高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2001年度版)

Series A
$No.$ 1

内容

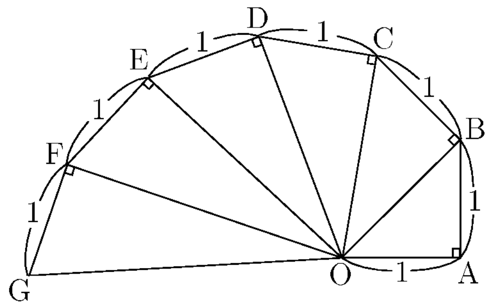
◎ 文字式

◎ ピタゴラスの定理

◎ 整式

◎ 2次方程式

◎ 因数分解

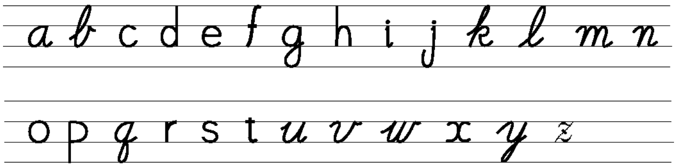


電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜アルファベット＞

アルファベットの小文字は、数学の答案では次のように書くとよい。



b は活字体の b でもよいが、数字の 6 と区別がつくように書く。
f は筆記体 f だと b と間違うので活字体の f の方がよい。
h は筆記体 h でもよいが k と区別がつくように書く。
k は活字体 k だと大文字 K やギリシャ文字の κ(カッパ) と間違えるので
筆記体の方がよい。
l は活字体 l だと数字の 1 と間違えるので筆記体 l を使う。
n は活字体 n だと h と間違えるので筆記体 n を使う。
q は活字体 q だと数字の 9 と間違えるので筆記体を使う。
s を数字の 5 のように書く人は筆記体 s を使ってもよい。
v を活字体で v と書くと、$\vee$ (理論記号の or) と似るので筆記体 v を使う。
x はギリシャ文字の χ(カイ) のように書かないこと。
z は数字の 2 と間違えやすいので必ず真ん中に点をつけ z のように書く。

アルファベットの大文字はすべて活字体で書く。

$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\ M\ N$
$O\ P\ Q\ R\ S\ T\ U\ V\ W\ X\ Y\ \not{Z}$

(注)「活字体には立体と斜体がある。その使い分けは 10,11 ページを参照せよ。」

問 次の数字・文字・数学記号をはっきり区別がつくように書け。

(1) b , f , 6 (数字)　(2) h , n　(3) l , 1 (数字) , 7 (数字)

(4) q , 9 (数字)　(5) s , 5 (数字)　(6) u , v

(7) x , × (積の記号)　(8) z , 2 (数字)　(9) c (小文字) , C (大文字)

(10) s(小文字) , S(大文字)　(11) U(大文字) , V(大文字)　(12) X(大文字) , ×(積の記号)

(13) 2 (数字) , 3 (数字)　(14) 5 (数字) , 6 (数字)　(15) e , l

< ギリシャ文字 >

ギリシャ文字は筆記体を使わないので、基本的に活字体で書く。

小文字	大文字	英語名	読み方
α	A	alpha	アルファ
β	B	beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ	E	epsilon	イプシロン
ζ	Z	zeta	ツェータ
η	H	eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι	I	iota	イオタ
κ	K	kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ	M	mu	ミュー
ν	N	nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ
o	O	omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ
ρ	P	rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ	T	tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン (ユプシロン)
$\phi(\varphi)$	Φ	phi	ファイ
χ	X	chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

ただしアルファベットと同じような字体は区別するため

ɤ(ガンマ) ,　ω(オメガ)

のように書く。

問 次の文字をはっきり区別がつくように書け。

(1) α , d　(2) γ , r　(3) ρ , p　(4) τ , t　(5) χ , x　(6) ω , w

＜数としての文字＞

わからない数を□と表すかわりに x や y などの文字を使って表す。わからない数を**未知数**といい、数の代わりに文字を使うことを**代数**という。

例 1 5 ページの例 1 で□のかわりに x を使うと

$$2:5 \ = \ x:4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{x}{4}$$

両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = x \quad \Rightarrow \quad \underline{(\text{答})\ x = \frac{8}{5} = 1.6}$$

(注) この例 1 の場合は文字 x は (結果的に) 分数 $\frac{8}{5}$ または少数 1.6 を意味する。

例 2 図 1 において各直線上の数字の和が同じになるよう x, y, z, w を決めたい。

上段の和は

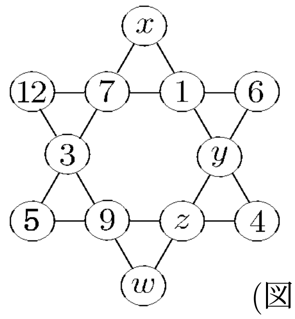
$$12 + 7 + 1 + 6 = 26$$

だから

$$x + 7 + 3 + 5 = 26$$

より

$$x = 26 - (7 + 3 + 5) = 11$$



(図 1)

問 1 例 2 で y, z, w にあてはまる数を求めよ。

問 2 図 2、図 3 で縦・横・ななめの数字の和が等しくなるよう、x, y, z, w を求めよ。

(1)

8	3	w
1	x	9
6	z	y

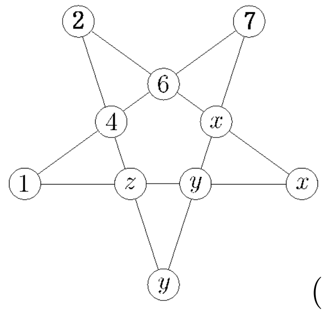
(図 2)

(2)

15	6	10	3
1	12	8	z
4	x	y	16
14	7	11	w

(図 3)

問 3 図 4 において各直線上の数字の和が等しくなるよう x, y, z を求めよ。



(図 4)

< 省略記号の変更 >

1. 積の記号 $\times$ は省略する

文字式の場合、積の記号 $\times$ は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 $\times$ を省略する。例えば $x+x=2\times x$ を $2x$ と略記する。また $x\times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例 $x+x+x=3x$, $2\times x+5\times x=7x$, $a\times b\times c=abc$

$4\times x\times x-7\times x\times x=-3x^2$, $a\times(a+b)=a^2+ab$

$5\times x\times x\times x\times 7\times y\times y=35x^3y^2$, $a\times 2\times a\times 4\times a\times 5=40a^3$

(注) (1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で abc のように続けて書いてはならない。$a\times b\times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $a\ b\ c$ と書く。

問 1 次の式を積の記号 $\times$ を省略して簡単にせよ。

(1) $3\times x+x+x$　　(2) $2\times x\times x\times 3\times y\times y\times y\times y\times y$

(3) $a\times a\times(a-3\times b)$　　(4) $3\times x\times x\times(x\times 4-3\times y)$

2. プラス記号は省略しない (帯分数は使わない)

帯分数の $1\frac{1}{2}$ は本来は $1+\frac{1}{2}$ という意味であるから、間のプラスが省略されている。積の記号を省略するので、まぎらわしいから、今後は帯分数を使用してはならない。$1\frac{1}{2}$ を表したいときは、$1+\frac{1}{2}$ かまたは仮分数 $\frac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\frac{7}{2}$ を $3+\frac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問 2 次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\frac{1}{3}$　　(2) $3\frac{3}{4}$　　(3) $4\frac{1}{5}$　　(4) $6\frac{2}{3}$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。
文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を
分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 ÷ 使わない。このようなきまりをまとめると

〈文字式のきまり〉	1. 文字式では積の記号×は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表す。 5. ＋, −より×, ÷を優先する。

となる。

(注) 1. 積の記号 × は通常は省略するが、$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような
素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では
$a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4b^2c$ のように × を全て省略する。

