高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001年度版)

Series **A**

No. **2**

内容

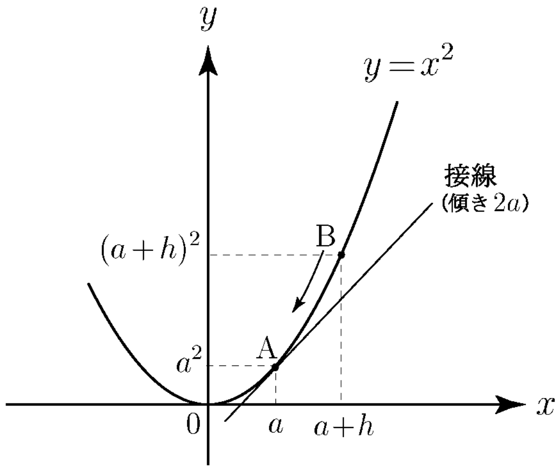
◎ 数列

◎ 1次・2次関数のグラフ

◎ 極限

◎ 微分係数

◎ 導関数



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< 数列 >

ある規則に従って並んでいる数の列を数列という。数列の各数を項といい、最初の項から順に、**第 1 項、第 2 項、・・・、第 $\boldsymbol{n}$ 項**と呼ぶ。特に、第 1 項を**初項**という。

例 次の数列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$$

は初項が 1、第 2 項が 4、第 3 項が 9 であるが、これを

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$$

と書き直すと、第 n 項は n^2 であることがわかる。

第 n 項が n についての式で書けるとき、これを**一般項**という。
第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

例題 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 4$ (2) $a_n = 3 \times 2^n$

(解) (1) $a_1 = 2 \times 1 - 4 = -2,$ $a_2 = 2 \times 2 - 4 = 0$
$a_3 = 2 \times 3 - 4 = 2,$ $a_4 = 2 \times 4 - 4 = 4$

(2) $a_1 = 3 \times 2^1 = 6,$ $a_2 = 3 \times 2^2 = 12$
$a_3 = 3 \times 2^3 = 24,$ $a_4 = 3 \times 2^4 = 48$

問 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3n - 5$

(2) $a_n = 3n^2$

(3) $a_n = (-1)^n$

(4) $a_n = \dfrac{1}{9} \times 3^n$

(5) $a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

< 等差数列 >

数列の各項と1つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を**等差数列**といい、前の項との差を**公差**という。

例1 奇数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は初項1、公差2の等差数列である。

例2 数列

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots$$

は初項4、公差3の等差数列である。一般項を a_n とすると

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 13, \quad a_5 = 16$$

であるが、

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 + 3 \\ a_3 &= 4 + 3 \times 2 \\ a_4 &= 4 + 3 \times 3 \\ a_5 &= 4 + 3 \times 4 \end{aligned}$$

と考えると、一般項は $a_n = 4 + 3 \times (n-1) = 3n + 1$ である。

問1 初項が a、公差が d の等差数列

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問2 例1の一般項 a_n を求めよ。

問3 等差数列

$$1, \quad 8, \quad 15, \quad 22, \quad 29, \quad 36, \ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

< 等差数列の和 >

例題 1 から 100 までの和を求めよ。

(解) $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ を逆に並べて、加えると 101 が 100 個できる。

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
 & S = & 1 + & 2 + & \cdots + & 99 + & 100 \\
+) & S = & 100 + & 99 + & \cdots + & 2 + & 1 \\
\hline
 & 2S = & 101 + & 101 + & \cdots + & 101 + & 101 & = 101 \times 100
\end{array}
$$

よって $S = \dfrac{101 \times 100}{2} = 5050$ である。

問 1 1 から 1000 までの和

$$S = 1 + 2 + \ \cdots \ + 999 + 1000$$

を求めよ。

問 2 1 から n までの和

$$S = 1 + 2 + \ \cdots \ + (n - 1) + n$$

を求めよ。

問 3 偶数列の第 50 項までの和

$$S = 2 + 4 + 6 + \ \cdots \ + 96 + 98 + 100$$

を求めよ。

問 4 奇数列の第 50 項までの和

$$S = 1 + 3 + 5 + \ \cdots \ + 95 + 97 + 99$$

を求めよ。

＜ 等比数列 1 ＞

数列の各項と一つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。

例 1　数列

$$5\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 40\ ,\ 80\ ,\ 160\ ,\ \cdots$$

は、前の項を 2 倍してできる数列であるから、公比が 2 , 初項が 5 の等比数列である。

例 2　数列

$$4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \cdots$$

は初項が 4 , 公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

問 1　次の等比数列の初項と公比を求めよ。

(1)　$1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ 81\ ,\ \cdots$

(2)　$256\ ,\ 64\ ,\ 16\ ,\ 4\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(3)　$\frac{1}{9}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ 1\ ,\ -3\ ,\ 9\ ,\ \cdots$

(4)　$-1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ \cdots$

問 2　次の数列が等比数列になるように $\boxed{}$ に適当な数を入れよ。

(1)　$2\ ,\ 6\ ,\ \boxed{}\ ,\ 54\ ,\ \boxed{}$

(2)　$18\ ,\ -6\ ,\ \boxed{}\ ,\ \boxed{}\ ,\ \frac{2}{9}$

＜ 等比数列２ ＞

例 数列

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96\ ,\ \cdots$$

は初項 3、公比 2 の等比数列で、一般項を a_n とすると、

$a_1 = 3,\quad a_2 = 3 \times 2,\quad a_3 = 3 \times 2^2,\quad a_4 = 3 \times 2^3,\quad a_5 = 3 \times 2^4,\quad \cdots$

であるから、

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

になる。

(注) 整数指数 (ワークブック Ser. **A** , *No.* **4**) で詳しく説明するが、$2^0 = 1$ (ゼロ乗 $= 1$) と約束する。一般の数 r に対し $\boxed{r^0 = 1}$ と定める。このように定めると、上の例の場合 $n = 1$ のとき $a_1 = 3 \times 2^0 = 3$ となって、一般項 a_n の式が全ての自然数 n に対して成立する。

問1 初項 a, 公比 r の等比数列

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ ar^4\ ,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問2 次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ \cdots$

(2) $4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ 108\ ,\ 324\ ,\ \cdots$

(3) $81\ ,\ 27\ ,\ 9\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(4) $8\ ,\ -4\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \cdots$

＜ 等比数列の和 ＞

例題 初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解) S に公比 3 をかけて、S から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{rcl} S & = & 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\ -)\ 3S & = & \quad 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots\cdots \ + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\ \hline -2S & = & 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \times 3^{100} \end{array}$$

よって $S = \dfrac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \dfrac{5(3^{100} - 1)}{2}$

問 1 例題と同じ数列で、第 n 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$$

を求めよ。

問 2 初項 a, 公比 r の等比数列の第 n 項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

を求めよ。

問 3 次の数列の和

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$$

を求めよ。

< 数列の類推 >

例題 奇数列 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$ の第 n 項までの和を

$$a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-1)$$

とする。第 5 項までを求め、一般項を類推せよ。

(解) $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$,

$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

より $a_n = n^2$ と類推される。

問 1 2 つの数列

$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \quad , \quad b_n = \frac{6}{n \times (2n+1)} a_n$$

に対し、共に第 5 項まで求め、b_n の一般項を類推せよ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

問 2 2 つの数列

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad , \quad b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

に対し、共に第 5 項まで求め、b_n を a_n で表せ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

< 関係式 >

2 個以上の文字を含む等式には次の 2 種類がある。

<**1. 恒等式**>

例 1 (1) 等式 $3(x-y)+2(x+2y)=5x+y$ は x と y がどんな数でも成立する。

(2) 等式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ は x と y がどんな数でも成立する。

<**2. 関係式**>

例 2 (1) 等式 $x+y=3$ を満たす数 x と y は

$$\begin{cases} x=0.5 \\ y=2.5 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=1.2 \\ y=1.8 \end{cases}, \begin{cases} x=1.9 \\ y=1.1 \end{cases}, \begin{cases} x=2.1 \\ y=0.9 \end{cases}$$

など無数にある。しかし $x=y=2$ のような場合は $x+y=3$ を満足しないのでだめである。

(2) 等式 $y=2x$ を満たす数 x と y は

$$\begin{cases} x=0.5 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=1.2 \\ y=2.4 \end{cases}, \begin{cases} x=1.9 \\ y=3.8 \end{cases}, \begin{cases} x=2.1 \\ y=4.2 \end{cases}$$

など無数にある。しかし $x=y=1$ のような場合は $y=2x$ を満足しないのでだめである。

$x+y=3$ や $y=2x$ などの等式を x と y の**関係式**という。x と y の関係式は x と y がどんな数でも成立するというわけではない。

(注) x と y の関係式が 2 個ある場合を**連立方程式**という。たとえば

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=2x \end{cases}$$

の両方の関係式を満たす x と y は $x=1, y=2$ だけである。

問 次の関係式を $y=$ の形にせよ。

(1) $x-y=0$

$y=$

(2) $6x-3y=9$

$y=$

(3) $xy=2$

$y=$

(4) $x^2-x+2y=0$

$y=$

＜ 関数 ＞

例 1　秒速 5m の速度で 1 秒間走ると 5m 進み、2 秒間走ると 10m 進み、3 秒間走ると 15m 進む。一般に x 秒間走ると y m 進むとすれば

$$y = 5x$$

の関係がある。この関係を表にすると以下のようになる。

x(s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(m)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

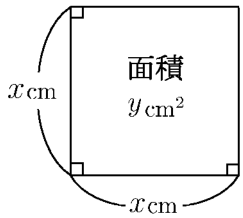
x の値が上の段のときの y の値が下の段に書いてある。

この例の x と y のように、いろいろな値をとる文字を**変数**という。

例 2　一辺が $x$cm の正方形の面積を $y$cm^2 とすると

$$y = x^2$$

の関係がある。



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

例 1、例 2 のように変数 x と y があって、x の値を決めるとそれにつれて y の値も決まるとき、y は x の**関数**という。例 1 のように y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の **1 次関数**という。例 2 のように y が x の 2 次式で表されるとき、y は x の **2 次関数**という。関数をあらわす式は前ページの関係式で $y =$ の形にした式と考えてよい。

