問 2 右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



(1) $\cos 120° =$ 　　　, $\sin 120° =$ 　　　, $\tan 120° =$

(2) $\cos 240° =$ 　　　, $\sin 240° =$ 　　　, $\tan 240° =$

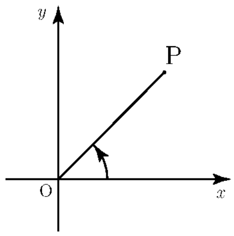
(3) $\cos 300° =$ 　　　, $\sin 300° =$ 　　　, $\tan 300° =$

問 3 次の表を完成せよ。

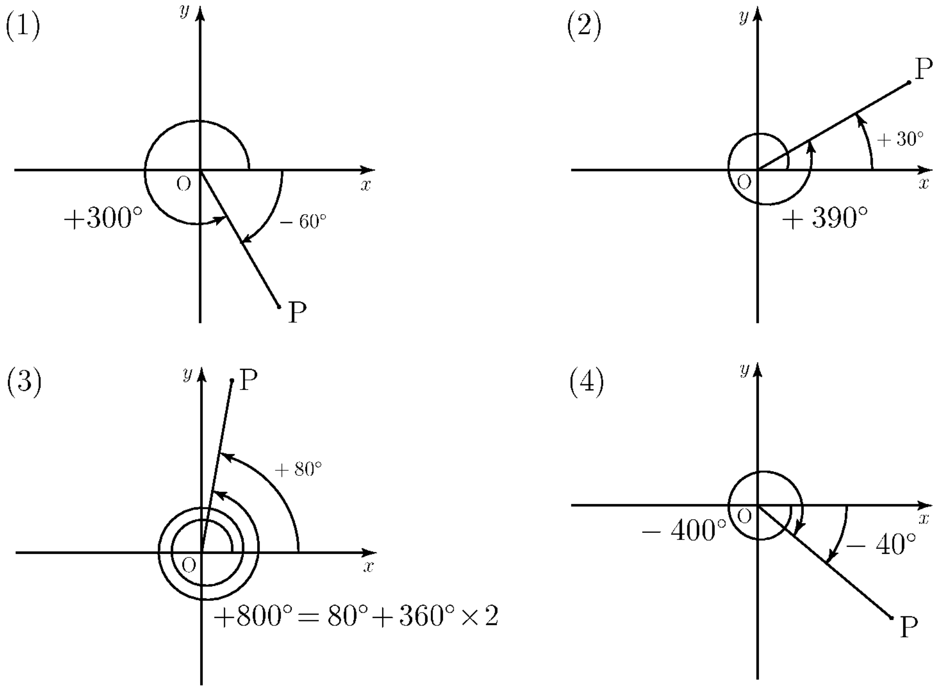
角度 θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0				1					$-\frac{1}{2}$							
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$										0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan\theta$								$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			1						0

< 一般角 >

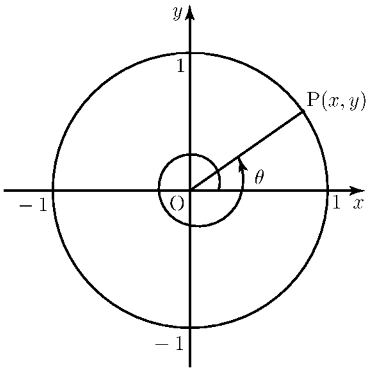
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を始線といい、OP を動径という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



例 1



< 一般角の三角関数 >



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき、一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に、点 P の座標 (x, y) で

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 460^\circ$ (2) $\cos(-70^\circ)$ (3) $\tan 500^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ)$ (5) $\cos 650^\circ$ (3) $\tan 860^\circ$

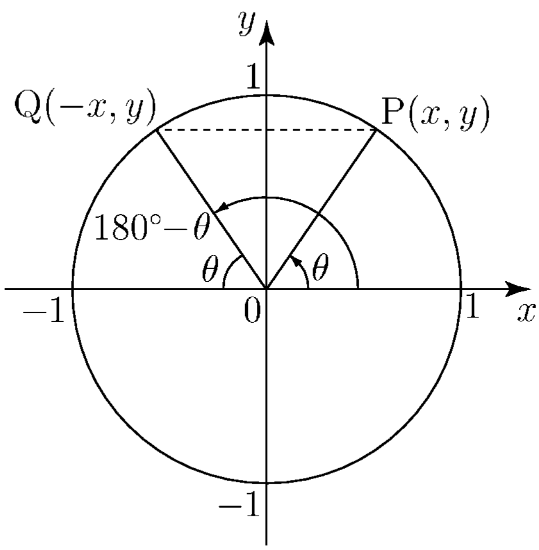
< 三角関数の性質 1 >

例 $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ のとき、点 $\mathrm{P}(x, y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-x, y)$ は角 $180° - \theta$ を表す点である。従って

$$\begin{aligned}\cos(180° - \theta) &= -x \\ \sin(180° - \theta) &= y \\ \tan(180° - \theta) &= \frac{y}{-x}\end{aligned}$$

となる。これを $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ で表すと

$$\begin{aligned}\cos(180° - \theta) &= -\cos\theta \\ \sin(180° - \theta) &= \sin\theta \\ \tan(180° - \theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