2. アルファベットの積は a^4b^2c のようにアルファベットの順に a , b , c $\cdots$, x , y , z
に従って左側から書いていく。

3. 積の記号 × のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように
書く場合もあるが $\quad 2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6 \quad , \quad 2.3 = 2 + 0.3$
のように小数点と混同するので使用しない方が良い。

4. 数の計算と同様に文字の計算でも和 (+), 差 (−) より, 積 (×) や商 (÷) を優先する。
たとえば

$$a \times b + c - d \div e \times f = (a \times b) + c - (d \div e \times f) = ab + c - \frac{df}{e}$$

例 1 $\quad 5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

(注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算と
ちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例 2 $\quad (4a^2b) \div (6ab^2) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \dfrac{2a}{3b}$

(注) 最後の式 $\dfrac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times b \times 2 \times b$

(2) $5(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $6 \times x \times y \times y \div (x \times y \times 5 \times x \times 3)$

(4) $21ab^3 \div 28a^2b$

(5) $(5xy^2) \times (9x^3y^2) \div (15x^2y^3)$

(6) $(3ab^2c) \div (2a^2bc^3) \times (6abc^2)$

< 通分 >

例 1 $\dfrac{5}{6}$ と $\dfrac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の 6 と 4 の最小公倍数である 12 を共通分母にして

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数 12 を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分する方が簡単である。

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 4}{6\times 4}+\frac{7\times 6}{4\times 6}=\frac{20}{24}+\frac{42}{24}=\frac{62}{24}=\frac{31}{12}$$

例 2

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7\times 8}{6\times 8}+\frac{5\times 6}{8\times 6}=\frac{56+30}{48}=\frac{86}{48}=\frac{43}{24}$$

例 3

$$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{8\times 12}{9\times 12}-\frac{7\times 9}{12\times 9}=\frac{96-63}{9\times 12}=\frac{33}{9\times 12}=\frac{11}{3\times 12}=\frac{11}{36}$$

例 4

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=\frac{x\times 8}{6\times 8}-\frac{y\times 6}{8\times 6}=\frac{8x-6y}{48}=\frac{4x-3y}{24}$$

最後の式 $\dfrac{4x-3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例 5

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2\times y}{x\times y}+\frac{3\times x}{y\times x}=\frac{2y+3x}{xy}=\frac{3x+2y}{xy}$$

最後の式 $\dfrac{3x+2y}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例 6

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3\times(b\times c)}{a\times(b\times c)}+\frac{2\times(a\times c)}{b\times(a\times c)}+\frac{1\times(a\times b)}{c\times(a\times b)}=\frac{3bc+2ac+ab}{abc}=\frac{ab+2ac+3bc}{abc}$$

最後の式 $\dfrac{ab+2ac+3bc}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次式を通分せよ。

(1) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{7}{8}$　(2) $\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{12}$　(3) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}$

(4) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}$　(5) $\dfrac{a}{12}-\dfrac{b}{8}$　(6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}$

(7) $\dfrac{y}{x}-\dfrac{a}{3}$　(8) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$　(9) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

< 分数の簡略化 >

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい (約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

例

(1) $$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1 \times 3}{\frac{2}{3} \times 3} = \frac{3}{2}$$

(2) $$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right) \times (6 \times 4)} = \frac{7 \times 4}{5 \times 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

(3) $$\frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right) \times (6 \times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 5)} = \frac{3 \times 6}{7 \times 5} = \frac{18}{35}$$

(4) $$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1 \times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right) \times ab} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$$

最後の式 $\dfrac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

(5) $$\frac{\frac{z}{2} + \frac{w}{5}}{\frac{x}{4} - \frac{y}{6}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \frac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right) \times (12 \times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right) \times (12 \times 10)}$$

$$= \frac{(5z+2w) \times 12}{(3x-2y) \times 10} = \frac{(5z+2w) \times 6}{(3x-2y) \times 5} = \frac{30z + 12w}{15x - 10y}$$

最後の式 $\dfrac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{\frac{7}{5}}$ (2) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$ (3) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$

(4) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$ (5) $\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$ (6) $\dfrac{1}{\frac{zw}{xy}}$

(7) $\dfrac{1}{\frac{y}{x} + \frac{w}{z}}$ (8) $\dfrac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$ (9) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

＜ 等式の変形１ ＞

等号 $=$ で結ばれる文字式を等式という。等式は次の法則がある。

1. 両辺に同じ数を足しても等式は成立する。
2. 両辺から同じ数を引いても等式は成立する。
3. 両辺に同じ数を掛けても等式は成立する。
4. 両辺を (0 以外の) 同じ数で割っても等式は成立する。
5. 両辺を入れ替えても等式は成立する。

例 1 次の等式

$$4+2x=10-x$$

を満たす数 x を求めたい。両辺に x を足すと

$$4+3x=10$$

となる。両辺から 4 を引くと

$$3x=6$$

となる。両辺を 3 で割ると

$$x=2$$

が求まる。

問 1 次の等式を満たす x を求めよ。

(1) $4x+3=-5$　　(2) $6+3x=7x-2$　　(3) $3(x-2)=5(2-x)$

例 2 $3:5=7:(x+2)$ をみたす数 x を求めたい。比の意味から

$$\frac{3}{5}=\frac{7}{x+2}$$

である。両辺に $x+2$ を掛けると

$$\frac{3}{5}(x+2)=7$$

となり、両辺を $\dfrac{3}{5}$ で割り、さらに両辺から 2 を引くと

$$x+2\left(=\frac{7}{\frac{3}{5}}\right)=\frac{35}{3}\ \Rightarrow\ x=\frac{35}{3}-2=\frac{29}{3}$$

が求まる。

問 2 次の等式を満たす x を求めよ。

(1) $\dfrac{2}{x}=5$　　(2) $7=\dfrac{2}{x-1}$　　(3) $5:11=2:x$　　(4) $(x+1):2=5:9$

＜等式の変形 2 ＞

例 1 等式

$$2x = 4a - 5 \qquad \cdots (1)$$

を考える。両辺を 2 で割ると

$$x = 2a - \frac{5}{2} \qquad \cdots (2)$$

となる。(1) の両辺に 5 を足して、4 で割り、左辺と右辺を入れ替えると

$$2x + 5 = 4a \ \Rightarrow \ \frac{2x+5}{4} = a \ \Rightarrow \ a = \frac{2x+5}{4} \qquad \cdots (3)$$

となる。(1) から (2) の形にすることを「x について解く」といい、(1) から (3) の形にすることを「a について解く」という。

例 2 等式

$$S = 2\pi rh$$

を r について解くと

$$r = \frac{S}{2\pi h}$$

であり h について解くと

$$h = \frac{S}{2\pi r}$$

となる。

問 次の等式を指定された形になおせ。

(1) $\sigma = \dfrac{W}{A}$, $W =$

(2) $E = IR$, $I =$

(3) $\ell = 2\pi r$, $r =$

(4) $S = \dfrac{1}{2}ab$, $a =$

(5) $V = \dfrac{\pi DN}{1000}$, $N =$

(6) $P = \dfrac{TN}{9.74 \times 10^5}$, $T =$

(7) $m = \dfrac{D}{Z}$, $Z =$

(8) $v = a + bt$, $t =$

(9) $\sigma = \alpha E(t - \tau)$, $t =$

(10) $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$, $\mu =$

(11) $S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$, $a =$

(12) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, $R =$

< 立体と斜体 >

アルファベットには筆記体と活字体がある。活字体とは新聞や本などに印刷される字体である。アルファベットの活字体にはさらに立体 (ローマン体) と斜体 (イタリック体) がある。