問　x の関数 y が以下の場合に、表の空欄をうめよ。

(1) $y = 15 - 2x$

x	1	2	3	4	5	6
y						

(2) $y = \dfrac{x^2}{4}$

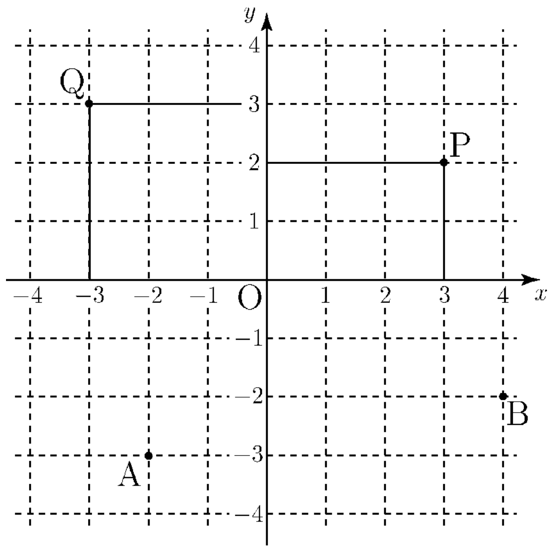
x	-1	0	1	2	3	4
y						

< 座標平面 >

数直線は直線上に数をならべ、直線上の点の位置によって数値を表す。逆に直線上の点の位置は数値によって表される。

これと同様に平面上の点の位置を数値によって表したい。

右図のように両方も原点で直角に交わっている２本の数直線を考える。このような図で



横の数直線を $\boldsymbol{x}$ **軸** または 横軸

縦の数直線を $\boldsymbol{y}$ **軸** または 縦軸

x 軸と y 軸を合わせて**座標軸**

座標軸の交点 O を**原点**

という。また

x 軸の正の方向は 右向き

y 軸の正の方向は 上向き

とする。このことを強調するため、先に矢印をつける。座標軸のある平面を**座標平面**という。

右図の点 P の位置を表すには、P から x 軸、y 軸に垂直にひいた直線が x 軸、y 軸と交わる点の目盛り 3 と 2 を読みとり、$(3, 2)$ と書く。
このとき

3 を P の $\boldsymbol{x}$ **座標** , 2 を P の $\boldsymbol{y}$ **座標** , $(3, 2)$ を点 P の**座標**

という。座標をはっきり表すため、点 P を $\mathrm{P}(3, 2)$ とも書く。

問 1 図の点 Q の座標は $(-3, 3)$ である。点 A と点 B の座標を書け。

問 2 次の点の位置を図の中にはっきり示せ。

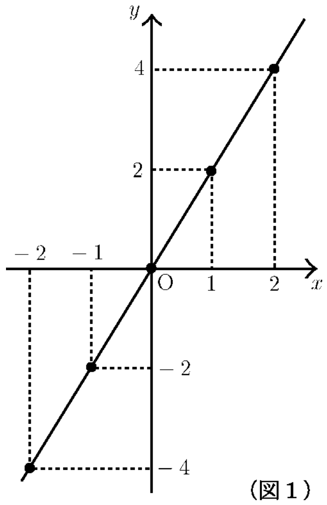
$\mathrm{C}(1, 0)$, $\mathrm{D}(0, -2)$, $\mathrm{E}(1, 3)$, $\mathrm{F}(-4, -4)$, $\mathrm{G}(-2, 1)$, $\mathrm{H}(3, -3)$

＜１次関数のグラフ１＞

例　１次関数 $y = 2x$ を考える。 $x = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ における y の値を表にすると以下のようになる

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

関係式 $y = 2x$ を満足する x, y は表より $(-2, -4)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ である。これらの点を右の座標平面上にかき入れると、図１のように全ての点が同一直線上にある。

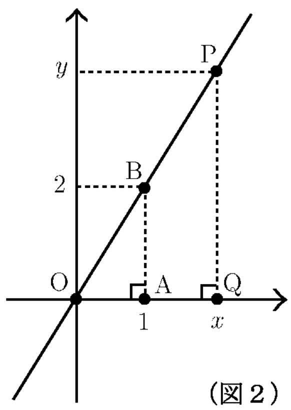


（図１）

逆に この直線上の任意の点を (x, y) とすれば x 座標と y 座標の間に $y = 2x$ の関係がある。この直線を関数 $y = 2x$ の **グラフ** という。

一般に x と y の関係式を満足する x, y を座標とする点 (x, y) を集めたものを、その関係式のグラフという。１次関数のグラフは直線になる。

問　上の例の下線部分を確かめたい。
この直線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし、 A, B, Q, O の座標を $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2)$, $\mathrm{Q}(x, 0)$, $\mathrm{O}(0, 0)$ とする。（ただし x は正の数とする）



（図２）

(1)　次の各線分の長さを求めよ。（単位不用）

$\mathrm{OA} =$ 　　, $\mathrm{AB} =$ 　　, $\mathrm{OQ} =$ 　　, $\mathrm{QP} =$

(2)　三角形 OAB と三角形 OQP は相似だから

$$\mathrm{QP} : \mathrm{OQ} = \mathrm{AB} : \mathrm{OA}$$

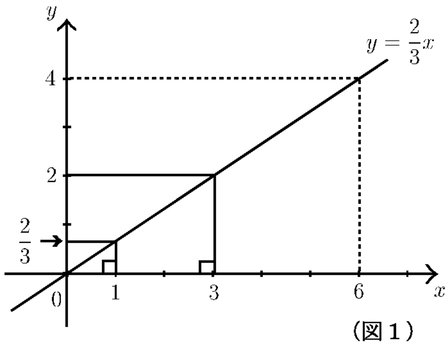
この式を x, y を用いた分数で表せ。

(3)　y を x で表せ。

＜ 1 次関数のグラフ 2 ＞

例 1　1 次関数 $y = \dfrac{2}{3}x$ のグラフは図 1 のような原点を通る直線である。このグラフは x が 3 増加すると y が 2 増加する。x が 1 増加すると y は $\dfrac{2}{3}$ 増加する。この増加率 $\dfrac{2}{3}$ をこの直線の **傾き** という。

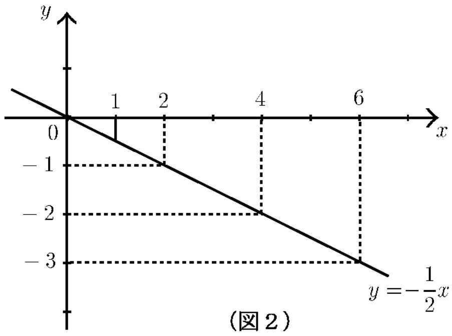
$$\text{傾き} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$



（図 1）

例 2　1 次関数 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフは図 2 のような原点を通る直線である。このグラフは x が 2 増加すると y が 1 減少する。これを y の増加量が -1 と考える。この直線の傾きは

$$\text{傾き} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$



（図 2）

問 1　図 3 の 2 つの直線①と②はある 1 次関数のグラフである。関数の式と傾きを書け。

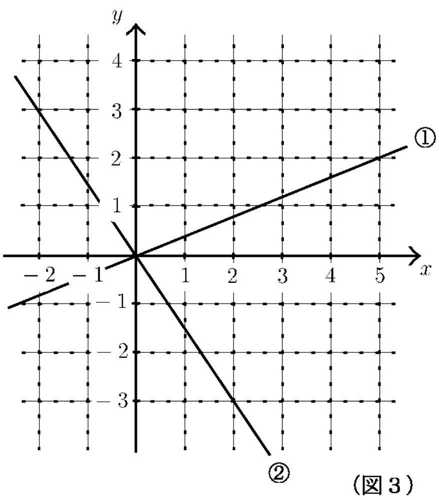
直線①：式　　　　　　，傾き

直線②：式　　　　　　，傾き

問 2　次の 1 次関数のグラフを図 3 の中に書け。

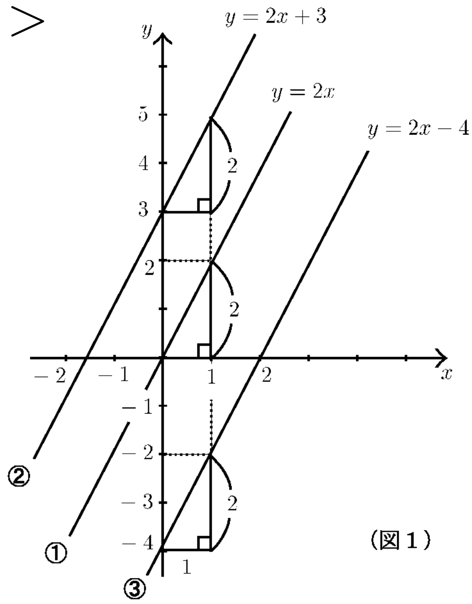
(1) $y = x$　　　，(2) $y = 2x$

(3) $y = -\dfrac{2}{3}x$



（図 3）

＜１次関数のグラフ３＞



（図１）

例　１次関数

① $y=2x$

② $y=2x+3$

③ $y=2x-4$

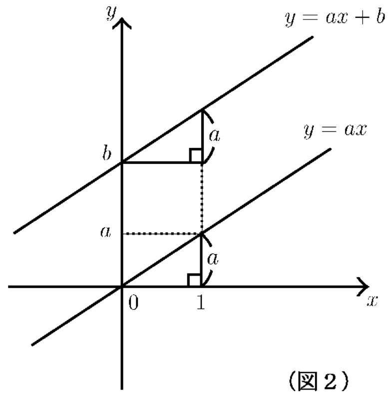
のグラフは図１のような直線で、全て傾きが２である。②は①を y 軸方向に３だけ平行移動したものであり、③は①を y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである。

