高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2001年度版)

Series **A**

$No.$ **3**

内容

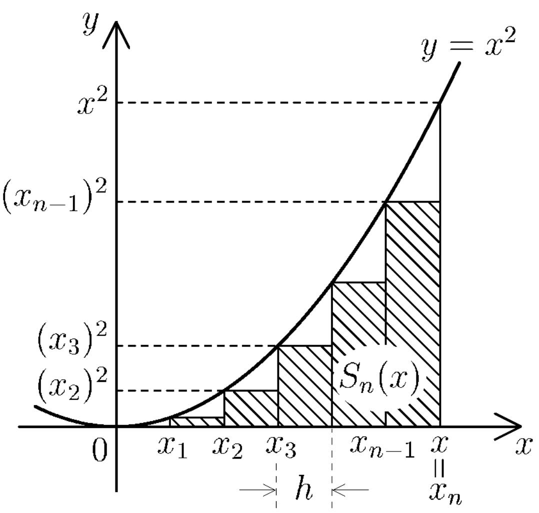
◎ 関数の増減

◎ 整関数の微分

◎ 不定積分

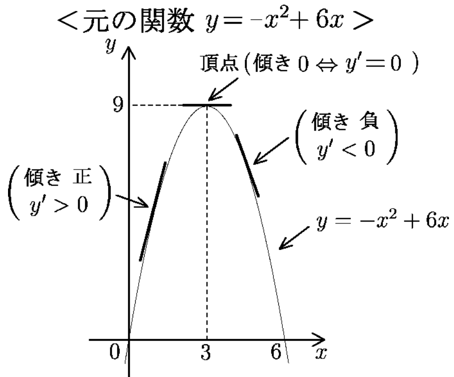
◎ 定積分

◎ 面積・体積



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜関数の増減１＞



(図１)

例 ２次関数 $y=-x^2+6x$ のグラフは図１のような放物線である。このグラフは頂点は座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y'=(-x^2+6x)'=-2x+6$$

を求める。次に $y'=0$ とおくと

$$y'=0 \iff -2x+6=0 \iff x=3$$

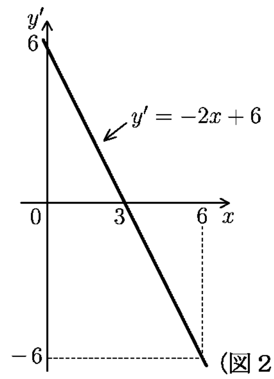
であるから $x=3$ のとき傾き y' が０（ゼロ）になるのでそこが頂点である。

$x=3$ のとき $y=-x^2+6x=-3^2+6\times3=9$

であるから頂点の座標は $(3,9)$ である。
y' のグラフ（図１）より

$$x<3 \text{ のとき } y'>0$$
$$x=3 \text{ のとき } y'=0$$
$$x>3 \text{ のとき } y'<0$$

となる。$y'>0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。$y'<0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を**増減表**という。



(図２)

x	$x<3$	3	$3<x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	9	↘

（注） 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

(1) $y'=0$ となる x（この場合は $x=3$）を求める。

(2) $y'=-2x+6$ の式に 3 より小さい数 x（例えば $x=0$）を代入してプラスであれば（$x<3$ の列で）y' の欄に $+$ と書き入れ、y の欄に ↗（右上がり）の記号を入れる。

(3) $y'=-2x+6$ の式に 3 より大きい数 x（例えば $x=4$）を代入してマイナスであれば（$x>3$ の列で）y' の欄に $-$ と書き入れ、y の欄に ↘（右下がり）の記号を入れる。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-2x+3$

$y'=$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

(2) $y=-2x^2+8x-1$

$y'=$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

< 関数の増減 2 >

例 3 次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。導関数のグラフ (図 2) より

$x < -1$ のとき $y' > 0$
$x = -1$ のとき $y' = 0$
$-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
$x = 1$ のとき $y' = 0$
$1 < x$ のとき $y' > 0$

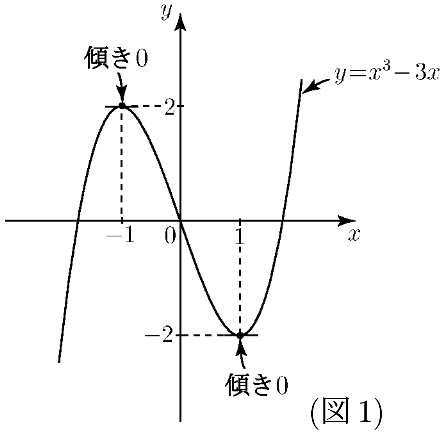
となる。$x = \pm 1$ のとき y の値は

$x = -1$ のとき $y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$
$x = 1$ のとき $y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

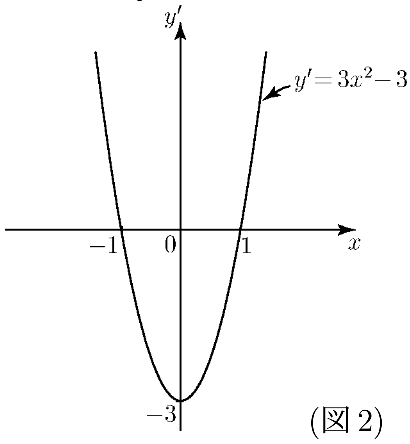
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

< 元の関数 $y = x^3 - 3x$ >



(図 1)

< 導関数 $y' = 3x^2 - 3$ >

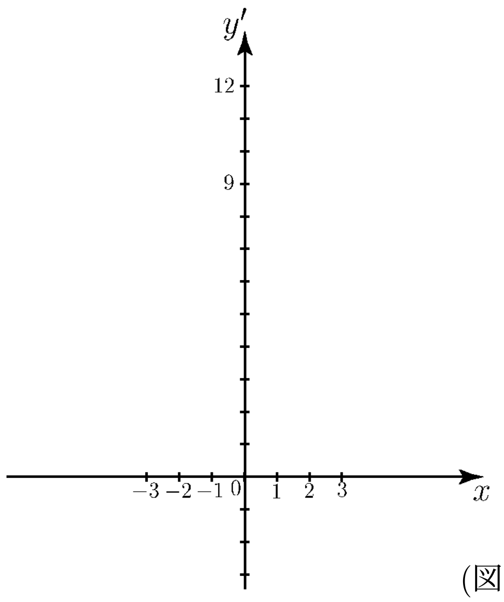


(図 2)

問 関数 $y = 12x - x^3$ を微分し、導関数 y' のグラフを図 3 に書き、増減表を作れ。

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					

$y' =$



(図 3)

< 関数の増減 3 >

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合、たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$x = -2$ のとき
$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に $+$ 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し、$y' < 0$ となれば、y' の欄に $-$ 記号を書き入れる。(表 2)

(表 1)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

$\Downarrow$

(表 2)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

$\Downarrow$

(表 3)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

(表 4)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(6) y' が $+$ であれば傾き正であるから y は右上がり $\nearrow$ となる。
y' が $-$ であれば傾き負であるから y は右下がり $\searrow$ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

問 次の関数を微分し、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$　, $y' =$

x					
y'					
y					

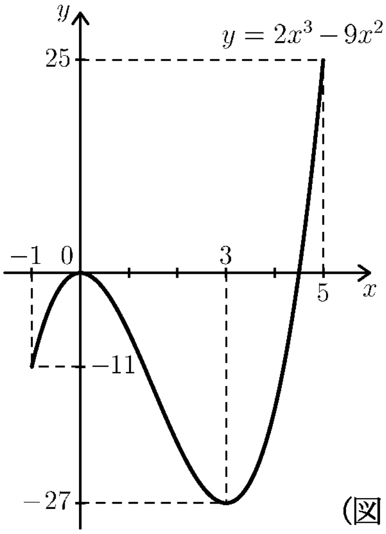
(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$　, $y' =$

x					
y'					
y					

＜最大・最小 1＞

例題　次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leqq x \leqq 5)$$



(図1)

(解)　導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

を求め、$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<3$	3	$3<x<5$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	↗	0	↘	-27	↗	25

この表よりグラフは図 1 のようになるから

(答)　$x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり、$x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注)　最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leqq x \leqq 4)$$

のとき 増減表は右表のようになり、

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-52	↗	0	↘	-27	↗	-16

この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$, $x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。なお右表で x の欄の -2 と 0 の間の $\cdots$ は $-2 < x < 0$ の範囲という意味である。今後はこのように x の範囲を省略してよい.