立体小文字	立体大文字	斜体小文字	斜体大文字
a	A	a	A
b	B	b	B
c	C	c	C
d	D	d	D
e	E	e	E
f	F	f	F
g	G	g	G
h	H	h	H
i	I	i	I
j	J	j	J
k	K	k	K
l	L	l	L
m	M	m	M
n	N	n	N
o	O	o	O
p	P	p	P
q	Q	q	Q
r	R	r	R
s	S	s	S
t	T	t	T
u	U	u	U
v	V	v	V
w	W	w	W
x	X	x	X
y	Y	y	Y
z	Z	z	Z

ここで注意してほしいのは小文字の x である。立体の x は積の記号 $\times$ によく似ているため一文字だけの x はほとんど使われない。未知数を表すときは必ず斜体の x を使用する。一般に数を表す文字は必ず斜体を使う。数学の教科書では文字の用途に応じて字体を変えている。次のページで詳しく説明する。

< 文字の用途と字体 >

前ページで書いたように、数学の教科書では「数を表す文字」と「それ以外のものを表す文字」で明確に字体を区別している。

1.「**数を表す文字**は**アルファベットの斜体**または**ギリシャ文字**を使う」

特に以下のような場合によく使われる文字を紹介する。

(1) $1, 2, 3, \cdots$ などの自然数は n , m , k , i , j , ℓ 等
(2) 未知数や変数には x , y , z , w , t , u , v , r 等
(3) 指数、次数には n , p , q , r 等
(4) 係数、定数には a , b , c , d , α , β , γ 等
(5) 関数には f , g , h , $\cdots$ 等

その他特別な数を表す場合がある。たとえば円周率 π、ネピアの数 e、虚数単位 i (または j)、重力加速度 g 等である。

2.「**単位を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 長さ $\cdots$ km , m , cm , mm
(2) 質量 $\cdots$ kg , g
(3) 時間 $\cdots$ h , min , s

その他、角度 (rad)、力 (N,kgf)、熱量 (cal)、電流 (A)、電圧 (V) など全て立体である。ただし μm (マイクロメートル) や抵抗 Ω (オーム) のようにギリシャ文字を使うこともある。しかしアルファベットの斜体は使わない。

3.「**特殊な関数**や**数学記号**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 特殊な関数 $\cdots$ sin , cos , tan , log , exp など
(2) 数学記号 $\cdots$ lim(極限) , det(行列式) など

4.「**点や図形を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 点を表す文字 $\cdots$ P , Q , A , B , C などがよく使われる。
(2) 図形を表す文字 $\cdots$ 線分 AB , 三角形 ABC など

(注 1) 立体で AB と書いた場合は点 A と点 B の間の**距離**を意味する。
斜体で AB と書いた場合は数 A と数 B との**積** $AB = A \times B$ を意味する。
この使い分けを特に注意すること !!

(注 2) 上記 **2,3,4** のように立体で書く文字は数学の中の**固有名詞**と考えればよい。

(注 3) 未知数がたくさんあるときはアルファベットやギリシャ文字では数が足りないことがある。たとえば未知数が 100 個あるときは、未知数を $x, y, z, \cdots$ と書くかわりに

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ \cdots \ , x_{100}$$

と書く。x の右下の小さな文字を 添(そえ)字という。x_2 は未知数 y のかわりで、$x \times 2$ ではない！

< 単位の計算1 >

<**長さ**> 長さの単位を示す。

1km (キロメートル)	1m (メートル)	1dm (デシメートル)	1cm (センチメートル)	1mm (ミリメートル)	1μm (マイクロメートル)	1nm (ナノメートル)	1 Å (オングストローム)
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例 1 3.5km = 3500m , 2.4m = 240cm , 1m = 10^{10} Å

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 123m = $\boxed{\quad}$ km　(2) 7500mm = $\boxed{\quad}$ m　(3) 1mm = $\boxed{\quad}$ Å

例 2 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか？」という問題では

740m = 0.74km だから

12.5km + 0.74km = <u>13.24km</u>

(注) 12.5km + 740m と書いてはならない。計算するときは必ず単位をそろえてする。

問 2 (1) 1050cm と 2.4m を足すと何 m になるか？

(2) 2km から 140m を引くと何 m になるか？

<**時間**> 1h(時間) = 60min(分) , 1min(分) = 60s(秒) で計算する。

例 3 1h = 60min , 1min = $\frac{1}{60}$h

1min = 60s , 1s = $\frac{1}{60}$min

4h = 4×60min = 240min

150min = 150×$\frac{1}{60}$h = $\frac{5}{2}$h = 2.5h

例 4 1.3 時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10} \times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より <u>(答) 78 分</u>

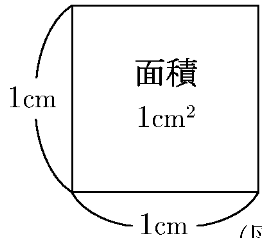
問 3 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 0.6min = $\boxed{\quad}$ s　(2) 36s = $\boxed{\quad}$ h　(3) 1h = $\boxed{\quad}$ s

(4) 156s = $\boxed{\quad}$ min　(5) 2.3h = $\boxed{\quad}$ min　(6) 15min = $\boxed{\quad}$ h

< 単位の計算 2 >

< **面積** >



(図 1)

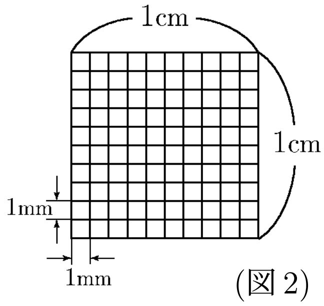
1km² (1 平方キロメートル) = 1 辺が 1km の正方形の面積

1m² (1 平方メートル) = 1 辺が 1m の正方形の面積

1cm² (1 平方センチメートル) = 1 辺が 1cm の正方形の面積

1mm²(1 平方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の正方形の面積

(注) $1\text{km}^2=1\text{km}\times1\text{km}$, $1\text{m}^2=1\text{m}\times1\text{m}$, $1\text{cm}^2=1\text{cm}\times1\text{cm}$, $1\text{mm}^2=1\text{mm}\times1\text{mm}$ と考える。



(図 2)

例 1 図 1 は 1cm² を表す正方形であり、縦と横を 10 等分したものが図 2 である。図 2 の小正方形の 1 個の面積は 1mm² であり、それが 100 個あるから $1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2$ となる。これを式で表すと

$$1\text{cm}^2 = 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 100\text{mm}^2$$

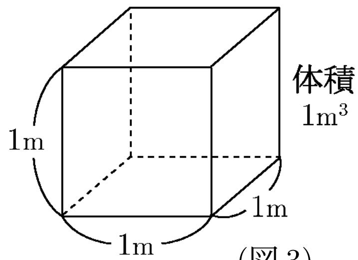
例 2 $7.5\text{m}^2 = 7.5\text{m} \times 1\text{m} = 750\text{cm} \times 100\text{cm} = 75000\text{cm}^2$

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\text{m}^2 = \boxed{}\ \text{cm}^2$　　(2) $1\text{km}^2 = \boxed{}\ \text{m}^2$

(3) $0.5\text{cm}^2 = \boxed{}\ \text{mm}^2$　　(4) $600\text{mm}^2 = \boxed{}\ \text{m}^2$

< **体積** >



(図 3)

1m³ (1 立方メートル) = 1 辺が 1m の立方体の体積 (図 3)

1cm³ (1 立方センチメートル) = 1 辺が 1cm の立方体の体積

1mm³ (1 立方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の立方体の体積

(注) $1\text{m}^3=1\text{m}\times1\text{m}\times1\text{m}$, $1\text{cm}^3=1\text{cm}\times1\text{cm}\times1\text{cm}$, $1\text{mm}^3=1\text{mm}\times1\text{mm}\times1\text{mm}$ と考える。

例 3 $6.4\text{cm}^3 = 6.4\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 64\text{mm} \times 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 6400\text{mm}^3$