直線と y 軸との交点の y 座標を y **切片** という。例の②の y 切片は３であり、③の y 切片は -4 である。

一般に１次関数

$$y=ax+b$$

のグラフは図２のように傾き a 、y 切片 b の直線である。

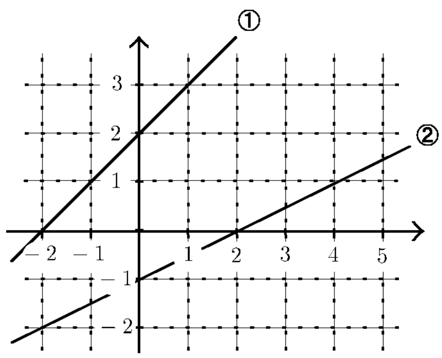


（図２）

問１　図３の２つの直線①と②はある１次関数のグラフである。１次関数の式を書け。

①

②



（図３）

問２　次の１次関数のグラフを図３の中に書け。

(1) $y=x-1$

(2) $y=-\dfrac{2}{3}x+2$

(3) $y=3x-2$

＜１次関数のグラフ４＞

例１　１次関数

$$y = 2(x-3)$$

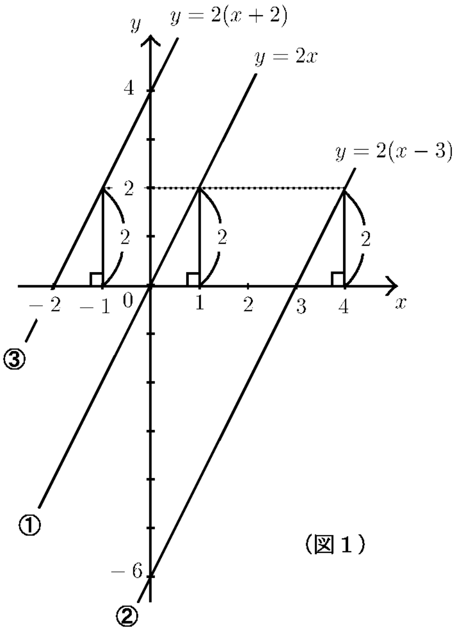
のグラフは図１の直線②である。

$$x = 3 \text{ のとき } y = 0$$

となる。②は $y = 2x$ のグラフ①を x 軸方向に３だけ平行移動したものである。x 軸と直線との交点の x 座標を x **切片** という。②の x 切片は３である。また

$$y = 2(x-3) = 2x-6$$

より y 切片は -6 である。



（図１）

例２　１次関数

$$y = 2(x+2)$$

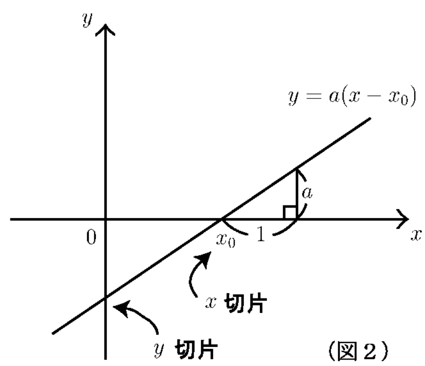
のグラフは図１の直線③である。この式から x 切片を見つけるには以下のようにする。x 軸は y 座標が 0（ゼロ）なので、$y = 0$ とおくと

$$y = 0 \Rightarrow 2(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

より x 切片は -2 である。また

$$y = 2(x+2) = 2x+4$$

より y 切片は 4 である。



（図２）

一般に１次関数

$$y = a(x - x_0)$$

のグラフは、傾きが a 、x 切片が x_0 の直線上である（図２）。

問　次の１次関数のグラフの傾き、x 切片、y 切片を求めよ。

(1) $y = 2(x-5)$　　(2) $y = -(x-1)$

(3) $y = 3x+6$　　(4) $y = -5x-10$

＜ 1 次関数のグラフ 5 ＞

例 1 次関数

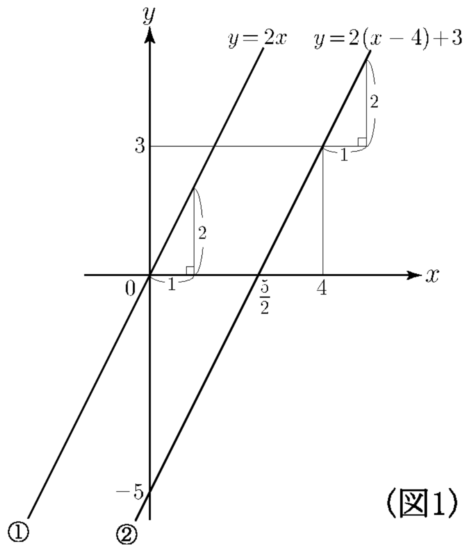
$$y = 2(x-4)+3$$

を考える。このグラフは
$x=4$ のとき $y=3$
だから点 (4,3) を通る
直線である。(図 1)

$$y = 2(x-4)+3$$
$$= 2x-5$$

より y 切片は -5 である。
x 切片を求めるには $y=0$
とおく。

$$y=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$



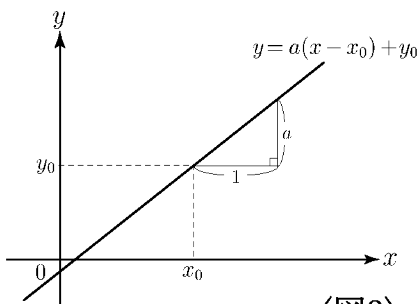
(図1)

このグラフは図 1 の直線②である。②は $y=2x$ のグラフを
x 軸方向に 4、y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。
このグラフは <u>点 (4,3) を通り、傾き 2 のグラフ</u> である。

一般に 1 次関数

$$y = a(x-x_0)+y_0$$

のグラフは、点 (x_0, y_0) を通り、
傾き a の直線である。(図 2)



(図2)

問 1 次の直線を表す関数の式を求めよ。

(1) 点 $(1,-2)$ を通り、傾き 5 の直線　　(2) 点 $(-2,0)$ を通り、傾き -3 の直線

問 2 次の関数のグラフの x 切片、y 切片、傾きを求めよ。

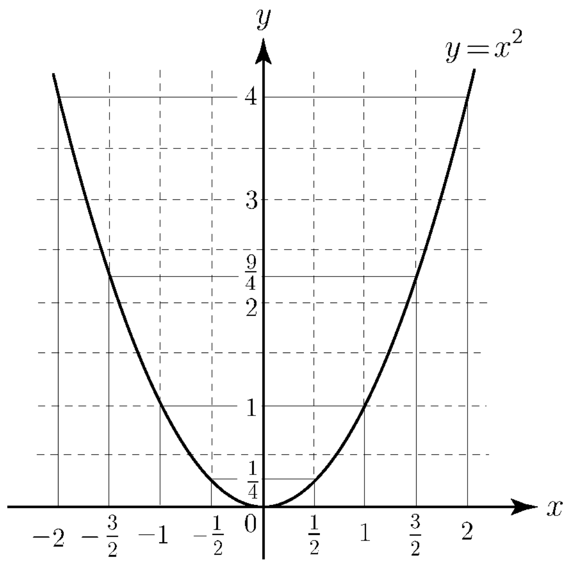
(1) $y=3(x+1)-4$　　(2) $y=-2(x-1)+5$

＜２次関数のグラフ１＞

例１　2 次関数 $y = x^2$ のグラフを書きたい。

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

表より、このグラフは点 $(-2, 4)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(2, 4)$ を通る。これらの点をつないだ曲線が図 1 の曲線である。この曲線が $y = x^2$ のグラフである。



（図1）

問１　次の空欄をうめ、その関数のグラフを図 1 の中に書け。

(1) $y = 2x^2$

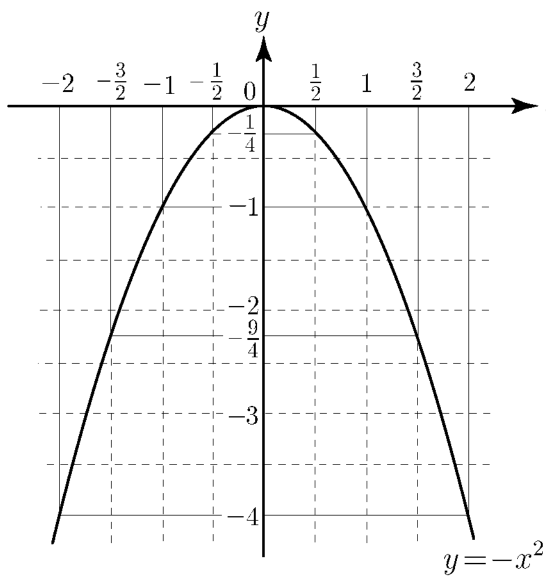
x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y					

(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

例２　2 次関数 $y = -x^2$ のグラフは表より図 2 の曲線になる。

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4



（図2）

問２　次の空欄をうめ、その関数のグラフを図 2 の中に書け。

(1) $y = -4x^2$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y					

(2) $y = -\dfrac{1}{4}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

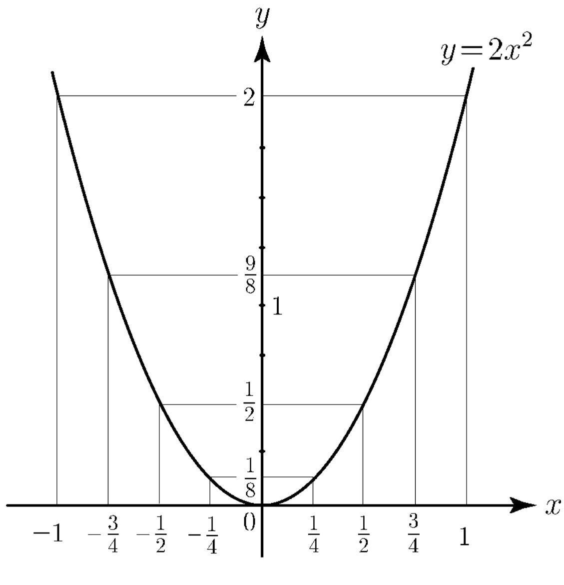
< 2次関数のグラフ2 >

例 前ページの問 1 で、2 次関数 $y = x^2$ と $y = 2x^2$ のグラフを同じ座標平面に描いた。
2 つのグラフは一見ちがう曲線に見えるが、実は相似である。