問　次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \qquad (\text{定義域 } 0 \leqq x \leqq 4)$$

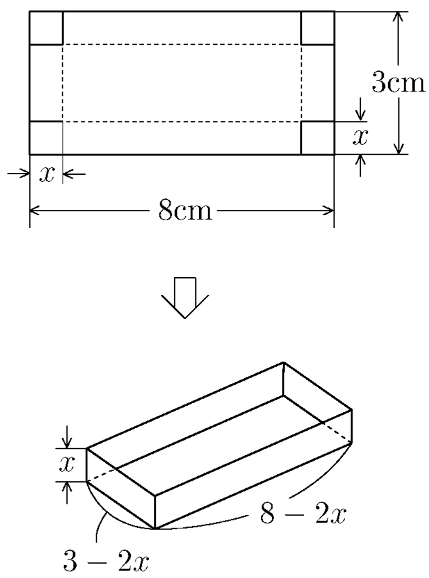
x	0		4
y'			
y			

(答)　$x =$ 　　　　のとき最大値 $y =$

　　　$x =$ 　　　　のとき最小値 $y =$

＜ 最大・最小 2 ＞

例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 $x$cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解) 容器のたては $3-2x$(cm), よこは $8-2x$(cm), 高さは x(cm) だから、容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから、x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。
この範囲内で増減表を作り、y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x=\frac{2}{3}\ \text{のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき、最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 y(cm^3) を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

< パスカルの三角形 >

例 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

問 1 次の展開式を求めたい。$\boxed{}$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$= \boxed{}\times a^4 + \boxed{}\times a^3b + \boxed{}\times a^2b^2 + \boxed{}\times ab^3 + \boxed{}\times b^4$$

(2) $(a\ +\ b)^5 = (a\ +\ b)\left(\boxed{}\times a^4 + \boxed{}\times a^3b + \boxed{}\times a^2b^2 + \boxed{}\times ab^3 + \boxed{}\times b^4\right)$

$$= \boxed{}\times a^5 + \boxed{}\times a^4b + \boxed{}\times a^3b^2 + \boxed{}\times a^2b^3 + \boxed{}\times ab^4 + \boxed{}\times b^5$$

問 2 $(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$(a+b)^0 = 1$ ……………………………… 1

$(a+b)^1 = 1\times a + 1\times b$ ……………………………… 1 1

$(a+b)^2 = 1\times a^2 + 2\times ab + 1\times b^2$ ……………………………… 1 2 1

$(a+b)^3 = 1\times a^3 + 3\times a^2b + 3\times ab^2 + 1\times b^3$ ……………………………… 1 3 3 1

$(a+b)^4 = \boxed{}\times a^4 + \boxed{}\times a^3b + \boxed{}\times a^2b^2 + \boxed{}\times ab^3 + \boxed{}\times b^4$ ………… $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$(a+b)^5 = \boxed{}\times a^5 + \boxed{}\times a^4b + \boxed{}\times a^3b^2 + \boxed{}\times a^2b^3 + \boxed{}\times ab^4 + \boxed{}\times b^5$ $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a+b)^6 = \boxed{}\times a^6 + \boxed{}\times a^5b + \boxed{}\times a^4b^2 + \boxed{}\times a^3b^3 + \boxed{}\times a^2b^4 + \boxed{}\times ab^5 + \boxed{}\times b^6$

< 整関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、$f(x)$ を**整関数**という。
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

であった。$f(x)$ が整関数の場合にこの極限値を調べる。

例 1 $f(x)=1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

例 2 $f(x)=x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

例 3 $f(x)=x^2$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^2\right)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

例 4 $f(x)=x^3$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^3\right)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2\end{aligned}$$

問 $f(x)=x^4$ のとき $f(x)$ を極限の計算によって求めよ。（途中式も書くこと）

$$\left(x^4\right)' = f'(x) =$$

< 整関数の微分 2 >

問 1　6、7 ページを参考にして、 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^5)' = f'(x) =$

問 2　$f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^6)' = f'(x) =$

問 3　下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$ である。

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問 4　n が一般の自然数のとき、 x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$(x^n)' =$

＜ 整関数の微分 3 ＞

導関数の定義から以下の性質がわかる。

関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$\big(kf(x)\big)' = k \times f'(x)$	(定数倍の微分)
$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$	(和の微分)
$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x) - g'(x)$	(差の微分)

が成り立つ。

例 (1) $(x^5 + x^6)' = (x^5)' + (x^6)' = 5x^4 + 6x^5$

(2) $(7x^4)' = 7 \times (x^4)' = 7 \times 4x^3 = 28x^3$

(3) $(6x^5 + 5x^4)' = (6x^5)' + (5x^4)' = 30x^4 + 20x^3$

(4) $(x^7 - 4x^5 + 5x^2 - 8)' = (x^7)' - (4x^5)' + (5x^2)' - (8)'$

$= 7x^6 - 20x^4 + 10x$

(5) $\big((x^2+3)(x^2-4)\big)' = (x^4 - x^2 - 12)' = 4x^3 - 2x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x - x^3)'$

(2) $(7x^6)'$

(3) $(10x^4 + 8x^7)'$

(4) $(6x^5 - 2x^3 + 3)'$

(5) $(3x^5 - 6x^2 + 9)'$

(6) $(4x^7 - 4x^4 + 9x^2 - 5x)'$

(7) $\big((x-1)(x+4)\big)'$

(8) $\big((x^2-3)(x^2-2)\big)'$

＜極大・極小 1＞

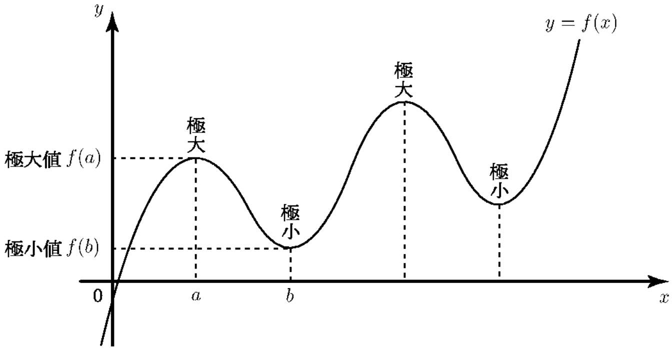
関数 $f(x)$ について、a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい、$f(x)$ を**極大値**という。

また、b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



が成り立つとき、$f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい、$f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例 3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

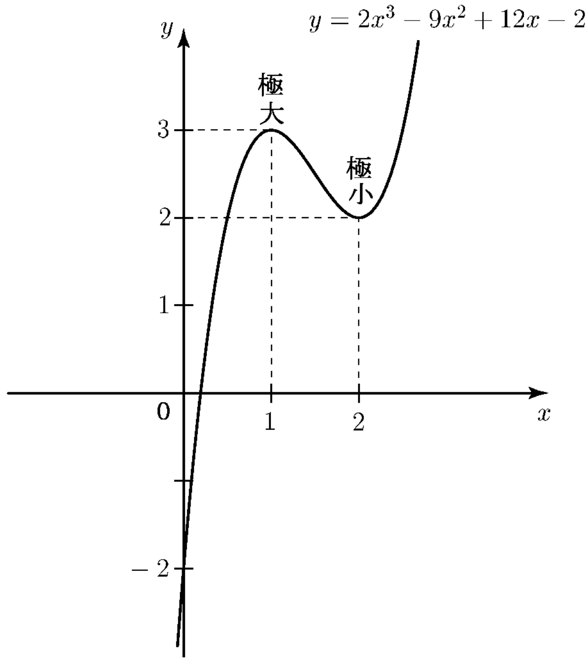
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
		極大		極小	