問 2 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\text{cm}^3 = \boxed{}\ \text{mm}^3$　　(2) $1\text{m}^3 = \boxed{}\ \text{cm}^3$

(3) $1\text{m}^3 = \boxed{}\ \text{mm}^3$　　(4) $0.001\text{km}^3 = \boxed{}\ \text{m}^3$

＜ 単位の計算3 ＞

＜**速度**＞ 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

$$1\mathrm{km/h}（時速 1\mathrm{km}）= \frac{1\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = 1 時間に 1\mathrm{km} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/min}（分速 1\mathrm{m}）= \frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = 1 分間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/s}（秒速 1\mathrm{m}）= \frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{s}} = 1 秒間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{cm/s}（秒速 1\mathrm{cm}）= \frac{1\mathrm{cm}}{1\mathrm{s}} = 1 秒間に 1\mathrm{cm} 移動する速度$$

などがよく使われる。

例1 27km/h（時速 27km）を分速になおすと

$$27\mathrm{km/h} = \frac{27\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = \frac{27000\mathrm{m}}{60\mathrm{min}} = \frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = 450\mathrm{m/min}（分速 450\mathrm{m}）$$

であり、秒速になおすと

$$450\mathrm{m/min} = \frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = \frac{450\mathrm{m}}{60\mathrm{s}} = \frac{7.5\mathrm{m}}{1\mathrm{s}} = 7.5\mathrm{m/s}（秒速 7.5\mathrm{m}）$$

となる。ここで 7.5m=750cm より、7.5m/s=750cm/s（秒速 750cm）としてもよい。

問1 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れよ。

$$18\mathrm{km/h} = \boxed{}\ \mathrm{m/min} = \boxed{}\ \mathrm{m/s}$$

問2 5m を 6 秒で走る速度を時速になおせ。

例2 「2km/min（分速 2km）のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では、

$$2\mathrm{km/min} = \frac{2\mathrm{km}}{1\mathrm{min}} = \frac{2000\mathrm{m}}{60\mathrm{s}} = \frac{100\mathrm{m}}{3\mathrm{s}}$$

より <u>（答）100m を 3 秒で走る</u>

問3 54km を 1 時間 39 分で走る速度では、100m を何秒で走るか？

＜文字式の展開１＞

例1 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

を計算で示すには

$$(a+b)\times(c+d) = a\times(c+d) + b\times(c+d)$$

$$= a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを**展開する**という。

例2 $(a+b)^2$ を展開する。

$$(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a\times(a+b) + b\times(a+b)$$

$$= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

例3 $(a+b)(a-b) = a\times(a-b) + b\times(a-b)$

$$= a\times a - a\times b + b\times a - b\times b$$

$$= a^2 - b^2$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)^2$

(2) $(a+b)(a+c)$

(3) $(a+b)(a-c)$

(4) $(a-b)(a-c)$

(5) $(a+b)(-a+b)$

(6) $(a+b+c)^2$

(7) $(a+b-c)^2$

(8) $(a-b-c)^2$

< 文字式の展開2 >

例1 $(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

$$= a\times(a^2+ab+b^2) - b\times(a^2+ab+b^2)$$

$$= a\times a^2 + a\times ab + a\times b^2 - b\times a^2 - b\times ab - b\times b^2$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

例2 $(a+b)^3 = (a+b)\times(a+b)\times(a+b) = (a+b)\times(a+b)^2$

$$= (a+b)\times(a^2+2ab+b^2)$$

$$= a\times(a^2+2ab+b^2) + b\times(a^2+2ab+b^2)$$

$$\begin{aligned}&= a\times a^2 + a\times 2ab + a\times b^2\\ &\qquad + b\times a^2 + b\times 2ab + b\times b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= a^3 + 2a^2b + ab^2\\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $(a-b)^3$

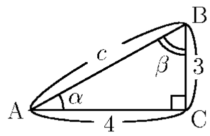
(3) $(a-b)(a+b)^2$

(4) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

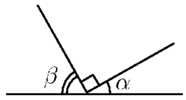
(5) $(a-b)^2(a+b)^2$

＜ピタゴラスの定理1＞

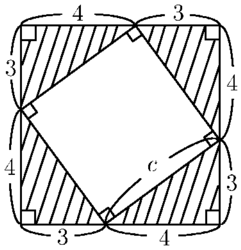
例　図1のような底辺4(cm)、高さ3(cm)の直角三角形ABCの斜辺の長さcを求めたい。$\angle \mathrm{BAC}=\alpha$、$\angle \mathrm{ABC}=\beta$とおくと$\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ$より$\alpha+\beta=90^\circ$となる。従って図2のように直線上に角$\alpha$と角$\beta$をおけば残った角度は$90^\circ$となる。そこで図1の三角形ABCを4個用意して、図3のようにおく。図3の大きい正方形(一辺7の正方形)から斜辺部分を除いた部分は(図2の性質より)一辺cの正方形になる。よって図3の面積を斜辺部分とそれ以外に分けると



(図1)



(図2)



(図3)

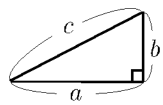
$$\underbrace{7^2}_{\text{全体の面積}}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4}_{\text{斜線部分の面積}}+c^2$$

これから

$$c^2=7^2-\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 4=49-24=25$$

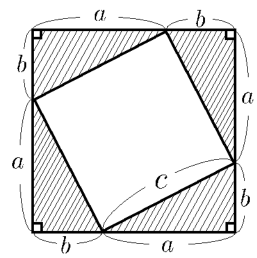
よって$c=5$ (cm) である。

問　底辺a、高さbの直角三角形の斜辺の長さをcとする(図4)。



(図4)

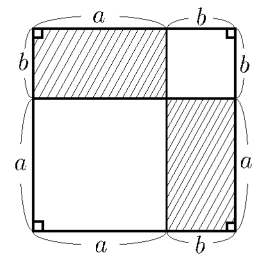
(1)　図5の斜線部分の面積をaとbで表せ。



(図5)

(2)　図6の斜線部分の面積をaとbで表せ。

(3)　図5の斜線部分以外の面積をcで表せ。

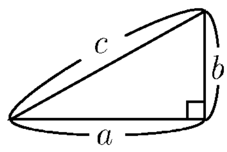


(図6)

(4)　図5の斜線部分以外の面積をaとbで表せ。

(5)　c^2をaとbで表せ。

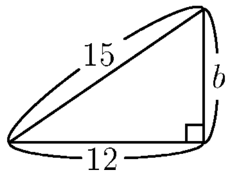
＜ピタゴラスの定理2＞



前ページでわかったように、底辺 a、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とすると

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

の関係が成立する。これを**ピタゴラスの定理**または**三平方の定理**という。



例　底辺が 12、斜辺の長さが 15 の直角三角形の高さ b を求めたい。ピタゴラスの定理より

$$15^2 = 12^2 + b^2$$

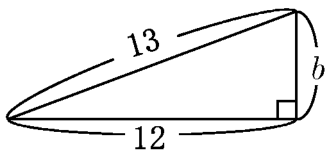
が成り立つから

$$b^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

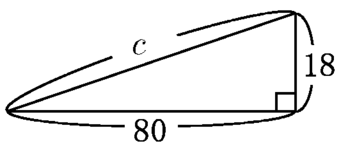
だから $b^2 = 81 = 9^2$ より (答) $b = 9$

問　以下の直角三角形で a、b、c の値を求めよ。(単位不要)

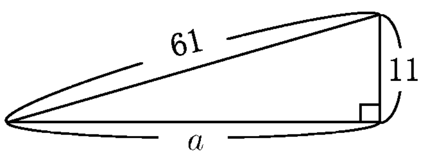
(1)



(2)