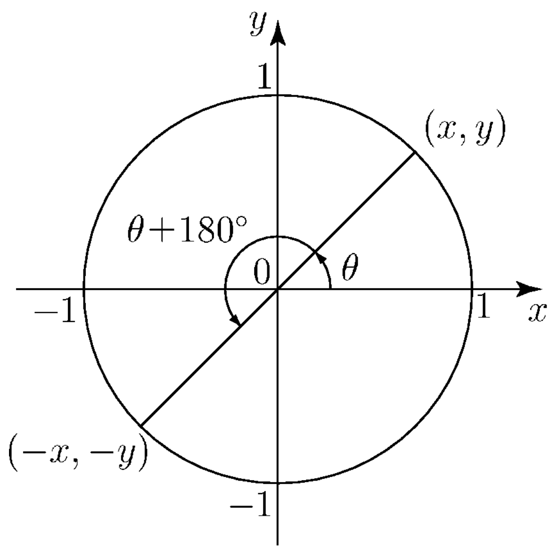


問 1 右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 180°) =$

(2) $\cos(\theta + 180°) =$

(3) $\tan(\theta + 180°) =$

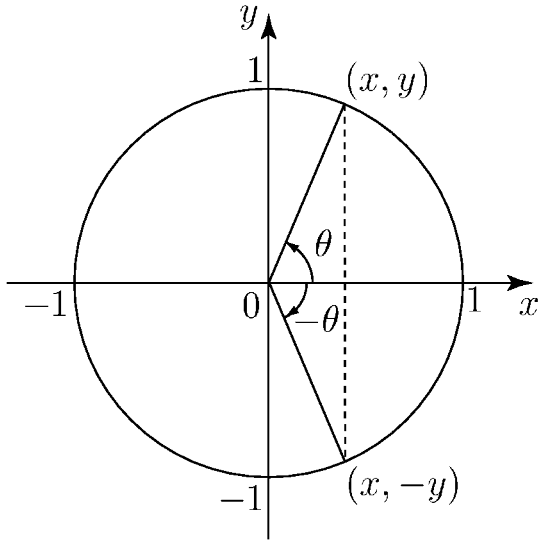


問 2 右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(-\theta) =$

(2) $\cos(-\theta) =$

(3) $\tan(-\theta) =$

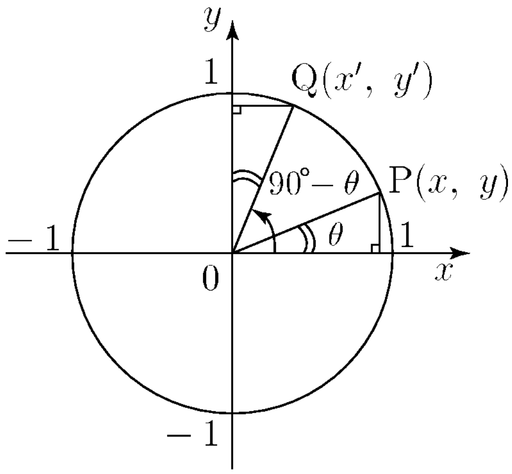


< 三角関数の性質2 >

問 1　右図のように角度 θ を表す点を P $(x,\ y)$, 角度 $90^\circ - \theta$ を表す点を Q $(x',\ y')$ とすると

$$x' = y \quad , \quad y' = x$$

の関係がある。これを参考にして次の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。



(1) $\sin(90^\circ - \theta) =$　　　　(2) $\cos(90^\circ - \theta) =$

例　$\sin 20^\circ = 0.342,\quad \cos 20^\circ = 0.9397,\quad \tan 20^\circ = 0.364$ である。これは三角比の表で調べるわけだが，この表には 0° から 90° までしか書いていない。前ページの例を参考にすると

$$\sin(160^\circ) = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = 0.342$$
$$\cos(160^\circ) = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -0.9397$$
$$\tan(160^\circ) = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.364$$

がわかる。

問 2　上の例と前のページの問等を参考にして、次の値を求めよ。

(1) $\sin 200^\circ =$　　　　$\cos 200^\circ =$　　　　$\tan 200^\circ =$

(2) $\sin(-20^\circ) =$　　　　$\cos(-20^\circ) =$　　　　$\tan(-20^\circ) =$

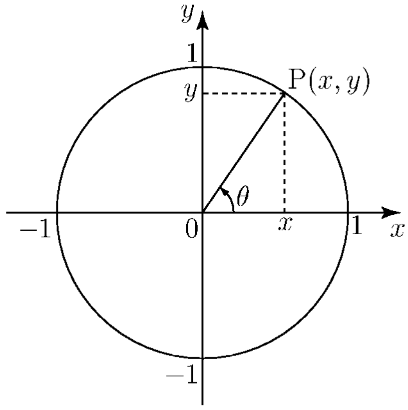
(3) $\sin 70^\circ =$　　　　$\cos 70^\circ =$

< 三角関数の性質3 >

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると、三角関数の定義から

$$\sin\theta = y\ ,\quad \cos\theta = x\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である。ここで点 P は原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ の点だから



$$\boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

が成り立つ。

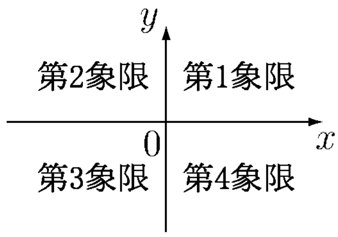
注) 記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2=(\cos\theta)\times(\cos\theta)$ の意味であり、$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち

$$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2\neq\cos(\theta^2)\ ,\quad \sin^2\theta=(\sin\theta)^2\neq\sin(\theta^2)$$

問 1 $\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2 三角関数の定義から、sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち

θ	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				



となる。表を完成させよ。

例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ である。このとき

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ だから $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

よって $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。