増減表より

$x = 1$ のとき 極大値 $y = 3$

$x = 2$ のとき 極小値 $y = 2$

であることがわかる。



問 3 次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$x =$ 　　　のとき極大値 $y =$

$x =$ 　　　のとき極小値 $y =$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

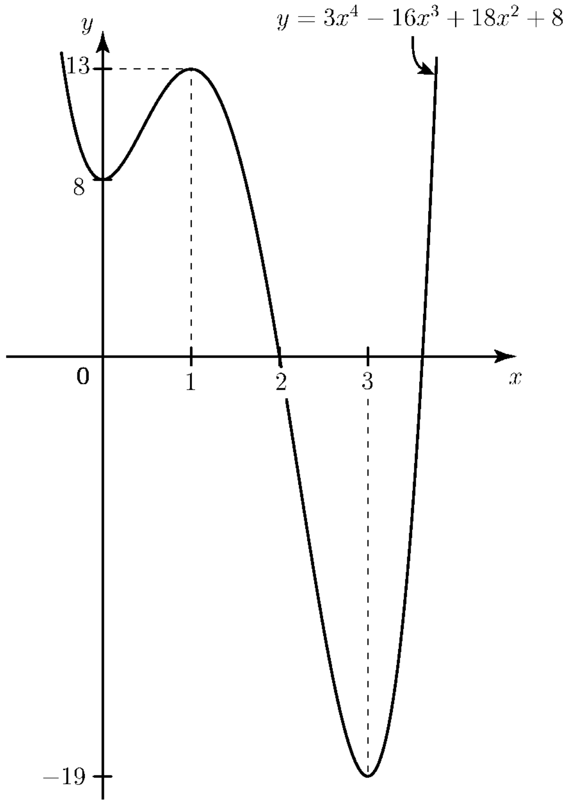
例　4 次関数 $y=3x^4-16x^3+18x^2+8$ の極値を調べるには、3 次関数と同様に増減表を作ればよい。
微分すると

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^3-48x^2+36x \\
&= 12x(x^2-4x+3) \\
&= 12x(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

より、$x=0,\ x=1,\ x=3$ のとき $y'=0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	8	$\nearrow$	13	$\searrow$	-19	$\nearrow$
		極小		極大		極小	

増減表より
$x=1$ のとき極大値 $y=13$
$x=0$ のとき極小値 $y=8$
$x=3$ のとき極小値 $y=-19$
であることがわかる。



問　以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1)　$y=-x^4+2x^2+5$

x	
y'	
y	

(2)　$y=3x^4-8x^3-18x^2$

x	
y'	
y	

＜原始関数＞

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は1つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad （C \text{ は定数}）$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad （C \text{ は定数}）$$

である。

問　次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形＝

(2) x^5 の原始関数の一般形＝

(3) x^6 の原始関数の一般形＝

< 不定積分 1 >

$F'(x)=f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり、その一般形は

$$F(x)+C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x)=f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x)+C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 $\int$ はインテグラル ($integral$) と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\displaystyle\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\displaystyle\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4+C$

(注) 記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4dx =$

(2) $\displaystyle\int x^5dx =$

(3) $\displaystyle\int x^6dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

< 不定積分 2 >

前ページより n が正の整数のとき

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

がなりたつ。微分の性質

$$\Big(kf(x)\Big)' = k \times f'(x) \qquad （k \text{ は定数}）$$

$$\Big(f(x)+g(x)\Big)' = f'(x) + g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\int kf(x)dx = k \times \int f(x)dx \qquad （k \text{ は定数}）$$
$$\int \Big\{f(x)+g(x)\Big\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

が得られる。

例 1 $\displaystyle \int \left(9x^2 - 4x + 3\right) dx = 9\int x^2 dx - 4\int x dx + 3\int dx$

$$= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 3 \times x + C$$

$$= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \qquad （C \text{ は積分定数}）$$

（注 1）例の様な不定積分では、積分定数は 1 つにまとめて書いておけばよい。
（注 2）$(x)' = 1$ より $\int 1dx = x + c$ である。1 を略して $\int dx = x + c$ と書く。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int 3x^3 dx =$　　　　(2) $\displaystyle \int (5 - 4x)\, dx =$

(3) $\displaystyle \int \left(3x^2 - 10x + 7\right) dx =$

例 2 $\displaystyle \int \left(-2x^2 - 3x + 6\right) dx - \int \left(x^2 - 3x + 5\right) dx$

$$= \int \Big\{\left(-2x^2 - 3x + 6\right) - \left(x^2 - 3x + 5\right)\Big\}dx = \int \left(-3x^2 + 1\right) dx = -x^3 + x + C$$

問 2　例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int \left(4x^2 - 3x + 2\right) dx - 2\int \left(2x^2 - 3x - 4\right) dx$$

$=$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 1 >

数列の和を表すのに、記号 $\sum$ を使って、次のように書くこともある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ここで a_k は数列の第 k 項を表し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は、k が $1, 2, 3, \cdots, n$ とかわるときの a_k をすべて加えることを表す記号である。
$\sum$ は、（アルファベットの s の大文字）S に相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

例 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

問 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。（和は計算しなくてもよい）

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (5k-12)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 1$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 2 >

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_n$$

のように記号 $\sum$ を使うと、和が簡単に書ける。

例 1 (1) $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots 99^2$ は第 k 項が $(2k-1)^2$
である数列の初項から第５０項までの和だから

$$1^2 \ + \ 3^2 \ + \ 5^2 \ + \ \cdots \ + \ 99^2 \ = \ \sum_{k=1}^{50} (2k-1)^2$$

問 1 次の和を、$\sum$ を使って表せ。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$

(2) $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \cdots + (2n-1)2n =$

(3) $1 + 4 + 7 + \cdots + 16 =$

(4) $5 + 10 + 15 + \cdots + 100 =$

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ は数列 $\{a_k\}$ の第 m 項から第 n 項までの和を表す。

例 2 (1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

問 2 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。(和は計算しなくてもよい)

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (k^2 - 8)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} (3k-2)(k-3)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 3 >

記号 Σ の定義から次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\\ \sum_{k=1}^{n}ca_k&=c\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (c\text{ は定数})\end{aligned}}$$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個の和}}=n$ と等差数列の和 (ワークブック Ser. **A** , *No.* **2**) の結果より

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}1=n} \quad , \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

が成り立つ。

例 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}+3\times n=2n^2+5n$

問 1 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(8k-5)=$

例 2 $1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times n=2n^2-n$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$

(2) $2+7+12+17+\cdots+(5n-3)=$

(3) $3+10+17+24+\cdots+(7n-4)=$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 4 >

ワークブック Ser. **A** , $No.$ **2** の 7 ページ問 1 の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

問 1 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 5 >

ワークブック Ser. **A** , $No.$ **2** の 7 ページ問 2 の結果より

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

が成り立つ。

問 1 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2=55^2=3025$$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}k^3$

$$=\left\{\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 6 >

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を $\displaystyle\sum_{1 \leqq k \leqq n} a_k$ などと記す場合もある。また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は、

k 以外の文字を使って、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_j$ のように書いてもよい。

例 1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{j=2}^{6} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

問 1 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=2}^{4} x_i =$

(2) $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} y_j =$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 =$

(4) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^3 =$

例 2 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=2}^{4} (x_i + y_j) \right\} = \sum_{i=1}^{3} \{(x_i + y_2) + (x_i + y_3) + (x_i + y_4)\}$

$$\begin{aligned} = &\ (x_1 + y_2) + (x_1 + y_3) + (x_1 + y_4) \\ &+ (x_2 + y_2) + (x_2 + y_3) + (x_2 + y_4) \\ &+ (x_3 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_3 + y_4) \end{aligned}$$

(注) 例 2 の和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} (x_i + y_j) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 3 \\ 2 \leqq j \leqq 4}} (x_i + y_j)$ 等で表すこともある。

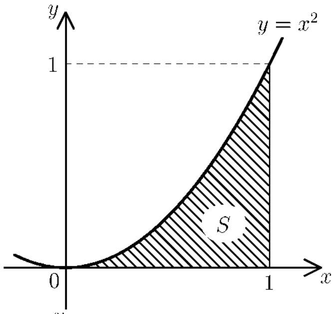
問 2 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