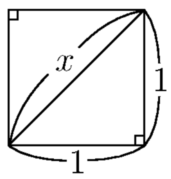


(3)



< 平方根1 >

例 1 一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356 \cdots$$

となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は 2 つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は**無理数** (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は 2 乗すれば 2 になる数であり、2 の**平方根**と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2 乗して a になる正の数を a の平方根と呼び $\sqrt{a}$ で表す。この記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**という。

例 2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

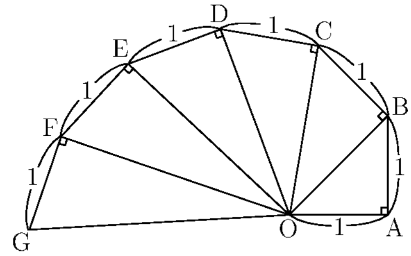
などは無理数ではない。

問 1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{16}$　　(2) $\sqrt{256}$

(3) $\sqrt{\dfrac{36}{49}}$　　(4) $\sqrt{0.25}$

例 3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より



$$(\mathrm{OC})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{BC})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから OC= $\sqrt{3}$ である。

問 2 右図で OD,OE,OF,OG の長さを求めよ。(単位不要)

＜平方根2＞

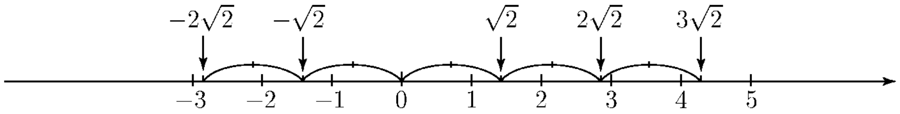
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7320508 \quad , \quad \sqrt{5} \fallingdotseq 2.2360679 \quad , \quad \sqrt{6} \fallingdotseq 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。$3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例1 文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問1 次式を計算せよ。

(1) $(6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$ (2) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(3) $3(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$ (4) $5(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 3(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$

例2 (1) $(-\sqrt{7})^2 \ = \ (\sqrt{7})^2 \ = \ 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} \ = \ \sqrt{49} \ = \ 7$

問2 次を計算せよ。

(1) $(-\sqrt{11})^2$ (2) $\sqrt{(-5)^2}$ (3) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$ (4) $\sqrt{(-0.12)^2}$

例3 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その 2 乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問3 次を計算せよ。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$ (3) $\sqrt{4} \times \sqrt{11}$ (4) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

＜平方根3＞

前ページ例 3 から一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} \;=\; \sqrt{ab}}$$

が成り立つ。

例 1 (1) $\sqrt{12} \;=\; \sqrt{4 \times 3} \;=\; \sqrt{4} \times \sqrt{3} \;=\; 2 \times \sqrt{3} \;=\; 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} \;=\; \sqrt{9 \times 5} \;=\; \sqrt{9} \times \sqrt{5} \;=\; 3 \times \sqrt{5} \;=\; 3\sqrt{5}$

問 1 次の平方根を例 1 のようになおせ。

(1) $\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{40}$　(3) $\sqrt{75}$　(4) $\sqrt{80}$　(5) $\sqrt{147}$

例 2 $\sqrt{8} \times \sqrt{18} \;=\; \sqrt{8 \times 18} \;=\; \sqrt{144} \;=\; 12$

(別解)

$\sqrt{8} \times \sqrt{18} \;=\; (2\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) \;=\; 6 \times (\sqrt{2})^2 \;=\; 6 \times 2 \;=\; 12$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$　(2) $\sqrt{7} \times \sqrt{63}$　(3) $\sqrt{21} \times \sqrt{84}$

例 3 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

より $x = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$　よって $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ がなりたつ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;=\; \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。

例 4 $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} \;=\; \sqrt{\dfrac{54}{3}} \;=\; \sqrt{18} \;=\; 3\sqrt{2}$

問 3 次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{15}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

＜平方根4＞

例 1 $$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 &= \left(\sqrt{5}\right)^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2\\ &= 5+2\sqrt{50}+10\\ &= 15+2\times 5\sqrt{2} \ = \ 15+10\sqrt{2}\end{aligned}$$

(注) ここで文字式の展開式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を用いた。

問 1 15 ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$　(3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$　(5) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$　(6) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

例 2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, (2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$　(5) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

例 3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{1\qquad\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

＜数の表示1＞

十進法では $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ の 10 個の数字を組み合わせて数を表現する。例えば 23 は

$$23 \ = \ 20+3 \ = \ 2\times 10+3$$

という意味である。$2\times 3=6$ という意味ではない。これに対し、文字 a と b を続けて ab と書くと、積 $ab=a\times b$ という意味である。もし十の位が a、一の位が b である数を表現したいなら

$$a\times 10+b \ = \ 10a+b$$

と表す。

例 1 $357 \ = \ 300+50+7 \ = \ 3\times 100+5\times 10+7 \ = \ 3\times 10^2+5\times 10+7$

例 2 百の位が a、十の位が b、一の位が c である数は

$$a\times 10^2+b\times 10+c \ = \ 100a+10b+c$$

と表す。

問 1 千の位が a、百の位が b、十の位が c、一の位が d である数を表せ。

例 3 $2.73 \ = \ 2+0.7+0.03 \ = \ 2+\dfrac{7}{10}+\dfrac{3}{100} \ = \ 2+7\times\dfrac{1}{10}+3\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^2$

例 4 一の位が a、小数第 1 位の位が b、小数第 2 位の位が c である小数は

$$a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}$$

と表される。

問 2 百の位が a、十の位が b、一の位が c、小数第 1 位の位が d、小数第 2 位の位が e である小数を表せ。

＜数の表示 2＞

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は 60 進法であり、
コンピューターは 2 進法で計算する。ここでは 8 進法を紹介する。
10 進法で 3 桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10 進法の数 (=**10 進数**という）であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し 8 進法で三桁目が 4, 二桁目が 5, 一桁目が 7 である
数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8 進法で表される数を **8 進数**という。$4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = 303$ より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 ① $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

② $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$

③ $(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$

④ $(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$

問 1 次の 8 進数を 10 進数になおせ。

① $(12)_8$　② $(33)_8$　③ $(234)_8$　④ $(707)_8$　⑤ $(2001)_8$

例 2 ① $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

② $215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$ より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の 10 進数を 8 進数になおせ。

① $(21)_{10}$　② $(45)_{10}$　③ $(79)_{10}$　④ $(156)_{10}$

例 3 ① $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10^2}$

② $(4.57)_8 = 4 + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{8^2}$

問 3 次の小数を例 3 のように分数で表せ。

① $(3.14)_{10}$　② $(1.2)_8$　③ $(5.43)_8$

< 整式 1 >

10 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 9 までの数字である。
8 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_8 = a \times 8^3 + b \times 8^2 + c \times 8 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 7 までの数字である。
2 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$$

と表される。ここで $a,\ b,\ c,\ d$ は 0 かまたは 1 である。
一般に x 進法では 4 桁の整数は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

の形になる。また 2 桁、3 桁の整数は、

$$2\text{桁} \cdots\ ax + b \qquad , \quad 3\text{桁} \cdots\ ax^2 + bx + c$$

の形になる。このように x 進法で整数を表すような式を x に関する**整式**という。これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を x に関する**分数式**という。

整式は式の形で区別する。
x に関する 1 次式 $\cdots\ ax + b$ の形
x に関する 2 次式 $\cdots\ ax^2 + bx + c$ の形
x に関する 3 次式 $\cdots\ ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

ただし a は 0 でない数である。x に関する整式では、x 以外の文字 $(a, b, c, d$ 等 $)$ を**定数** という。ax^3 の a ， bx^2 の b ， cx の c
のように x との積になっている定数を**係数**という。