< $y = 2x^2$ (x と y との対応表) >

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2

表より $y = 2x^2$ のグラフの原点ちかくを 2 倍に拡大 (ズームイン) したグラフ (図 1) は $y = x^2$ のグラフ (図 3) と同じ曲線である。

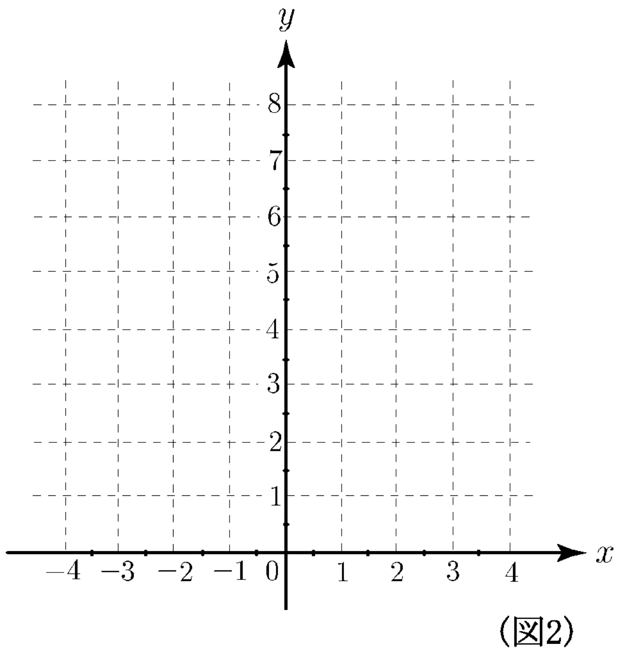


(図1)

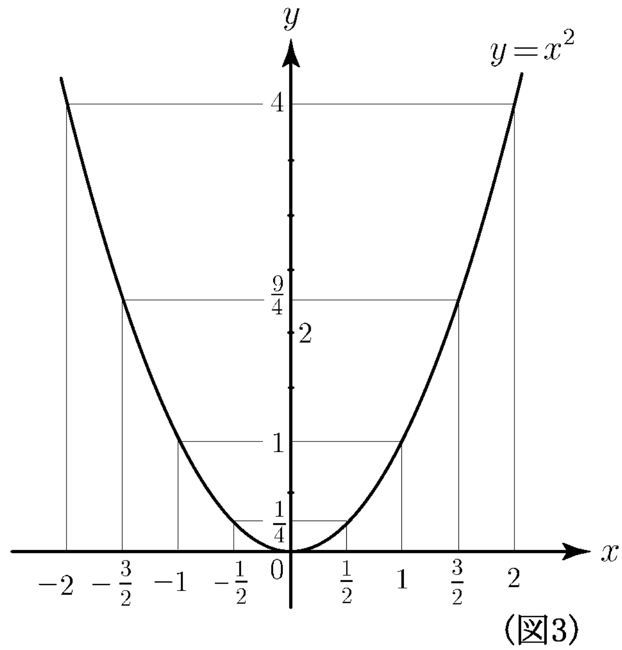
問 右の $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の対応表を完成し、図 2 の中に $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを描け。

< $y = \dfrac{1}{2}x^2$ (x と y との対応表) >

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									



(図2)



(図3)

＜ 2 次関数のグラフ 3 ＞

前ページの結果から $y=x^2, y=2x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフは相似であることがわかる。23 ページの例より $y=x^2$ と $y=-x^2$ のグラフは上下が反対になっているだけであり、図形として同じ曲線である。また $y=-x^2, y=-4x^2, y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフも相似な曲線である。従って 2 次関数

$$y=x^2\ ,\quad y=2x^2\ ,\quad y=\frac{1}{2}x^2\ ,\quad y=-x^2\ ,\quad y=-4x^2\ ,\quad y=-\frac{1}{4}x^2$$

のグラフは全て相似な曲線である。これらの曲線を**放物線**という。それは物を投げたときの物体の軌道がこのような曲線になるからである。

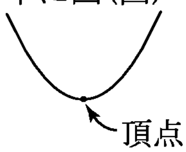
$y=-x^2, y=-4x^2, y=-\frac{1}{4}x^2$ などのグラフを**上に凸**または単に**凸**という (図 1)。このようなグラフで y 座標が最大になる点を、この放物線の**頂点**という。

$y=x^2, y=2x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ などのグラフを**下に凸**または単に**凹**という (図 2)。このグラフで y 座標が最小になる点を (同様に) 頂点という。

上に凸 (凸)

(図 1)

下に凸 (凹)



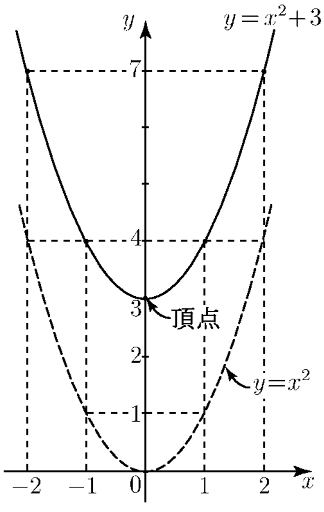
(図 2)

例　2 次関数

$$y=x^2+3$$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
y	7	4	3	4	7

のグラフは表より図 3 のような、下に凸の放物線で頂点の座標は $(0,3)$ である。このグラフは $y=x^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。



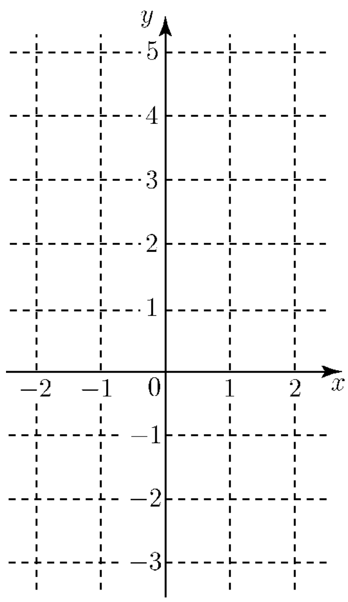
(図 3)

問

次の 2 次関数のグラフを図 4 の中に書き、頂点の座標を求めよ。

(1)
$y=-x^2+4$

(2)
$y=2x^2-3$

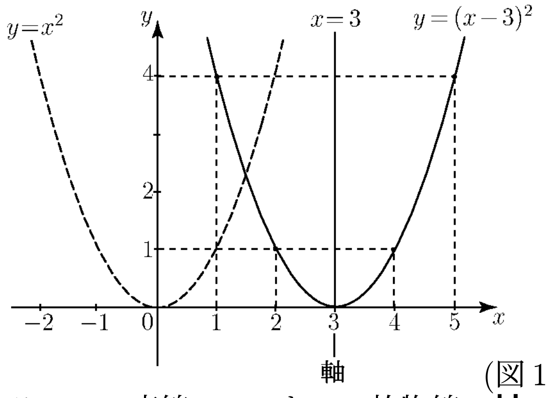


(図 4)

＜2次関数のグラフ4＞

例 2次関数 $y=(x-3)^2$ を考える。x と y との対応表

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	4	1	0	1	4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	4	1	0	1	4



(図 1)

より、グラフは図 1 のような放物線になる。この曲線は $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したものであり、頂点の座標は $(3,0)$ である。この曲線は y 軸に平行な (x 座標が 3 である) 直線 $x=3$ に関して左右対称である。この直線 $x=3$ をこの放物線の**対称軸**または単に**軸**という。

(注)

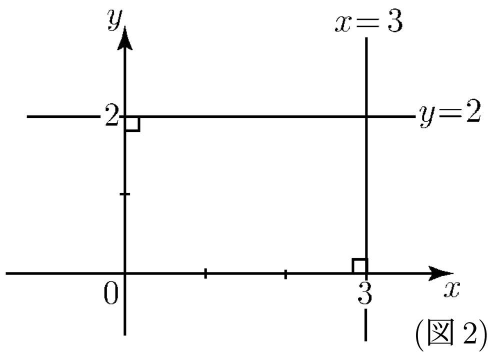
傾き a 、y 切片 b の直線の式 $y=ax+b$ で $a=0, b=2$ のときは

$$y=2$$

になる。これは y 切片が 2 で、傾き 0(x 軸に平行) の直線 (図 2) を意味する。同様にして

$$x=3$$

は y 軸に平行で x 切片が 3 の直線を意味する。



(図 2)

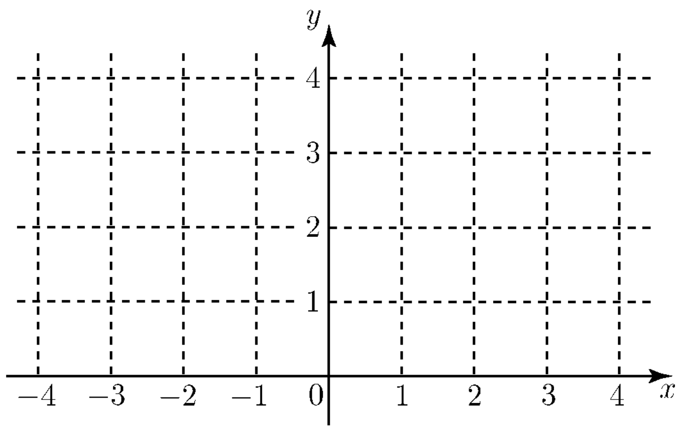
問 次の 2 次関数の対応表とグラフを書き、頂点の座標と軸の式を求めよ。

(1) $y=(x+2)^2$

x	-4	-3	-2	-1	0
y					

(2) $y=(x-2)^2$

x	0	1	2	3	4
y					



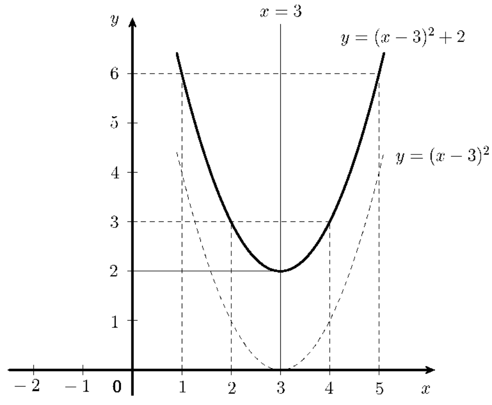
＜ 2次関数のグラフ5 ＞

例　2 次関数 $y = (x-3)^2 + 2$ を考える。

対応表

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	4	1	0	1	4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(x-3)^2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	4	1	0	1	4
y	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	6	3	2	3	6