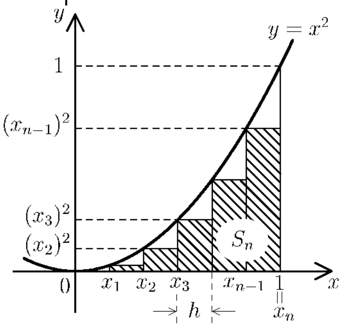
$$\sum_{i=2}^{4} \left\{ \sum_{j=4}^{5} (x_i \times y_j) \right\} =$$

< 区分求積法 1 >

例 曲線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれた部分の面積 S を次のようにして求める。

($a \leqq x \leqq b$ を満たす実数 x の集合を **区間** $[a, b]$ という。)





区間 $[0, 1]$ を n 等分し、分割した分点を

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$

とする。分割した小区間の幅を h とおくと、

$h = \dfrac{1}{n},\ x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1$

となる。各分点 x_k から曲線 $y = x^2$ までの高さ $\left(= (x_k)^2\right)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= (x_1)^2h + (x_2)^2h + (x_3)^2h + \cdots + (x_{n-1})^2h \\ &= h^2h + (2h)^2h + (3h)^2h + \cdots + \Big((n-1)h\Big)^2 h \\ &= \left\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right\} h^3 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right\} h^3 \end{aligned}$$

18 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、 $h = \dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n = \left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

ここで、分割を限りなく細かくする ($n \to \infty$ とする) と、 S_n は上の面積 S に近づいていく。

問 S の値を S_n の極限として求めよ。

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n =$$

< 区分求積法 2 >

面積を求めるのに、前ページのように区間を小区間に細分し、和の極限として求める方法を **区分求積法** という。

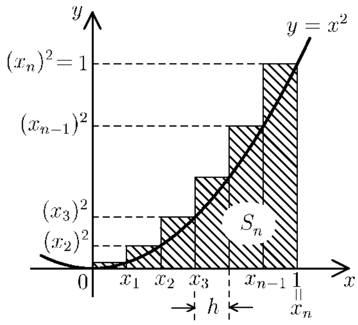
問 前ページの面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n は

$$S_n = (x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h+(x_n)^2h$$

となる。ただし

$$h=\frac{1}{n},\ x_1=h,\ x_2=2h,\cdots,\ x_n=nh(=1)$$

である。



(1) $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2$ を h と n の式になおせ。

$(x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_n)^2h=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を使って (1) の結果を書きなおせ。

$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2=$

(3) $h=\dfrac{1}{n}$ を代入することによって S_n^* を n だけの式にせよ。

$S_n^*=\Big\{(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_{n-1})^2+(x_n)^2\Big\}h=$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*$ を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*=$

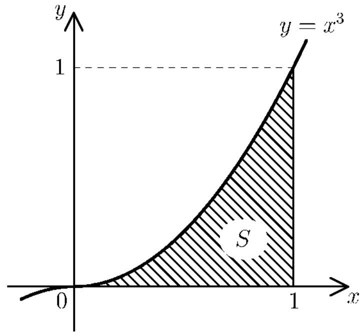
＜区分求積法 3＞

例 曲線 $y = x^3$ と x 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれた部分の面積 S を区分求積法で求める。区間 $[0, 1]$ を n 等分して、その分点を

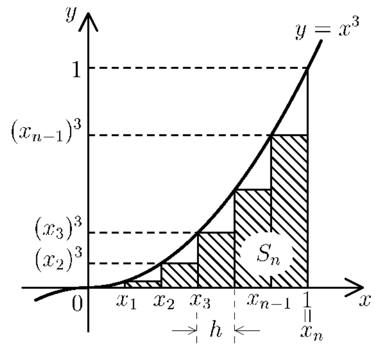
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

とする。分割した小区間の幅を h とすると、

$$h = \frac{1}{n},\ x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1$$



である。各分点 x_k から曲線 $y = x^3$ までの高さ $\left(= (x_k)^3\right)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n - 1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は



$$\begin{aligned} S_n &= (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + (x_3)^3 h + \cdots + (x_{n-1})^3 h \\ &= h^3 h + (2h)^3 h + (3h)^3 h + \cdots + \Big((n-1)h\Big)^3 h \\ &= \left\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3\right\} h^4 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right\} h^4 \end{aligned}$$

19 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、 $h = \dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

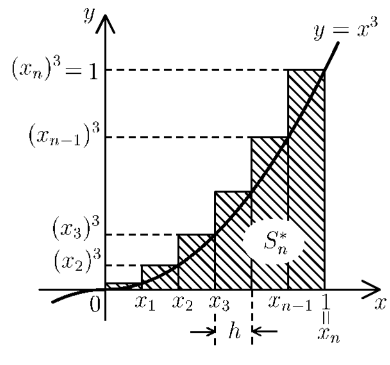
よって

$$S = \lim_{n \to \infty} S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

問 例と同じ面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n^* は

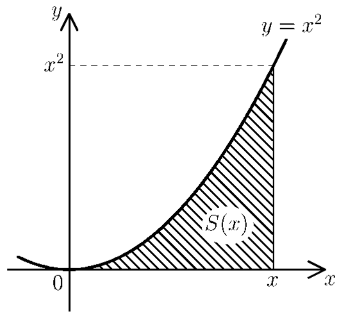
$$S_n^* = (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + (x_3)^3 h + \cdots + (x_n)^3 h$$

となる。 S_n^* を n だけの式で表し、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n^*$ を求めよ。



＜ 面積関数 $S(x)$ 1 ＞

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



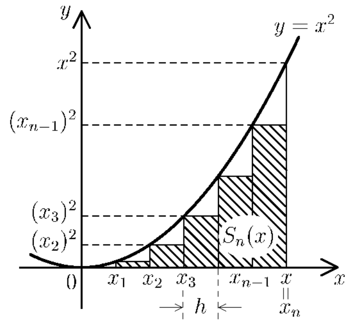
区間 $[0,x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h=\frac{x}{n}\ ,\ x_1=h\ ,\ x_2=2h\ ,\cdots,\ x_n=nh(=x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned}S_n(x)&=(x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h\\&=h^2h+(2h)^2h+\cdots+\big((n-1)h\big)^2h\\&=\left\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right\}h^3=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}h^3\end{aligned}$$

18 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、$h=\dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x)=\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}\times\left(\frac{x}{n}\right)^3=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)x^3$$

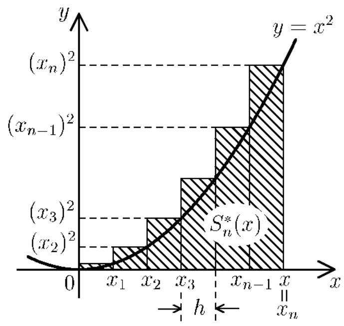
よって

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)x^3=\frac{1}{3}x^3$$

問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

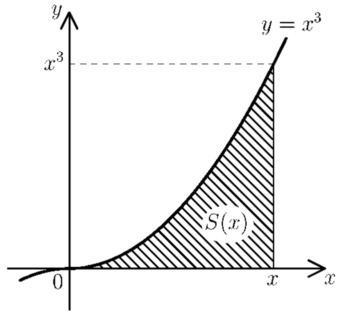
$$S_n^*(x)=(x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_n)^2h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*(x)$ を求めよ。



$<$ 面積関数 $S(x)$ 2 $>$

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



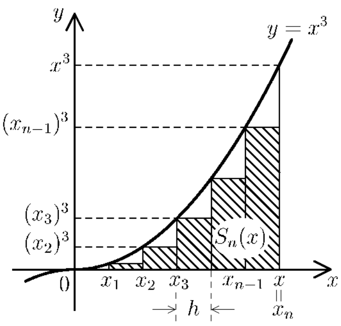
区間 $[0,x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h=\frac{x}{n}\ ,\ x_1=h\ ,\ x_2=2h\ ,\cdots,\ x_n=nh(=x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned}S_n(x)&=(x_1)^3h+(x_2)^3h+\cdots+(x_{n-1})^3h\\&=h^3h+(2h)^3h+\cdots+\big((n-1)h\big)^3h\\&=\left\{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right\}h^4=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right\}h^4\end{aligned}$$