＜ 整式 2 ＞

x の整式は“ x 進法 ”よりもっと広い意味で用いる。たとえば
x の 2 次式は一般に

$$ax^2 + bx + c$$

であるが、この係数 a, b や定数 c は小数や分数または負の数や
無理数でもよい。

例 1 $2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

このように整数は x の次数 (指数) の大きい順に並べる。このことを
「**降べきの順** に並べる」という。

例 2 (1) $(3 - x + 2x^2) + (4x + 5 + 3x^2)$

$= (2x^2 - x + 3) + (3x^2 + 4x + 5)$
$= (2x^2 + 3x^2) + (-x + 4x) + (3 + 5)$
$= 5x^2 + 3x + 8$

筆算では

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 - x + 3 \\ +) & 3x^2 + 4x + 5 \\ \hline & 5x^2 + 3x + 8 \end{array}$$

(2) $(-4x + 3 + 5x^2) - (7 - 2x)$

$= (5x^2 - 4x + 3) - (-2x + 7)$
$= 5x^2 + (-4x - (-2x)) + (3 - 7)$
$= 5x^2 - 2x - 4$

筆算では

$$\begin{array}{rr} & 5x^2 - 4x + 3 \\ -) & -2x + 7 \\ \hline & 5x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

(3) $(2x - 3)(4x + 5)$

$= (2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5$
$= 8x^2 - 12x + 10x - 15$
$= 8x^2 - 2x - 15$

筆算では

$$\begin{array}{rrl} & 2x - 3 & \\ \times) & 4x + 5 & \\ \hline & 10x - 15 & \cdots\cdots (2x-3) \times 5 \\ +) & 8x^2 - 12x \phantom{{}-15} & \cdots\cdots (2x-3) \times 4x \\ \hline & 8x^2 - 2x - 15 & \end{array}$$

(注) 整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 次の計算をせよ。

(1) $(3x - x^2 + 2) + (2x^2 - 1 - 2x)$　　(2) $(1 - x^2) - (5 + x^2 - 3x)$

(3) $(x - 2)(3 + x)$　　(4) $(3x - 2)(5 - 3x)$

＜整式３＞

x の整式の積は文字式の場合 (15, 16 ページ) と同様に展開する。
そして最後の答は必ず降べきの順に並べる。

例 1 (1) $(x-\frac{3}{2})^2 \ = \ x^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times x + (\frac{3}{2})^2 \ = \ x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

(2) $(x+a)^2 \ = \ x^2 + 2ax + a^2$, $(x-a)^2 \ = \ x^2 - 2ax + a^2$

(3) $(x+a)(x-b) \ = \ x^2 + ax - bx - ab \ = \ x^2 + (a-b)x - ab$

問 1 次式を展開せよ。

(1) $(x+3)^2$ (2) $(x-2)^2$

(3) $(x+\frac{5}{2})^2$ (4) $(x-\frac{3}{2})^2$

(5) $(x+\frac{5}{4})^2$ (6) $(x-\frac{7}{8})^2$

(7) $(x-a)(x+a)$ (8) $(x+a)(x+b)$

(9) $(x-a)(x-b)$ (10) $(x+\frac{b}{2a})^2$

例 2 (1) $x^2 - 6x + 9 \ = \ x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 \ = \ (x-3)^2$

(2) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} \ = \ x^2 + 2 \times \frac{5}{2} \times x + (\frac{5}{2})^2 \ = \ (x+\frac{5}{2})^2$

(3) $x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} \ = \ x^2 - 2 \times \frac{1}{6} \times x + (\frac{1}{6})^2 \ = \ (x-\frac{1}{6})^2$

(注) ここでは
$$x^2 + 2ax + a^2 \ = \ (x+a)^2 \quad , \qquad x^2 - 2ax + a^2 \ = \ (x-a)^2$$
を用いている。

問 2 次の２次式を例２の右辺の形にせよ。

(1) $x^2 + 4x + 4$ (2) $x^2 - 12x + 36$

(3) $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ (4) $x^2 + 2x + 1$

(5) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ (6) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

＜ 2次方程式1 ＞

「x の 2 次式 $= 0$」の形の式を **2 次方程式** という。2 次方程式をみたす数 x を 2 次方程式の **解** という。2 次方程式の解は通常は 2 個ある。

例1 $x^2 - 5 = 0$ は $x^2 = 5$ と同じである。

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \quad , \quad \left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

より解は $\underline{x = \sqrt{5} \quad \text{または} \quad x = -\sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x = \pm\sqrt{5}}$ と書く。

例2 $(x-1)^2 - 5 = 0$ は $(x-1)^2 = 5$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \pm\sqrt{5}$$

より解は $\underline{x = 1 + \sqrt{5} \quad \text{または} \quad x = 1 - \sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x = 1 \pm \sqrt{5}}$ と書く。

例3 $(x-1)^2 - 4 = 0$ は $(x-1)^2 = 4$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \pm 2$$

$$x - 1 = +2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 + 2 = 3$$

$$x - 1 = -2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 - 2 = -1$$

より解は $\underline{x = 3 \quad \text{または} \quad x = -1}$ である。これを略して $\underline{x = 3 \quad \text{または} \quad -1}$ と書く。

問 次の 2 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^2 - 4 = 0$

(2) $x^2 - 8 = 0$

(3) $(x-2)^2 - 5 = 0$

(4) $3 - (x+2)^2 = 0$

(5) $(x-3)^2 - 9 = 0$

(6) $4 - (x+1)^2 = 0$

＜ 2 次方程式 2 ＞

例 1

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \implies x^2 + 6x = -5$$

$$\implies x^2 + 2 \times 3 \times x = -5 \implies x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = 3^2 - 5$$

$$\implies (x+3)^2 = 4 \implies x + 3 = \pm 2$$

$$\implies x = -3 + 2 \quad \text{または} \quad x = -3 - 2 \implies \underline{(\text{答}) \ x = -1 \quad \text{または} \quad -5}$$

(注) $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ の形になるよう式変形する。

例 2 $\quad x^2 - 5x - 3 = 0 \implies x^2 - 5x = 3$

$$\implies x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x = 3 \implies x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$

$$\implies \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \implies x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{37}{4}}$$

$$\implies x - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} \implies x - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\implies \underline{(\text{答}) \ x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}}$$

(注) $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ の形になるよう式変形する。

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 + 6x + 8 = 0$

(2) $x^2 - 10x + 16 = 0$

(3) $x^2 + 8x - 11 = 0$

(4) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(5) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(6) $x^2 + 5x - 2 = 0$

＜ 2次方程式3 ＞

例 2 次方程式 $5x^2+13x+7=0$ を次のように解く。

$$5x^2+13x+7=0 \Longrightarrow x^2+\frac{13}{5}x+\frac{7}{5}=0 \Longrightarrow x^2+\frac{13}{5}x=-\frac{7}{5}$$
$$\Longrightarrow x^2+2\times\frac{13}{10}x=-\frac{7}{5}$$

$$\Longrightarrow x^2+2\times\frac{13}{10}x+\left(\frac{13}{10}\right)^2=\left(\frac{13}{10}\right)^2-\frac{7}{5} \Longrightarrow \left(x+\frac{13}{10}\right)^2=\frac{13^2-20\times 7}{100}$$

$$\Longrightarrow x+\frac{13}{10}=\pm\sqrt{\frac{13^2-20\times 7}{100}} \Longrightarrow x=-\frac{13}{10}\pm\frac{\sqrt{13^2-20\times 7}}{\sqrt{100}}=\frac{-13\pm\sqrt{29}}{10}$$