表よりこのグラフは頂点 (3 , 2)、軸 $x = 3$ の下に凸な放物線 (図 1) である。このグラフは $y = (x-3)^2$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。



(図 1)

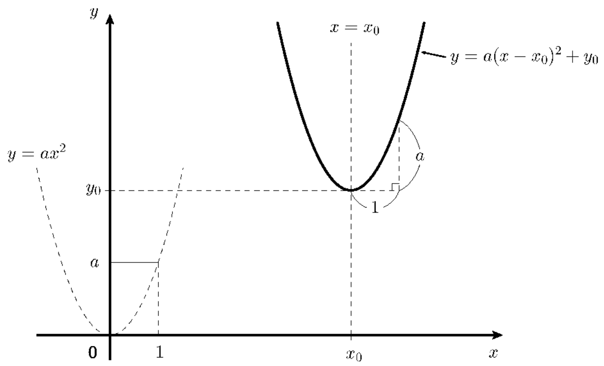
一般に 2 次関数

$$y = a(x-x_0)^2 + y_0$$

のグラフは $y = ax^2$ のグラフを

$$\begin{cases} x \text{ 軸方向に } x_0 \\ y \text{ 軸方向に } y_0 \end{cases}$$

だけ平行移動したものである。
その頂点は $(x_0\ ,\ y_0)$ で軸は $x = x_0$ である。$a > 0$ のときは図 2 のようなグラフになる。



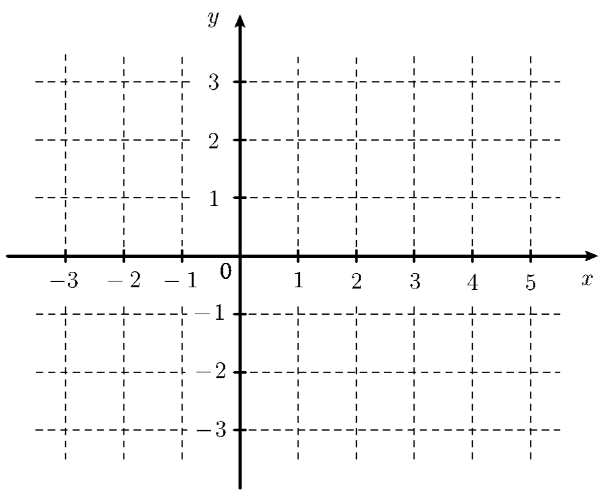
問　次の 2 次関数の対応表とグラフを書き、頂点と軸を求めよ。

(1) $y = -(x-3)^2 + 2$

x	1	2	3	4	5
y					

(2) $y = (x+1)^2 - 2$

x	-3	-2	-1	0	1
y					



＜2次関数のグラフ6＞

例1　2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフを書きたい。

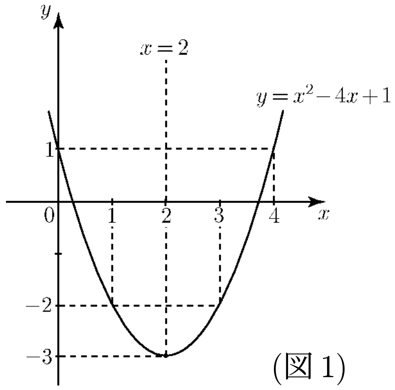
$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

より

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$$

であるから頂点 $(2, -3)$、軸 $x = 2$ の放物線である。(図1)

$x = 0$ のとき $y = 1$ より y 切片は1である。

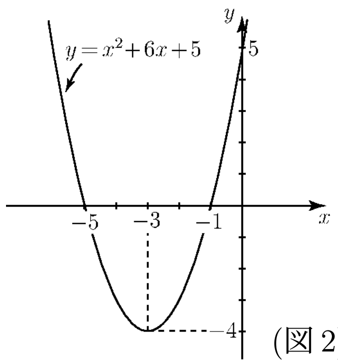


(図1)

例2　$y = x^2 + 6x + 5$
$= (x+3)^2 - 4$

より、頂点 $(-3, -4)$ の放物線である。(図2)

$x = 0$ のとき $y = 5$ より y 切片は5。



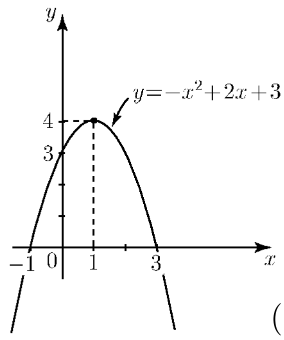
(図2)

例3　$y = -x^2 + 2x + 3$
$= -(x-1)^2 + 4$

より、頂点 $(1, 4)$ の放物線である。(図3)

$x = 0$ のとき $y = 3$ より y 切片は3。

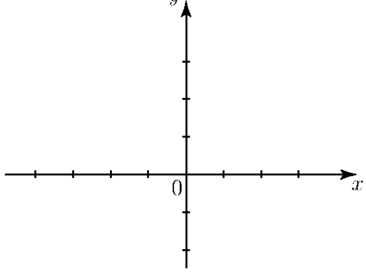
(注) 放物線のグラフを書くときは、まず頂点の位置をはっきりわかるように書くこと。その次に頂点以外に通る点を少なくとも1点は書いておくこと。普通は y 切片 (y 軸との交点) を書く。



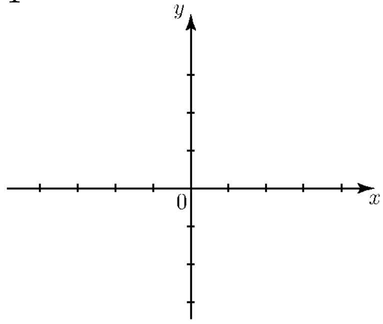
(図3)

問　次の放物線の頂点を求め、グラフを書け。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$



(2) $y = -x^2 + 2x + 1$



＜ 2次関数のグラフ7 ＞

x についての 2 次式が 27 ページのような形のとき**標準形**といい、
展開して降べきの順に並べた形のものを**一般形**という。

2次式の標準形	2次式の一般形
$a(x-x_0)^2+y_0$	ax^2+bx+c

一般形で表された 2 次式を標準形にすることができる。

$$ax^2+bx+c=a\{x^2+\frac{b}{a}x\}+c=a\{x^2+2\times\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2\}+c$$
$$=a\{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}\}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

よって一般形で表された 2 次関数

$$(*)\quad \boxed{y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}}$$

のグラフは、頂点 $(-\frac{b}{2a}\ ,\ c-\frac{b^2}{4a})$、軸 $x=-\frac{b}{2a}$ の放物線である。

24, 25 ページより「$y=ax^2$ のグラフは全て $y=x^2$ のグラフと相似」である。

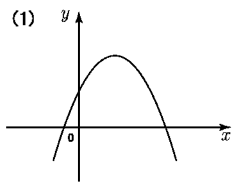
$(*)$ 式から「$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したもの」であることがわかる。従って「全ての 2 次関数のグラフは $y=x^2$ のグラフと相似」である。一般に 2 次関数のグラフは**放物線**と呼ばれる。

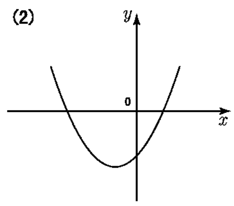
つまり全ての放物線は相似である。

例 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図の場合を考える。

(1) の場合 上に凸だから $a<0$
軸 $x=-\frac{b}{2a}>0$ より $b>0$
y 切片 は c だから $c>0$

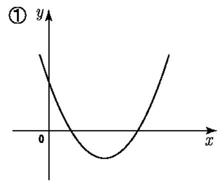
(2) の場合は $a>0$, $b>0$, $c<0$

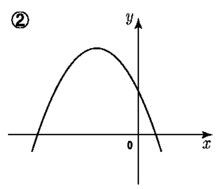




問 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図の①、②の場合に、a , b , c の符号を例のように答えよ。

① ②





< 数が表すもの >

1 個の数が表すものは数量や順位などであるが、2 個以上の数を組み合わせると図形などを表すことができる。

例 1<1 個の数で表されるもの >

(1) 1 番目、2 番目、3 番目などの**順位**

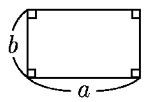
(2) 長さ、面積、体積、質量などの**量**

(3) 温度、速度、加速度などの**符号のついた量**

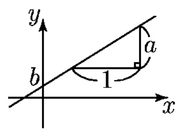
例 2<2 個の数で表されるもの >$\cdots$ 2 個の数を a と b とする

(1) 平面上の**点の位置** = 座標 (a, b)

(2) 横 a、縦 b の**長方形**



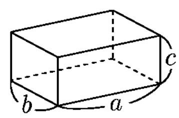
(3) 傾き a、y 切片が b の**直線**



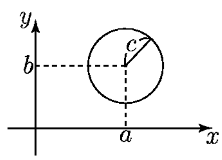
例 3<3 個の数で表されるもの >$\cdots$ 3 個の数を a, b, c とする

(1) 空間の**点の位置** = 空間座標 (a, b, c)