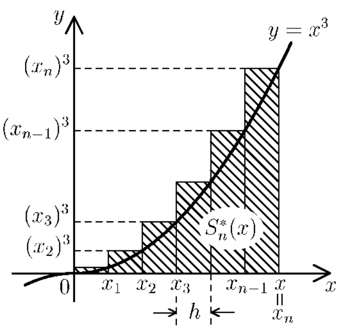
19 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、$h=\dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x)=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2\times\left(\frac{x}{n}\right)^4=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2x^4$$

よって

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2x^4=\frac{1}{4}x^4$$

問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

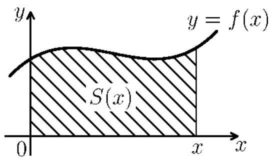


$$S_n^*(x)=(x_1)^3h+(x_2)^3h+\cdots+(x_n)^3h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*(x)$ を求めよ。

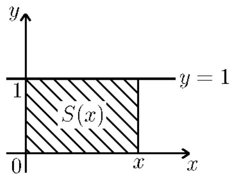
< 面積関数 $S(x)$ 3 >

正の値をとる関数 $f(x)$ に対し、右図の
斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

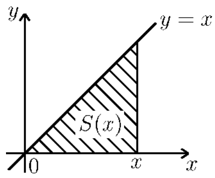


問 1 下図および 24,25 ページの結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 1$ のとき $S(x) =$



(2) $f(x) = x$ のとき $S(x) =$



(3) $f(x) = x^2$ のとき $S(x) =$

(4) $f(x) = x^3$ のとき $S(x) =$

問 2 問 1 の結果から $f(x) = x^4$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

問 3 問 1、問 2 の結果から、$f(x) = x^n$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

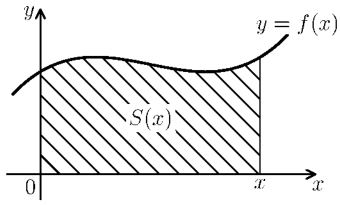
問 4 上の結果から考えて、一般の正の関数 $f(x)$ に関する面積関数を $S(x)$ とするとき、$f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか類推せよ。

< 面積関数 $S(x)$ 4 >

前ページの結果から、一般の正の関数 $f(x)$ に対する面積関数 $S(x)$ とすると

$$\bigl(S(x)\bigr)' = f(x)$$

の関係がある。これから、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の一つであり、$S(0)=0$ を満たす。即ち



$$\boxed{S(x) = \int f(x)dx \ , \ S(0)=0}$$

例 $f(x)=x^2-2x+2$ のとき

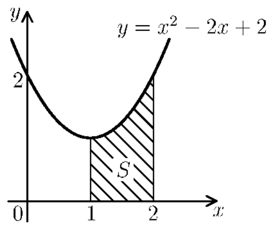
$$S(x) = \int (x^2-2x+2)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C$$

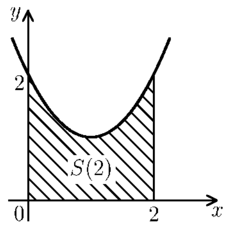
で $S(0)=0$ より $C=0$ 。よって、

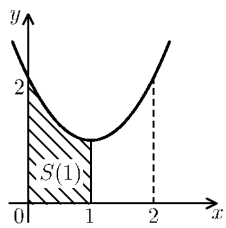
$$S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

である。曲線 $y=x^2-2x+2$ と x 軸および直線 $x=1$ と $x=2$ で囲まれた部分(右図の斜線部分) の面積 S は

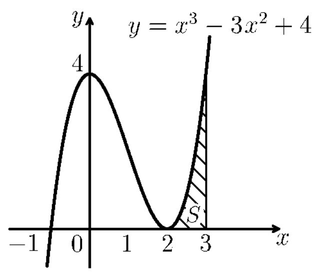
$$\begin{aligned} S &= S(2) - S(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\times 2^3 - 2^2 + 2\times 2\right) - \left(\frac{1}{3}\times 1^3 - 1^2 + 2\times 1\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$







問 $f(x)=x^3-3x^2+4$ のとき、面積関数 $S(x)$ を求め、右図の斜線部分の面積 S を求めよ。



＜ 定積分の定義 ＞

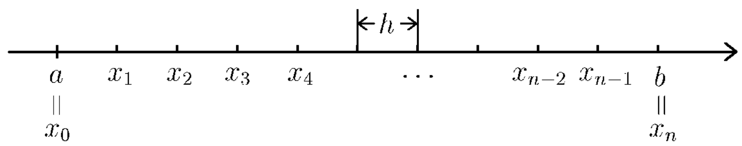
連続な関数 $f(x)$ と区間 $[a,b]$ に対し、$[a,b]$ を n 等分した分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とし、分割した小区間の幅を h とすると、$h = \dfrac{b-a}{n}$ であり、

$$x_1 = a + h \ , \ \ x_2 = a + 2h \ , \ \ \cdots \ , \ \ x_n = a + nh \ \ (= b)$$

となる。



今

$$S_n^* = f(x_1)h + f(x_2)h + \cdots + f(x_n)h$$

とおいて、$n \to \infty$ とした極限を

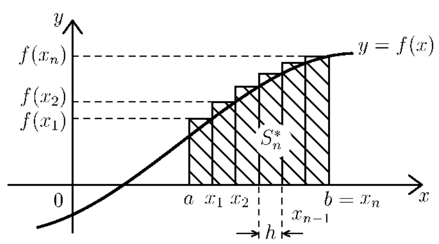
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} \{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}h}$$

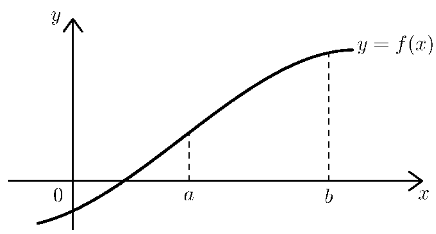
と書いて、関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの**定積分**という。

問 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき、S_n^* は右上図の斜線部分の面積を意味する。
このとき定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

は何を意味するか？
右下図を使って説明せよ。





＜ 微分積分学の基本定理 ＞

$f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は右上図の斜線部分の面積 S （図１）を表す。面積関数 $S(x)$ を使うと

$$S = S(b) - S(a)$$

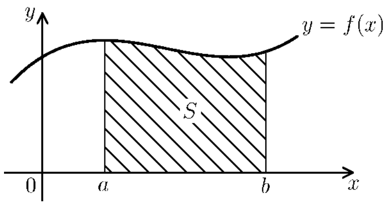
より

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

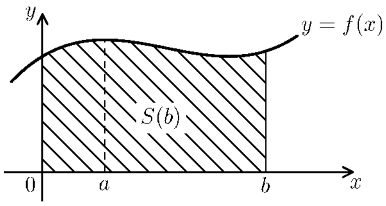
である。ここで $f(x)$ と $S(x)$ の関係は

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

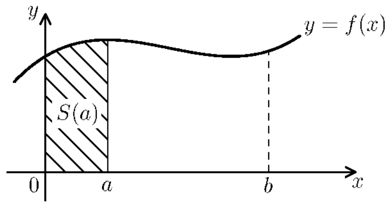
である。これを**微分積分学の基本定理**という。



（図１）



（図２）



（図３）

＜ 証明の概略 ＞

導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

である。$S(x+h) - S(x)$ は図５の斜線部分の面積であり h が小さいときは図６の長方形の面積で近似できる。すなわち

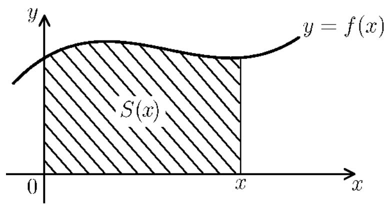
$$S(x+h) - S(x) \fallingdotseq f(x)h$$

より

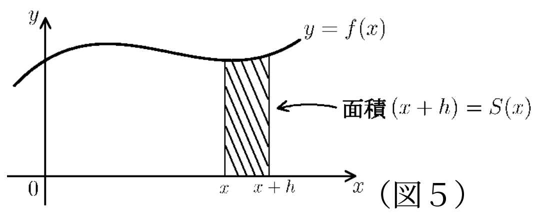
$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき } \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$$