問 $a\neq 0$, $b^2-4ac\geqq 0$ のとき 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解の公式を例および左側の式変形を参考にして導け。 (途中の式変形も書くこと)

$$\bigcirc x^2+\triangle x+\square=0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2+\frac{\triangle}{\bigcirc}x=-\frac{\square}{\bigcirc}$$
$$\Downarrow$$
$$x^2+2\times\frac{\triangle}{2\bigcirc}x+\left(\frac{\triangle}{2\bigcirc}\right)^2=\left(\frac{\triangle}{2\bigcirc}\right)^2-\frac{\square}{\bigcirc}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x+\frac{\triangle}{2\bigcirc}\right)^2=\frac{\triangle^2-4\bigcirc\square}{4\bigcirc^2}$$
$$\Downarrow$$
$$x+\frac{\triangle}{2\bigcirc}=\pm\sqrt{\frac{\triangle^2-4\bigcirc\square}{4\bigcirc^2}}$$
$$\Downarrow$$
$$x=-\frac{\triangle}{2\bigcirc}\pm\frac{\sqrt{\triangle^2-4\bigcirc\square}}{\sqrt{4\bigcirc^2}}$$
$$\Downarrow$$
(答) $x=\dfrac{-\triangle\pm\sqrt{\triangle^2-4\bigcirc\square}}{2\bigcirc}$

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$
(答) ____________

＜方程式と恒等式＞

文字 x に関する等式には 2 種類ある。

例 1 (1) 等式 $3x-10=2$ を満たす数 x は $x=4$ だけである。

(2) 等式 $x^2-9=0$ を満たす数 x は $x=3$ または $x=-3$ の 2 個しかない。

例 2 (1) 等式 $2(x-1)+3(x+4)=5x+10$ は x がどんな数でも成り立つ。

(2) 等式 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例 1 のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。例 1 の (1) を未知数 x に関する 1 次方程式、例 1 の (2) を未知数 x に関する 2 次方程式という。

これに対し、例 2 は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を（常に成り立つ等式という意味で）**恒等式**（こうとう）という。例 2 の (2) のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問 1 例 2 の (2) を確かめたい。以下の x の値を代入して、$(x+2)\times(x+3)$ と x^2+5x+6 の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x=-1$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(2) $x=1$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(3) $x=2$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(4) $x=3$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(5) $x=4$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

問 2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+\alpha)^2$ 　　(2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x+\alpha)(x-\alpha)$ 　　(4) $(x+\alpha)(x+\beta)$

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)$ 　　(6) $(x+\alpha)(x-\beta)$

問 3 次の等式は恒等式か方程式か判定せよ。

(1) $3x-1=2(2x-1)+x$ 　　(2) $3(x+1)-1=2(x+1)+x$

(3) $(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$ 　　(4) $(x-2)(x-1)=x^2-4x-3$

<2次式の因数分解1>

例 169 を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10 + 3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1 + 3)^2$$
$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2 + 3)^2$$
$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3 + 3)^2$$
$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4 + 3)^2$$
$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5 + 3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \qquad \cdots\cdots (1)$$

が成り立つ。すなわち (1) は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の (1) 式のように x を使って表せ。

(1) $1^2 + 4 \times 1 + 4 = (1 + 2)^2$
$2^2 + 4 \times 2 + 4 = (2 + 2)^2$
$3^2 + 4 \times 3 + 4 = (3 + 2)^2$
$4^2 + 4 \times 4 + 4 = (4 + 2)^2$

(2) $2^2 - 10 \times 2 + 25 = (2 - 5)^2$
$4^2 - 10 \times 4 + 25 = (4 - 5)^2$
$6^2 - 10 \times 6 + 25 = (6 - 5)^2$
$8^2 - 10 \times 8 + 25 = (8 - 5)^2$

(3) $5^2 - 9 = (5 + 3) \times (5 - 3)$
$6^2 - 9 = (6 + 3) \times (6 - 3)$
$7^2 - 9 = (7 + 3) \times (7 - 3)$
$8^2 - 9 = (8 + 3) \times (8 - 3)$

(4) $2^2 - 2 - 6 = (2 + 2) \times (2 - 3)$
$3^2 - 3 - 6 = (3 + 2) \times (3 - 3)$
$5^2 - 5 - 6 = (5 + 2) \times (5 - 3)$
$8^2 - 8 - 6 = (8 + 2) \times (8 - 3)$

<2次式の因数分解2>

前ページより

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$
$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$
$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。
たとえば、最後の式は

$$\begin{aligned}\text{右辺}=(x+2)(x+3)&=(x+2)\times x+(x+2)\times 3\\&=x^2+2x+3x+6\\&=x^2+5x+6\\&=\text{左辺}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & x+2 & \\ \times) & x+3 & \\ \hline & 3x+6 & \cdots\ (x+2)\times 3 \\ +) & x^2+2x & \cdots\ (x+2)\times x \\ \hline & x^2+5x+6 & \end{array}$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x=10$ のときは

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=(10+2)(10+3)\\&=(10+2)\times 10+(10+2)\times 3\\&=10^2+2\times 10+3\times 10+2\times 3\\&=10^2+5\times 10+6=\text{左辺}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & 12 & \\ \times) & 13 & \\ \hline & 36 & \cdots\ 12\times 3 \\ +) & 120 & \cdots\ 12\times 10 \\ \hline & 156 & \end{array}$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。
この式を

$$\text{左辺}=x^2+(2+3)x+2\times 3=(x+2)(x+3)=\text{右辺}$$

と考え、2 と 3 のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。
すなわち

$$\boxed{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 31 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$

(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$

(4) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

＜ 2次式の因数分解3 ＞

前ページの結果から任意の数 α, β に対して次の因数分解の公式が得られた。

(I) $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = (x + \alpha)^2$
(II) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = (x - \alpha)^2$
(III) $x^2 - \alpha^2 = (x + \alpha)(x - \alpha)$
(IV) $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

例 1 上の公式 (I), (II) の例をあげる。

(1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x + 5)^2$

(2) $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x - 6)^2$

例 2 上の公式 (III) の例をあげる。

(1) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$

(2) $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

例 3 上の公式 (IV) の例をあげる。

(1) $x^2 + 4x + 3 = x^2 + (3 + 1)x + 3 \times 1 = (x + 3)(x + 1)$

(2) $x^2 + 7x + 10 = x^2 + (5 + 2)x + 5 \times 2 = (x + 5)(x + 2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 6x + 9$

(2) $x^2 - 10x + 25$

(3) $x^2 + 12x + 36$

(4) $x^2 - 9$

(5) $x^2 - 8$

(6) $x^2 - 1$

(7) $x^2 + 3x + 2$

(8) $x^2 + 5x + 6$

(9) $x^2 + 7x + 10$

(10) $x^2 + 7x + 12$

＜ 2次式の因数分解4 ＞

前ページの (IV) の式

$$\boxed{\text{(IV)}\quad x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)}$$

の β のかわりに $-\beta$ を代入すると

$$\boxed{\text{(V)}\quad x^2 + (\alpha-\beta)x + \alpha(-\beta) = (x+\alpha)(x-\beta)}$$

が得られ、さらに α のかわりに $-\alpha$ を代入すると

$$\boxed{\text{(VI)}\quad x^2 + (-\alpha-\beta)x + (-\alpha)(-\beta) = (x-\alpha)(x-\beta)}$$

が得られる。

例 1 (V) の例をあげる。

(1) $x^2 + 3x - 10 = x^2 + (5-2)x + 5 \times (-2) = (x+5)(x-2)$

(2) $x^2 + x - 20 = x^2 + (5-4)x + 5 \times (-4) = (x+5)(x-4)$

(3) $x^2 - 2x - 15 = x^2 + (3-5)x + 3 \times (-5) = (x+3)(x-5)$

(4) $x^2 - x - 6 = x^2 + (2-3)x + 2 \times (-3) = (x+2)(x-3)$

例 2 (VI) の例をあげる。

(1) $x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3-4)x + (-3) \times (-4) = (x-3)(x-4)$