(2) 横 a、縦 b、高さ c の**直方体**



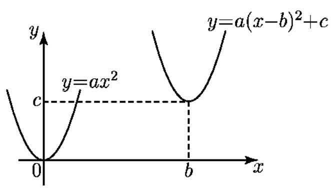
(3) 中心の座標が (a, b) で半径 c の**円**



(4) **放物線**

① $y = ax^2 + bx + c$ (一般形)

② $y = a(x - b)^2 + c$ (標準形)



などである。このように図形を数で表現することができるので、数値を計算することにより図形の問題を解くことが可能になる。さらに 4 個以上の数を組み合わせると、図形の**変形** (回転、折り返し) なども表現することができる。

＜数列の極限 1 ＞

項がかぎりなく続く数列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ \cdots$$

を**無限数列**という。この無限数列において、a_n を第 n 項または一般項といい、上の無限数列を、単に $\{a_n\}$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ の極限のようす、つまり n をかぎりなく大きくしていくとき、項 a_n の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

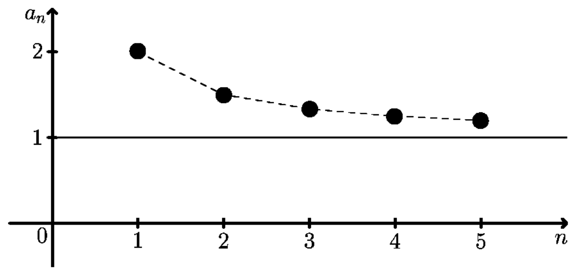
n をかぎりなく大きくすることを、$n \to \infty$ と表す。

（注） 記号 ∞ は「無限大」と読む。

例 1 数列

$$\frac{2}{1}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n+1}{n}\ ,\ \cdots$$

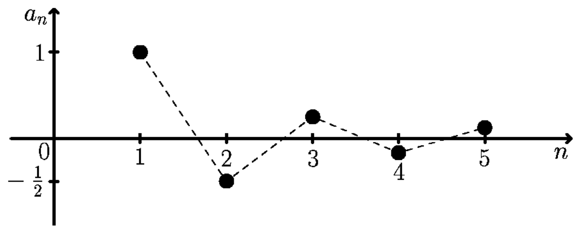
の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \dfrac{n+1}{n}$ の値は減少しながら、1 にかぎりなく近づいていく。



例 2 数列

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \cdots\ ,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ ,\ \cdots$$

の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ の値は増減を繰り返しながら、0 に限りなく近づいていく。



問 次の数列の極限の様子を調べよ。

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{2n-1}{2n}\ ,\ \cdots$$

＜数列の極限2＞

無限数列 $\{a_n\}$ において、$n \to \infty$ のとき、a_n の値が一定の数 α に限りなく近づく場合に $\{a_n\}$ は α に **収束する** といい、

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という。

例1　前ページの例より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

例2　$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{n} \to 0$ であるから、グラフを見なくても

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\dfrac{1}{n}} = \frac{3}{2+0} = \frac{3}{2}$$

等がわかる。

例3　$n \to \infty$ のとき $\dfrac{2}{n} \to 0,\ \dfrac{1}{n^2} \to 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

問.　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} =$

(2)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n+3n^2}{5-6n^2} =$

＜数列の極限3＞

数列には、一定の値に収束しないものがある。数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、 $\{a_n\}$ は**発散する**という。

例1　数列　$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$

を考える。$n \to \infty$ のとき、$a_n = n^2$ は限りなく大きくなる。

例1のようなとき、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**といい、

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$　(又は $a_n \to +\infty$)

または　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　(又は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$)　と表す。

例2　数列　$2,\ 0,\ -2,\ \cdots,\ 4-2n,\ \cdots$

を考える。　$n \to \infty$ のとき、$a_n = 4-2n$ は負の値をとりながら、
その絶対値は限りなく大きくなる。

例2のようなとき、数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい、

$n \to \infty$ のとき $a_n \to -\infty$

または　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

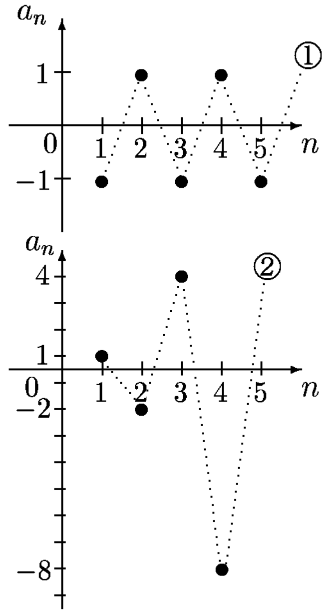
と表す。例2の場合は、　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4-2n = -\infty$　となる。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2+n+1)$　$=$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-n^3)$　$=$

＜数列の極限４＞



例１　次のような数列も発散する数列である。

① $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n, \cdots$

② $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1}, \cdots$

数列①、②では n を限りなく大きくしても、一定の値に収束しないし、正の無限大にも、負の無限大にも発散しない。このような数列は**振動する**という。

発散する数列 $\{a_n\}$ は次のような場合がある。

(1)　正の無限大に発散 $\cdots\cdots\cdots$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(2)　負の無限大に発散 $\cdots\cdots\cdots$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(3)　振動する

例２

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -\left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty$

(4)　数列

$$-\frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \cdots, \left(-\frac{4}{3}\right)^n, \cdots$$

は振動する。

問　次の数列の極限を調べ、例２のように答えよ。

(1) $\displaystyle\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \cdots, \left(\frac{3}{2}\right)^n, \cdots$

(2) $\displaystyle\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \cdots$

(3) $\displaystyle-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots, \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \cdots$

(4) $\displaystyle-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \cdots, \left(-\frac{3}{2}\right)^n, \cdots$

(5) $\displaystyle-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, -\frac{81}{16}, \cdots, -\left(\frac{3}{2}\right)^n, \cdots$

< 無限級数 >

無限級数 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

を**無限級数**という。数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第 n 項までの**部分和**という。部分和を作る数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

が収束して、その極限値が S (つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = $) のとき、無限級数 (1) は S に**収束する**といい、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、 S を**無限級数の和**という。

例　無限級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分和を S_n とすると

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} \\
-\big) & \dfrac{1}{2}S_n = & \qquad \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \\
\hline
 & \dfrac{1}{2}S_n = & \dfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{1}{2^{n+1}}
\end{array}$$

より

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ だから

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(注)　この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を**無限等比級数**という。

問　次の無限級数の和 S を求めよ。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

< 循環小数 >

例 1 $\dfrac{1}{3}$ を小数にすると、$\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots$ であり、3 が無限に続く。

$\dfrac{4}{11}$ を小数にすると、$\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots$ であり、3 と 6 が無限に続く。

このように同じ数が無限に繰り返される小数を**循環小数**という。

繰り返される最初と最後の数の上にドット (黒丸) を付けて表す。
例えば、

$$0.333\cdots = 0.\dot{3} \quad , \quad 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$$

$$0.5123123123123\cdots = 0.5\dot{1}2\dot{3}$$

等で表す。

例 2 循環小数は分数で表される。例えば $0.\dot{1}\dot{2} = S$ とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 0.\dot{1}\dot{2} = 0.121212\cdots \\ &= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots \\ &= 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots \end{aligned}$$

のような無限等比級数となる。第 n 項までの部分和を S_n とおくと、

$$S_n = 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$-)\ \ \frac{1}{100}S_n = 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}$$

$$\frac{99}{100}S_n = 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) - 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}$$

より $S_n = \dfrac{12}{99} - \dfrac{12}{99} \times \left(\dfrac{1}{100}\right)^n$ である。$n \to \infty$ のとき、$\left(\dfrac{1}{100}\right)^n \to 0$

より

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{12}{99} - \frac{12}{99} \times \left(\frac{1}{100}\right)^n \right\} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

問 次の循環小数を分数になおせ。

$S = 0.\dot{1} = 0.111\cdots$

＜関数の値＞

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例 1 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \qquad \bigl(f(\square) = \square + 5 \times \square - 4 \bigr)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 2^3 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問 1 $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(2) =$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$, $f(1) =$, $f(2) =$, $f(3) =$

(3) $f(x) = x^4 - x^3$, $f(-3) =$, $f(0) =$, $f(3) =$

(4) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(5) =$

例 2 $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 + 3(1 + h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h)$$

問 2 $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a + h)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^3$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

(2) $f(x) = x + 1$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

(3) $f(x) = 2x^2 - 5$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

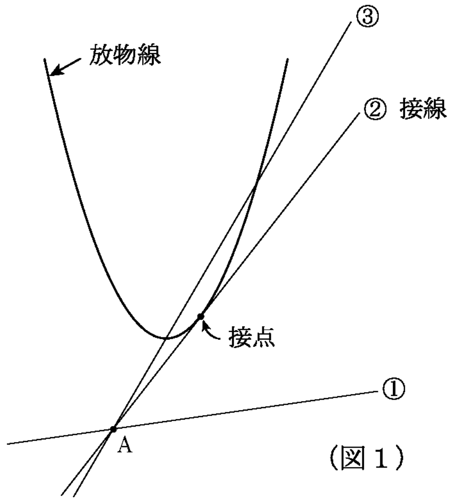
(4) $f(x) = x^2 + 3x$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

< 接線 >

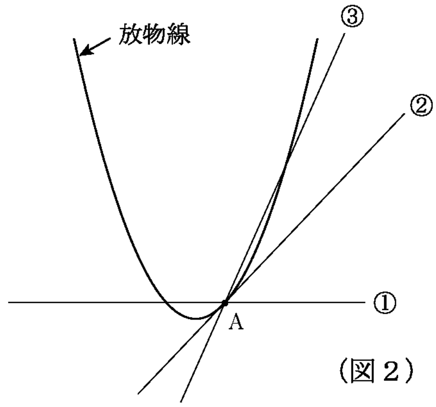
放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると、