よって

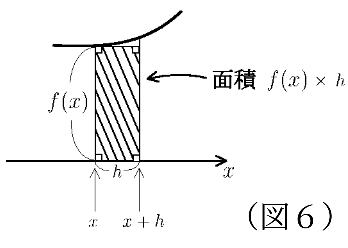
$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$



（図４）



（図５）



（図６）

< 定積分 1 >

前ページの結果から

$$S'(x) = f(x)$$

のとき、すなわち

$$\int f(x)dx = S(x) + C$$

のとき定積分は

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

で計算される。今後はこの計算式を定積分の定義とする。ここで $S(b) - S(a)$ を $\Big[S(x)\Big]_a^b$ と書くことにする。つまり

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)$$

である。

例 (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ 　より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ より

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times 1^4 = \frac{15}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^7 1dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 xdx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2 dx$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3 dx$

＜定積分 2 ＞

前ページより 定積分の計算式は

$$\boxed{\int f(x)dx = S(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)}$$

であった。この計算式から $a < b$ でない場合でも

$$\int_a^a f(x)dx = S(a) - S(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = S(a) - S(b) = -(S(b) - S(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

となる。

例 (1) $\displaystyle\int_1^1 (2x^4 - 5x)dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_2^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_2^1 = 1^3 - 2^3 = -7$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^2 (x^2 - 3x)dx$

(2) $\displaystyle\int_3^3 (2x - 3x^3)dx$

(3) $\displaystyle\int_4^4 x^4 dx$

(4) $\displaystyle\int_4^1 x^3 dx =$

(5) $\displaystyle\int_4^2 x^4 dx$

(6) $\displaystyle\int_2^{-2} (x^2 - 4)dx$

(7) $\displaystyle\int_6^0 (x - 2)dx$

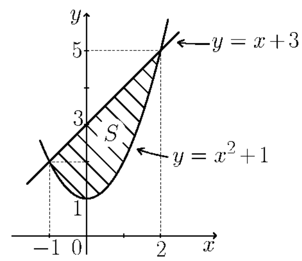
(8) $\displaystyle\int_2^{-2} (x^3 - x)dx$

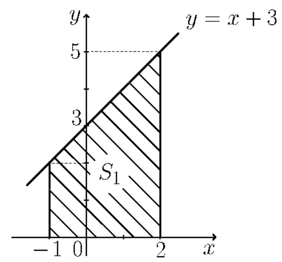
＜面積１＞

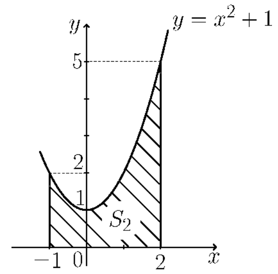
29 ページより $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

例 直線 $y = x + 3$ と曲線 $y = x^2 + 1$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。

右図のような斜線部分の面積 S_1 , S_2 を考えると、以下のように計算できる。







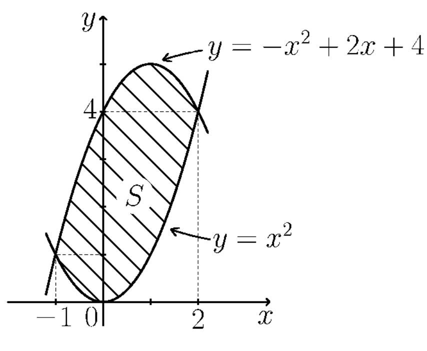
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx = \int_{-1}^{2}\left\{-x^2+x+2\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

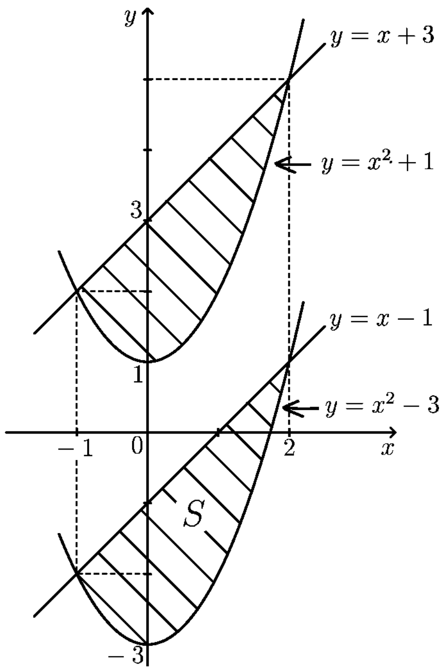
問 曲線 $y = -x^2 + 2x + 4$ と $y = x^2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜面積２＞

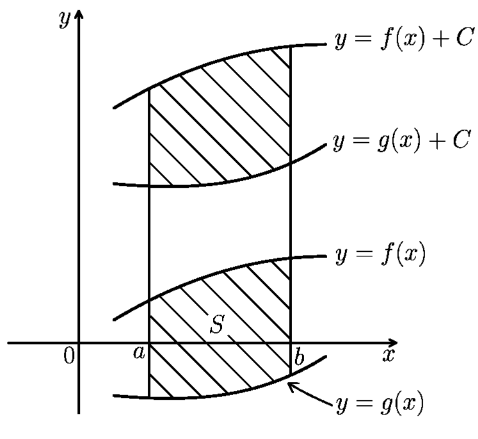
例 直線 $y=x-1$ と曲線 $y=x^2-3$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。
直線と曲線を共に y 軸方向に 4 だけ平行移動させると、
$y=x-1$ は $y=x+3$ に
$y=x^2-3$ は $y=x^2+1$ に移る。
S は $y=x+3$ と $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積と等しいから
前ページの例より

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx=\frac{9}{2}$$

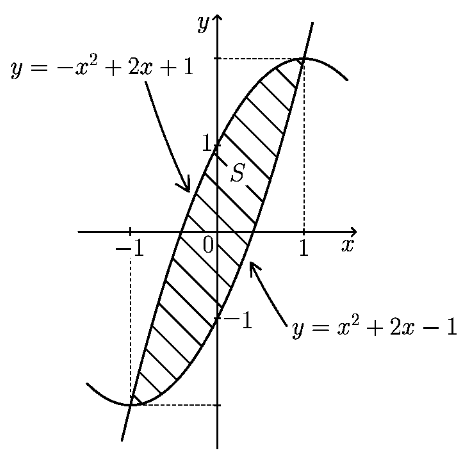


（注）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{(x-1)-(x^2-3)\right\}dx$ としても求まる。

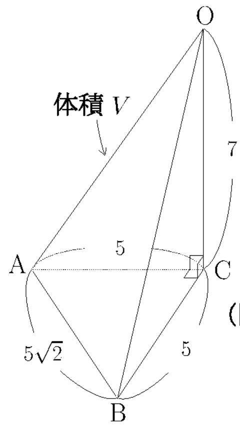
問１ 右図のように曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と曲線 $x=a$, $x=b$ とで囲まれた部分の面積 S を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
（ただし $g(x)<f(x)$ とする）



問２ 曲線 $y=-x^2+2x+1$ と $y=x^2+2x-1$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

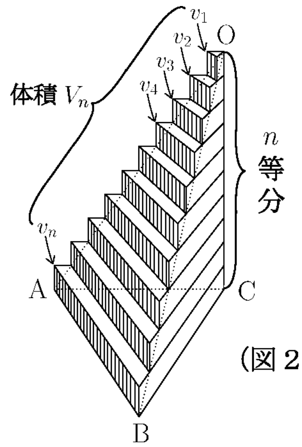


＜体積１＞



（図１）

例　図１のような底面が（斜辺 $5\sqrt{2}$ の）直角二等辺三角形で高さが７の三角錐ＯＡＢＣの体積 V を求めたい。ＯＣを n 等分し、図２のような階段状の立体の体積 V_n で近似する。



（図２）

この階段状の立体は厚さ $\dfrac{7}{n}$ の三角柱の集まりであり、その体積を上から順に

$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ \cdots\ ,\ v_n$$

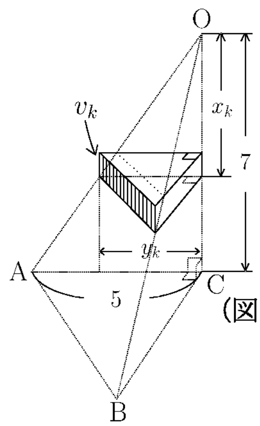
とおくと、

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ \cdots\ + v_n$$

となる。第 k 番目の三角柱の体積を v_k とする。図３のようにＯからの距離を x_k , 二等辺三角形の一辺の長さを y_k とおくと、

$$y_k = \frac{5}{7}\times x_k \quad , \quad x_k = \frac{7}{n}\times k$$

であるから、図４より



（図３）

$$v_k = \frac{1}{2}\times y_k \times y_k \times \frac{7}{n} = \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times k^2$$