(2) $x^2 - 7x + 6 = x^2 + (-6-1)x + (-6) \times (-1) = (x-6)(x-1)$

(3) $x^2 - 5x + 6 = x^2 + (-3-2)x + (-3) \times (-2) = (x-3)(x-2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 5x - 6$

(2) $x^2 + x - 6$

(3) $x^2 + 2x - 15$

(4) $x^2 - 3x - 4$

(5) $x^2 - 4x - 5$

(6) $x^2 - 2x - 8$

(7) $x^2 - 6x + 5$

(8) $x^2 - 4x + 3$

(9) $x^2 - 9x + 8$

(10) $x^2 - 6x + 8$

＜ 2 次方程式と因数分解 1 ＞

一般の係数 $a,\ b,\ c$ に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解の公式は 30 ページより

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

である。

例 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

の解を求める。$a = 1,\ b = -5,\ c = 6$ を解の公式にあてはめると

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$\dfrac{5+1}{2} = 3,\quad \dfrac{5-1}{2} = 2$ より　　(答) $x = 3$ または $x = 2$

(別解)

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

と因数分解されるから

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow (x-2) \times (x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \text{または}\ x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x = 2 \ \text{または}\ x = 3} \end{aligned}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 8 = 0$　　(2) $x^2 - 8x + 7 = 0$

(3) $x^2 - 7x + 10 = 0$　　(4) $x^2 + x - 12 = 0$

(5) $x^2 - x - 2 = 0$　　(6) $x^2 + 5x + 4 = 0$

(7) $x^2 - 5 = 0$　　(8) $x^2 + x - 1 = 0$

＜ 2次方程式と因数分解2 ＞

前ページの例のように 2 次方程式の解と因数分解の関係は

$$x^2+\square x+\triangle=0 \text{ の解が } \alpha \text{ と } \beta \Longleftrightarrow x^2+\square x+\triangle=(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。

例 1 $x^2+2x-3=0$ の解は $\underline{x=-3 \text{ と } x=1}$ であるから

$$x^2+2x-3=\big(x-(-3)\big)(x-1)=(x+3)(x-1)$$

と因数分解できる。

例 2 $x^2-x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問 1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 3 $2x^2+4x-6=2\left(x^2+2x-3\right)=2(x+3)(x-1)$

この式は例 1 の結果を使った。

(注) $2x^2+4x-6=0$ の解と $x^2+2x-3=0$ の解は同じ。

一般に

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \text{ の解が } x=\alpha \text{ または } x=\beta} \cdots(1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)} \cdots(2)$$

と因数分解できる。逆に (2) であれば (1) がわかる。

問 2 次式を因数分解せよ。

(1) x^2-2x-3

(2) x^2+3x-4

(3) x^2-3

(4) x^2-x-4

(5) $2x^2-6x-20$

(6) $3x^2+3x-18$

(7) $9x^2+6x+1$

(8) $3x^2-5x-2$

< 整式の除法 >

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。

$$\begin{array}{r@{\,}r} & 12 \\ 11\,) & \overline{136} \\ & 11 \\ \hline & 26 \\ & 22 \\ \hline & 4 \end{array}$$

これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

となる。整式の除法も同様で

$x^2 + 3x + 6$ を $x + 1$ で割ると商が

$x + 2$ で余りが 4 である。これを式で

書くと

$$\begin{array}{r@{\,}rl} & x+2 & \\ x+1\,) & \overline{x^2+3x+6} & \\ & x^2+\ x & \cdots\ (x+1)\times x \\ \cline{2-2} & 2x+6 & \\ & 2x+2 & \cdots\ (x+1)\times 2 \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x + 1) + 4$$

かまたは

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$$

となる。

例 2　右の筆算より

$$\begin{array}{r@{\,}rl} & 2x^2-4x+9 & \\ 2x+3\,) & \overline{4x^3-2x^2+6x-1} & \\ & 4x^3+6x^2 \qquad\qquad & \cdots\ (2x+3)\times 2x^2 \\ \cline{2-2} & -8x^2+6x \quad\ \, & \\ & -8x^2-12x \quad\ \, & \cdots\ (2x+3)\times(-4x) \\ \cline{2-2} & 18x-1 & \\ & 18x+27 & \cdots\ (2x+3)\times 9 \\ \cline{2-2} & -28 & \end{array}$$

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{2x + 3} = 2x^2 - 4x + 9 - \frac{28}{2x + 3}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の
右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

(2) $\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x - 2}$

(3) $\dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x - 1}$

(4) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x - 3}$

＜ 因数定理 ＞

例 1　2 次式 $f(x) = x^2 - 7x + 10$ を因数分解したい。$x = 2$ を代入すると

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 2) \times (x + \square)$$

の形であれば $f(2) = 0$ となる。そこで $x - 2$ で割ると右の筆算より

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = x - 5$$

となるから

$$\underline{f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \times (x - 5)}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x - 5 \\ \cline{2-2}
x - 2 \,) & x^2 - 7x + 10 \\
 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2}
 & -5x + 10 \\
 & -5x + 10 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

例 2　3 次式 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ を因数分解したい。$x = 1$ を代入する。

$$f(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 23 \times 1 - 15 = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + \triangle\, x + \square)$$

の形であれば $f(1) = 0$ となる。そこで $x - 1$ で割ると右の筆

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x - 1} = x^2 - 8x + 15$$

より

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1) \times (x^2 - 8x + 15)$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2 - 8x + 15 \\ \cline{2-2}
x - 1 \,) & x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \\
 & x^3 - x^2 \\ \cline{2-2}
 & -8x^2 + 23x \\
 & -8x^2 + 8x \\ \cline{2-2}
 & 15x - 15 \\
 & 15x - 15 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

となる。2 次式 $x^2 - 8x + 15$ をさらに因数分解すると $(x - 3)(x - 5)$ となるから

$$\underline{x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1)(x - 3)(x - 5)}$$

一般に関数 $f(x)$ が n 次の整式のとき、$x = a$ を代入して $f(a) = 0$ となれば $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる。すなわち

$$\boxed{f(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x - a) \times \Big((n - 1) \text{ 次の整式} \Big)} \qquad \text{(因数定理)}$$

と表される。これを**因数定理**という。

問　次の 3 次式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(2) $x^3 - 6x + 5$

< 3次方程式 >

例 1　3 次方程式

$$x^3-9x^2+23x-15=0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

を考える。前ページより因数分解すると

$$(x-1)(x-3)(x-5)=0$$

より (1) の解は $\underline{x=1 \text{ または } x=3 \text{ または } x=5}$ である。

例 2　3 次方程式

$$x^3-5x^2+8x-4=0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$\begin{array}{r} x^2-4x+4 \\ x-1\,\big)\overline{\,x^3-5x^2+8x-4} \\ x^3-x^2 \qquad\qquad \\ \hline -4x^2+8x \quad \\ -4x^2+4x \quad \\ \hline 4x-4 \\ 4x-4 \\ \hline 0 \end{array}$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-1)(x-2)^2=0$$

より (2) の解は $\underline{x=1 \text{ または } x=2}$ である。

例 3　3 次方程式

$$x^3-6x^2+12x-8=0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$\begin{array}{r} x^2-4x+4 \\ x-2\,\big)\overline{\,x^3-6x^2+12x-8} \\ x^3-2x^2 \qquad\qquad \\ \hline -4x^2+12x \quad \\ -4x^2+8x \quad \\ \hline 4x-8 \\ 4x-8 \\ \hline 0 \end{array}$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-2)^3=0$$

より (3) の解は $\underline{x=2}$ である。

問　次の 3 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^3+3x^2-x-3=0$

(2) $x^3+2x^2-5x-6=0$

(3) $x^3-3x+2=0$

(4) $x^3+3x^2+3x+1=0$