①:交点なし
②:交点は 1 個
③:交点は 2 個

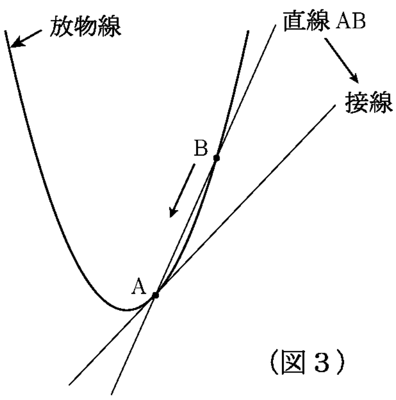
となる。直線②を**接線**といい、そのときの交点を**接点**という。
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線②が接線であり、点 A が接点である。



（図 1）



（図 2）



（図 3）

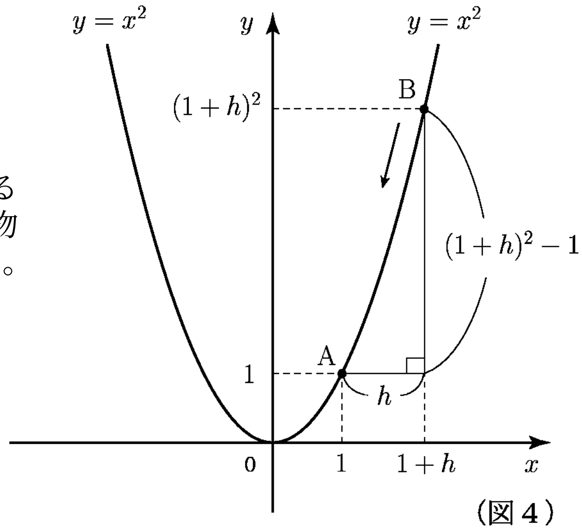
図 2 の接線②を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y = x^2$ 上の点 A $(1\,,1)$ を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(\ 1+h\,,(1+h)^2\ )$ とする (図 4)。

(1) 直線 AB の傾きを h で表せ。

(2) $h = 0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。

(3) $h = 0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。



（図 4）

< 関数の極限 1 >

前ページの問の結果より、放物線 $y=x^2$ 上の点 A(1,1) と
B$(1+h\ ,\ (1+h)^2)$ に対し、直線 AB の傾きは

$$\text{直線 AB の傾き } = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

となる。ここで

$$h = 0.1 \text{ のとき AB の傾き } = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = 0.01 \text{ のとき AB の傾き } = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \text{ のとき AB の傾き } = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \text{ のとき AB の傾き } = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.0001$$

となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。
このことを記号→を使って

(1) $\quad h \to 0$ のとき 直線 AB の傾き $\to$ 2

とか

(2) $\quad h \to 0$ のとき $\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h \ \to\ 2$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の**極限値**
または単に**極限** (limit) という。(2) を記号 lim を使って次のように書く。

(3) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

例 (1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-25}{h}$

< 関数の極限2 >

例 1 (1) $h \to 0$ のとき $3h \to 0$ である。つまり $\lim_{h \to 0} 3h = 0$

(2) $h \to 0$ のとき $(2+h)(3+h) \to 6$ つまり $\lim_{h \to 0}(2+h)(3+h) = 6$

（注）(1) は $\lim_{h \to 0} 3h = 3 \times 0 = 0$, (2) は $\lim_{h \to 0}(2+h)(3+h) = (2+0) \times (3+0) = 6$

と考える。このように $h \to 0$ の極限値は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合、$\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h}$ の式で $h = 0$ を代入

すると $\dfrac{0}{0}$ の形で答がわからないので、$\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h)$

の形になおしてから $h = 0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} = \lim_{h \to 0}(6+3h) = 6$

(2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h} - \lim_{h \to 0} \dfrac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \to 0}(12 + 6h + h^2) = 12$

（注）ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いた。

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{5(1+h)^2 - 5}{h}$ (2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3(2+h)^2 - 12}{h}$

(3) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1}{h}$ (4) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^3 - 27}{h}$

例 3 (1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{5(a+h) - 5a}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{3(a^2 + 2ah + h^2) - 3a^2}{h} = \lim_{h \to 0}(6a + 3h) = 6a$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3(a+h) - 3a}{h}$ (2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h}$

(3) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

＜ 関数の極限3 ＞

関数 $f(x)$ において、x が a 以外の値を取りながら、a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づくことを、

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と表し、α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。a に近づく変数は x 以外でもよい。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 5} \left(x^2 - 3x\right) = 10, \quad \lim_{x \to 1} \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{h+3}{2h+1} = 3$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

例 3 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{5x - 3}{x - 1} =$

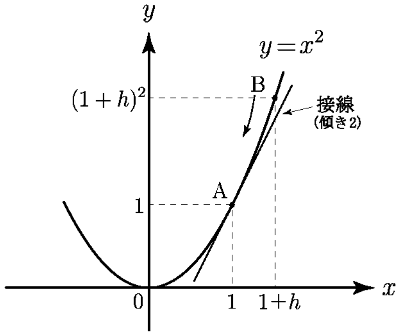
(2) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} =$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} =$

(4) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} =$

＜ 接線の傾き ＞

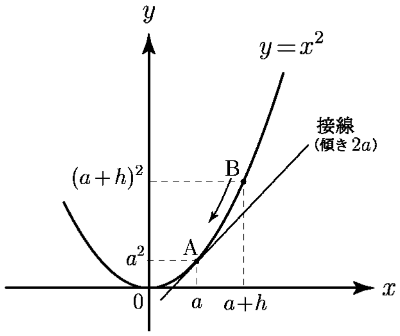
例1 放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(1,1)$ における接線の傾きは、放物線上の点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限と考えられる (31 ページ参照)。点 B の座標を B$\big(1+h,(1+h)^2\big)$ とすれば 32 ページより



$$\text{接線の傾き}=\lim_{h\to0}(\text{直線 AB の傾き})=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=2$$

となる。

例2 放物線 $y=x^2$ 上の点 A(a,a^2) における接線の傾きを求めたい。右図の点 B の座標を B$\big(a+h,(a+h)^2\big)$ とすると、



$$\text{直線の傾き}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

となる。点 B を点 A に近づけると、$h\to0$ となるので

$$\text{接線の傾き}=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to0}(2a+h)=2a$$

となる。

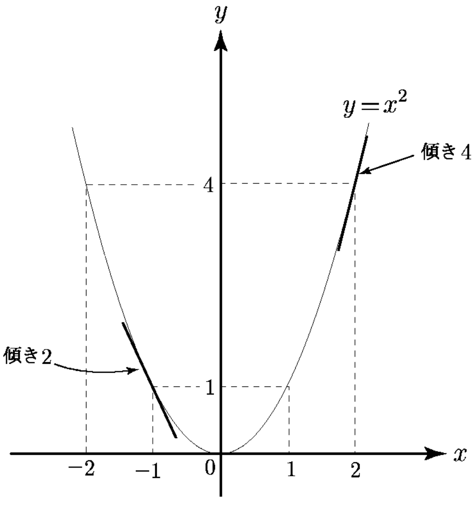
例3 例 2 の結果から放物線 $y=x^2$ 上の点 A(a,a^2) における接線の傾きは $2a$ である。

(1) $a=2$ のとき点 $(2,4)$ における接線の傾きは

$$2a=2\times2=4$$

(2) $a=-1$ のとき点 $(-1,1)$ における接線の傾きは

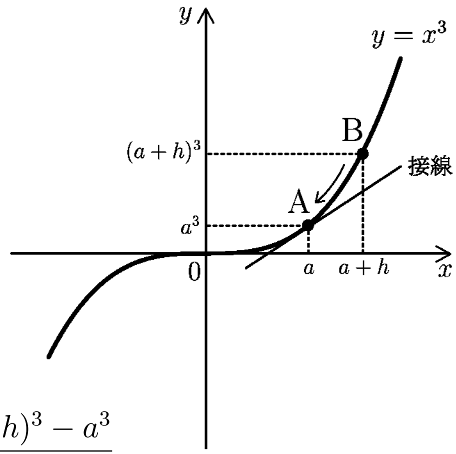
$$2a=2\times(-1)=-2$$



問 放物線 $y=x^2$ 上の点 A が以下の場合に、点 A における接線の傾きを求めよ。

(1) A$(5,25)$　　(2) A$(0,0)$　　(3) A$(-3,9)$

＜微分係数１＞

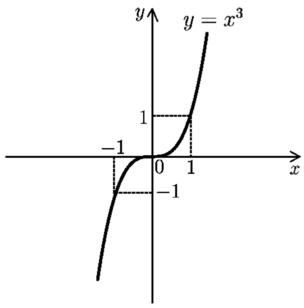


例１ 3 次関数 $y = x^3$ のグラフは右図のような曲線である。この曲線上の点 $\mathrm{A}(a\ ,\ a^3)$ を接点とする接線を求めたい。この曲線上に A 以外の点 B をとり、点 B を点 A に近づけたとき直線 AB の傾きが接線の傾きに近づく。点 B の座標を $\mathrm{B}(a+h\ ,\ (a+h)^3)$ とすると

$$\text{直線 AB の傾き} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$$

であり、33 ページの結果より

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} =$$



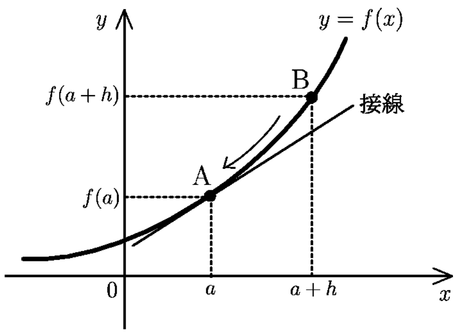
問１ 例 1 の結果より、曲線 $y = x^3$ 上の点 $\mathrm{A}(a\ ,\ a^3)$ における接点の傾きは $3a^2$ である。点 A が以下の場合に接線の傾きを求めよ。