となる。よって

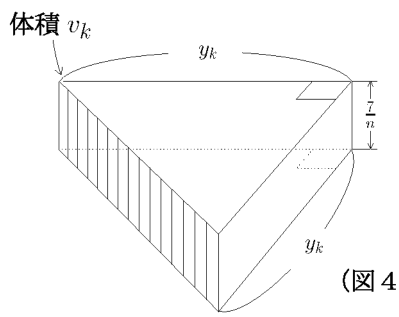
$$V_n = \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times 1^2 + \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times 2^2 + \cdots + \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times n^2$$

$$= \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times\left\{1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2\right\}$$

$$= \frac{5^2\times 7}{2n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{5^2\times 7}{12}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

となる。



（図４）

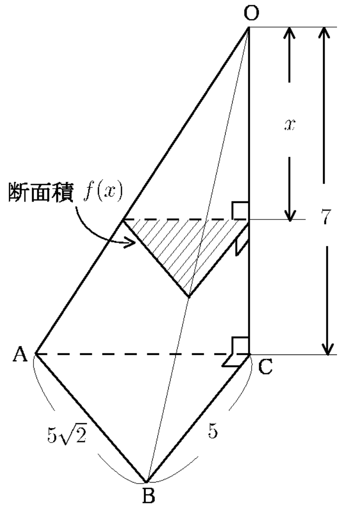
問　$n\to\infty$ として三角錐の体積 V を求めよ。

$V = \displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n =$

＜ 体積 2 ＞

例 前ページの三角錐の体積 V は以下のような方法で求めることができる。右図のように頂点 O からの距離が x である水平面で切り取った断面の面積を $f(x)$ とおく。断面と底面は相似な三角形であり、相似比は $x:7$ であるから面積比は

$$\text{断面積}：\text{底面積} = x^2 : 7^2$$



となる。底面は直角二等辺三角形であるから

$$\text{底面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

従って $$f(x) : \frac{25}{2} = x^2 : 7^2$$

より $$f(x) = \frac{25}{98}x^2$$

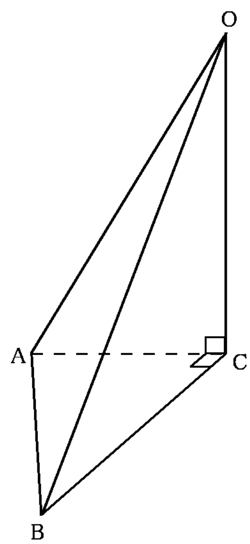
となる。三角錐 OABC はこの断面を $x=0$ から $x=7$ まで集めたものであるから

$$V = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx = \left[\frac{25}{294}x^3\right]_0^7 = \frac{175}{6}$$

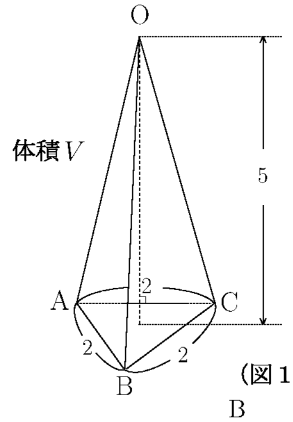
問 右図の三角錐 OABC は底面が

AC=3 , BC=4 , AB=5

の直角三角形で、高さが 7 (OC=7) の三角錐であるとする。三角錐 OABC の体積 V を求めよ。

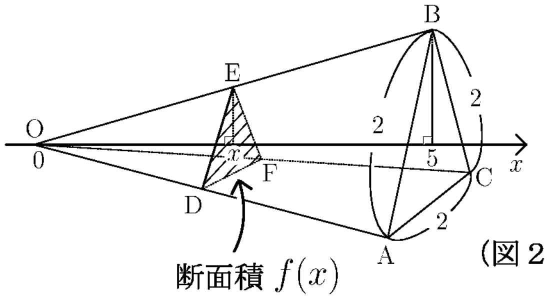


＜体積 3 ＞



（図 1）

例 一辺の長さが 2 の正三角形が底面で、高さが 5 の三角錐 OABC の体積 V を求めたい。
図 2 のように三角錐を横にし、頂点 O から底面への垂線を x 軸とする。頂点からの距離が x である平面で切りとった断面 DEF の面積を $f(x)$ とおく。



（図 2）

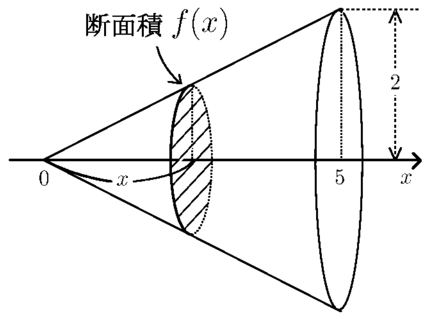
とおく。三角形 DEF は一辺が $\dfrac{2}{5}x$ の正三角形であるから、
その面積 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{25}x^2$$

となる。よって三角錐の体積 V は

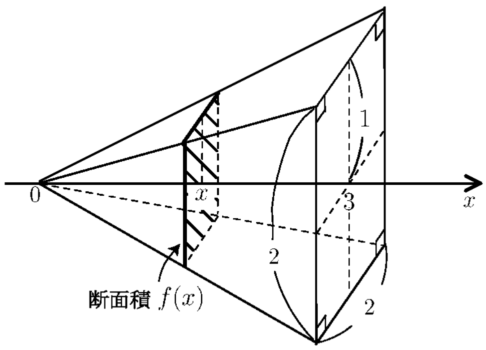
$$V = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 \frac{\sqrt{3}}{25}x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{75}x^3\right]_0^5 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

問 1 底面が半径 2 の円で、高さが 5 の円錐の体積 V を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 V を求めよ。



$f(x) =$ 　　　　　　, $V =$

問 2 底面が一辺 2 の正方形で、高さが 3 の四角錐の体積 V を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 V を求めよ。



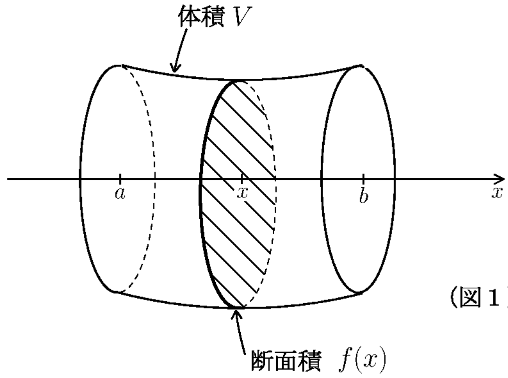
$f(x) =$ 　　　　　　, $V =$

＜ 体積 4 ＞

前ページの例からわかるように、ある立体が図 1 のように基準線（x 軸）に垂直な断面の集まりと見なされるとき、断面積 $f(x)$ がわかっていれば図 1 の立体の体積 V は

$$\boxed{V = \int_a^b f(x)dx}$$

で求められる。



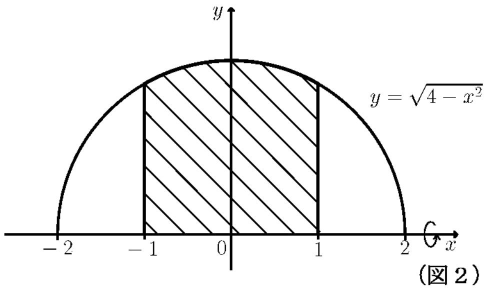
（図 1）

例　図 2 の斜線部分を x 軸のまわりに一回転してできた立体図は図 3 のような立体である。図 3 の斜線部分の断面は半径 $\sqrt{4-x^2}$ の円であるから、その断面積 $f(x)$ は

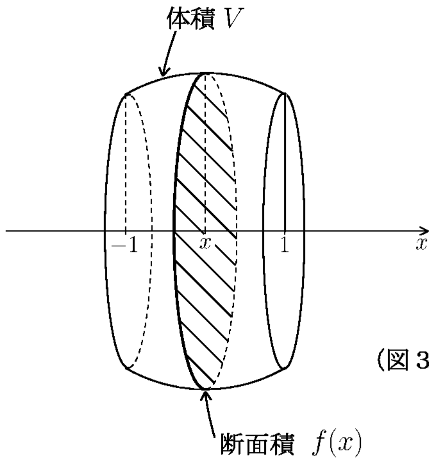
$$f(x) = \pi(\sqrt{4-x^2})^2 = \pi(4-x^2)$$

となる。よって図 3 の立体の体積 V は

$$V = \int_{-1}^{1} \pi(4-x^2)dx = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{22}{3}\pi$$

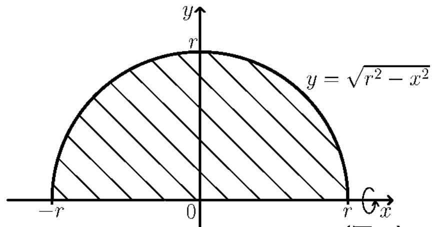


（図 2）



（図 3）

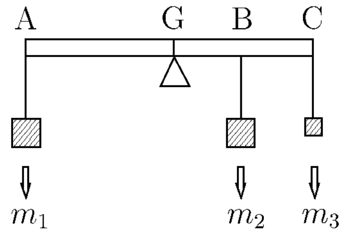
問　半径 r の球は図 4 の斜線部分を x 軸のまわりに一回転してできた立体と考えられる。例を参考にして半径 r の球の体積 V を求めよ。



（図 4）

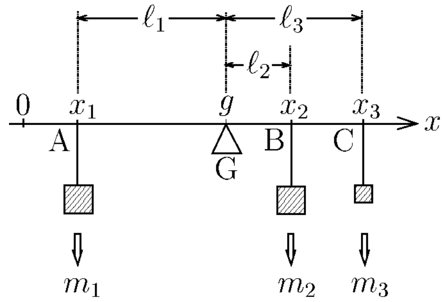
< 質量と重心 1 >

例 細長い棒 AC に図 1 のようにおもり $m_1,\ m_2,\ m_3$ がかかっているとする。棒自身のおもさを無視して重心 G の位置を求めたい。



(図1)

この問題を図 2 のように数直線上におもり $m_1,\ m_2,\ m_3$ がかかっていると考え、各点の座標を $x_1,\ x_2,\ x_3$ として重心の座標 g を求めたい。



(図2)

重心の意味から

(1) $\ell_1 = g - x_1,$
$\ell_2 = x_2 - g, \quad \ell_3 = x_3 - g$

とおくと

(2) $m_1 \times \ell_1 = m_2 \times \ell_2 + m_3 \times \ell_3$

が成り立つ。(2) 式に (1) を代入すると

より
$$m_1 g - m_1 x_1 = (m_2 x_2 - m_2 g) + (m_3 x_3 - m_3 g)$$
$$(m_1 + m_2 + m_3) g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$$

ここで全質量を $M = m_1 + m_2 + m_3$ とおくと

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\}}$$

が成り立つ。

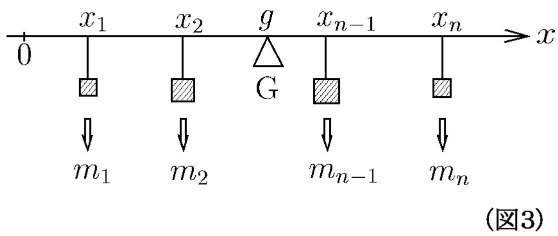
問 数直線上に n 個のおもり

$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{n-1},\ m_n$

が図 3 のようにかかっているとき重心 G の位置を全質量

$M = m_1 + m_2 + \ \cdots + m_{n-1} + m_n$

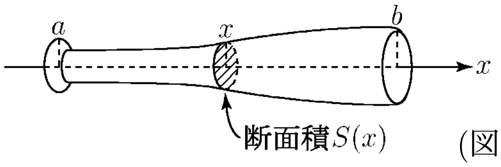
と $m_1,\ \cdots,\ m_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ を使って表せ。



(図3)

＜質量と重心 2＞

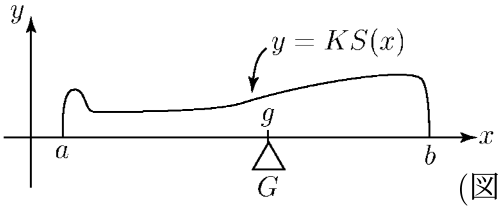
例 野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 (x 軸) に垂直な断面の断面積 $S(x)$ が分かっている場合、この立体の体積 V は



(図 1)

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

であった。もしこのバットの材質が均一であれば、その質量 M は体積の定数倍 (K 倍) になると考えられるので



(図 2)

$$M = KV = \int_a^b KS(x)dx$$

と表される。この場合被積分関数 $KS(x)$ をこの立体の**質量分布の密度関数**という。

この立体の重心 G の位置 g(図 2) を求めたい。

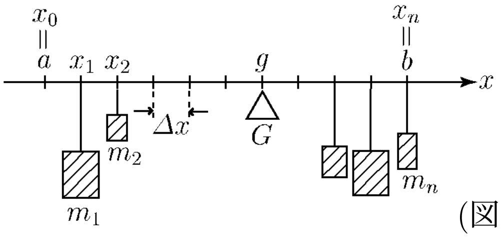
区間 $[a,b]$ を n 等分して、その分点を

$$a = x_0,\ x_1, \cdots, x_n = b$$

とおき、それぞれ

$$m_1,\ m_2,\ \cdots, m_n$$

のおもりがかかっているとする (図 3)。



(図 3)

このとき $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ とすると

$$m_k = \int_{x_k-1}^{x_k} KS(x)dx \fallingdotseq KS(x_k)\Delta x \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。前ページの結果より

$$g = \frac{1}{M}\{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\} \fallingdotseq \frac{1}{M}\{x_1KS(x_1) + \cdots + x_nKS(x_n)\}\Delta x$$

である。$n \to \infty$ とすれば定積分の区分求積法による定義から

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\int_a^b xKS(x)dx \ = \ \frac{1}{\int_a^b KS(x)dx}\int_a^b xKS(x)dx}$$

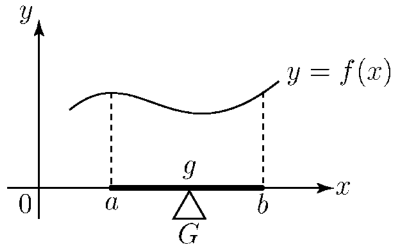
となる。

問 図 2 のように数直線の a から b までの区間に質量がある場合、質量分布の密度関数を $f(x)$ とすると全質量 M は

$$\boxed{M = \int_a^b f(x)dx}$$

である。重心の座標 g を M と $f(x)$ を使って表せ。

＜質量と重心 3 ＞



数直線の区間 $[a,b]$ に質量があるとき、その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば、全質量 M と重心の座標 g は

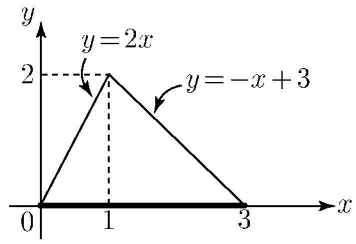
$$\boxed{M = \int_a^b f(x)dx \quad , \quad g = \frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx}$$

で表される。$f(x)$ を単に**密度関数**とか**重み関数**などという。

例 数直線上の区間 $[0,3]$ に質量があり、その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x+3 & : \quad 1 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

である場合、全質量 M と重心の座標 g は



$$M = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 (-x+3)dx = \Big[x^2\Big]_0^1 + \Big[-\frac{x^2}{2}+3x\Big]_1^3 = 3$$

$$g = \frac{1}{M}\int_0^3 xf(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\times 2x\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 x\times(-x+3)dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \frac{4}{3}$$

問 数直線上の区間 $[0,2]$ に質量があり、その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = -x^2+2x \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

である場合、全質量 M と重心の座標 g を求めよ。