(1) $\mathrm{A}(1, 1)$　(2) $\mathrm{A}(0, -0)$　(3) $\mathrm{A}(-1, -1)$

一般の関数 $y = f(x)$ のグラフは座標平面上の曲線になる。この曲線上の点 $\mathrm{A}(a\ ,\ f(a))$ における接線の傾きは、

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

となる。この極限値を $f'(a)$ と書き、関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**という。



$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$
（微分係数）

問２ 前ページ例 2 及びこのページの例 1 の結果を使って次を求めよ。

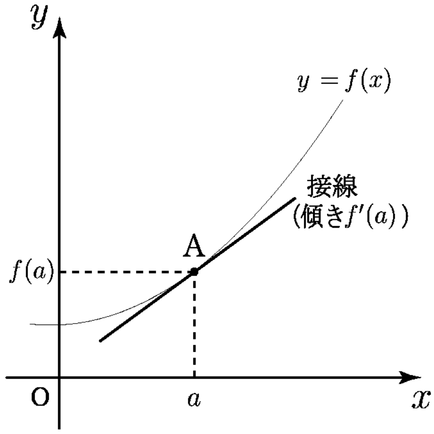
(1) $f(x) = x^2$ のとき $f'(a) =$　(2) $f(x) = x^3$ のとき $f'(a) =$

＜微分係数2＞

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における
接線の傾きは

$$\boxed{f'(a) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$ （微分係数）

であり、これを $x=a$ における $f(x)$ の微分係数という。



例1　$f(x) \;=\; 5x^2$ のとき

$$f(a) \;=\; 5a^2 \quad , \quad f(a+h) \;=\; 5(a+h)^2$$

より

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(a+h)^2-5a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{5(a^2+2ah+h^2)-5a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{10ah+5h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(10a + 5h) = 10a \end{aligned}$$

例2　$f(x) \;=\; x^2-4x$ のとき

$$f(a) \;=\; a^2-4a \quad , \quad f(a+h)=(a+h)^2-4(a+h)$$

より

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-4(a+h)-(a^2-4a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-4a-4h-a^2+4a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-4h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2a + h - 4) = 2a - 4 \end{aligned}$$

問　$f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を求めよ。

(1)　$f(x) \;=\; 7x^2$,　$f'(a) \;=$

(2)　$f(x) \;=\; x^2+2x$,　$f'(a) \;=$

(3)　$f(x) \;=\; x^2-2x$,　$f'(a) \;=$

＜ 導関数１ ＞

例 $f(x) = x^2 - 4x$ のとき、微分係数 $f'(a)$ は前ページ例２より

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a - 4$$

であった。$f'(a) = 2a - 4$ は $x = a$ における接線の傾きを意味する。

$f'(0) = 2\times 0 - 4 = -4 \ \Rightarrow\ x = 0$ における傾きは -4
$f'(1) = 2\times 1 - 4 = -2 \ \Rightarrow\ x = 1$ における傾きは -2
$f'(2) = 2\times 2 - 4 = 0 \ \Rightarrow\ x = 2$ における傾きは 0
$f'(3) = 2\times 3 - 4 = 2 \ \Rightarrow\ x = 3$ における傾きは 2
$f'(4) = 2\times 4 - 4 = 4 \ \Rightarrow\ x = 4$ における傾きは 4

このように $f'(a)$ は a の値によって変わる。$f'(a)$ を a の関数と考え、a を x でおきかえた

$$f'(x) = 2x - 4$$

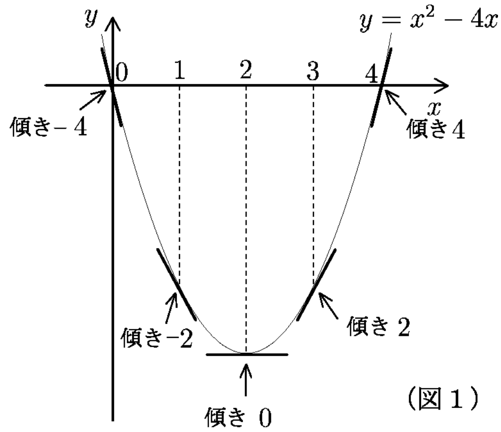
を、関数 $f(x)$ の**導関数**という。

元の関数 $f(x)$ のグラフ (図1) の傾きを表すのが導関数 $f'(x)$ である。

$$\boxed{y = x^2 - 4x \text{ の導関数を } y' = 2x - 4}$$

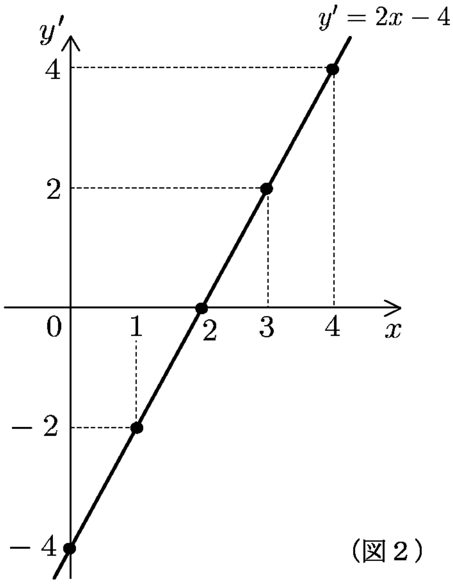
とも書く（図２）。

＜元の関数 $f(x) = x^2 - 4x$ ＞



（図１）

＜導関数 $f'(x) = 2x - 4$ ＞



（図２）

一般の関数 $f(x)$ に対し、$x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を a の関数とみて、a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \quad \bigl(f(x) \text{ の導関数}\bigr)$$

を $f(x)$ の導関数という。

問 36 ページ、37 ページの結果を利用して、$f(x)$ が以下の場合の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2$ のとき $f'(x) =$

(2) $f(x) = x^3$ のとき $f'(x) =$

(3) $f(x) = 7x^2$ のとき $f'(x) =$

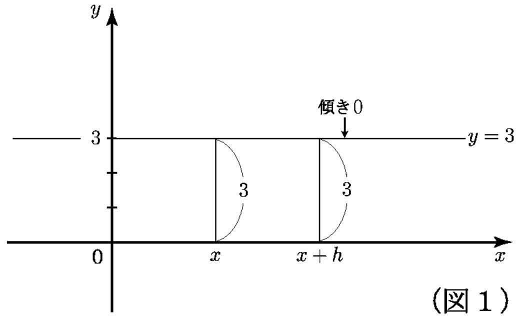
(4) $f(x) = x^2 + 2x$ のとき $f'(x) =$

< 導関数2 >

例 1　$f(x) = 3$ のとき $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

である。このように関数 $f(x)$ が x によらない数である場合を**定数関数**という。定数関数のグラフは図 1 のように傾きが 0 (ゼロ) の直線である。



（図 1）

例 2　$f(x) = 2x - 1$ のとき

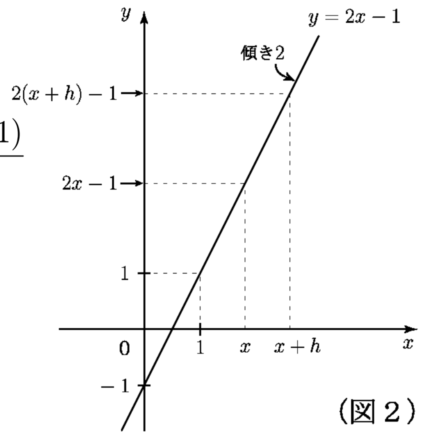
$$f(x+h) = 2(x+h) - 1$$

より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 1 - (2x-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

(注)　$f(x)$ が一次関数 (または定数関数) の場合 $y = f(x)$ のグラフは図 1、図 2 のような直線である。このとき導関数 $f'(x)$ はその直線の傾きを表す。



（図 2）

問 1　$f(x)$ が以下の場合に導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = 2$,　$f'(x) =$　　　　(2)　$f(x) = 5x - 2$,　$f'(x) =$

例 3　$f(x) = x^3$ のとき導関数は $f'(x) = 3x^2$ である。このことを略して

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

と書く。同様にして

$f(x) = x^2$ のとき $f'(x) = 2x$ のことを　$\boxed{(x^2)' = 2x}$

$f(x) = x$ のとき $f'(x) = 1$ のことを　$\boxed{(x)' = 1}$

$f(x) = 1$ のとき $f'(x) = 0$ のことを　$\boxed{(1)' = 0}$

と略記する。

問 2　前ページおよびこのページの結果を利用して、次の導関数を求めよ。

(1)　$(3)' =$　　(2)　$(2x - 1)' =$　　(3)　$(5x - 2)' =$

(4)　$(7x^2)' =$　　(5)　$(x^2 + 2x)' =$　　(6)　$(x^2 - 4x)' =$

＜ 導関数3 ＞

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y = f(x)$ を「**微分**する」という。

例 1 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \quad , \quad \left(3x^2\right)' = 6x = 3 \times 2x$$

であった。従って

$$\left(3x^2\right)' = 3 \times \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に定数 k と関数 $f(x)$ に対して

$$\boxed{\left(kf(x)\right)' = k \times \left(f(x)\right)'} \quad \text{(定数倍の微分)}$$

が成り立つ。

例 2 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \quad , \quad \left(x\right)' = 1 \quad , \quad \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$$

である。従って

$$\left(x^2 + x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x\right)'$$

が成り立つ。

一般に 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned} \left(f(x) + g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)' \\ \left(f(x) - g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)' \end{aligned}} \quad \text{(和・差の微分)}$$

が成り立つ。

例 3 (1) $\left(5x^3 + 7x^2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(7x^2\right)' = 5 \times \left(x^3\right)' + 7 \times \left(x^2\right)'$

$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$

(2) $\left(x^2 - 4x + 3\right)' = (x^2)' - 4 \times \left(x\right)' + \left(3\right)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x^3 + 2)'$

(2) $(3x^2 - 2x^3)'$

(3) $(x^2 - 3x + 2)'$

(4) $(3x^3 - x^2 + 5x - 1)'$