

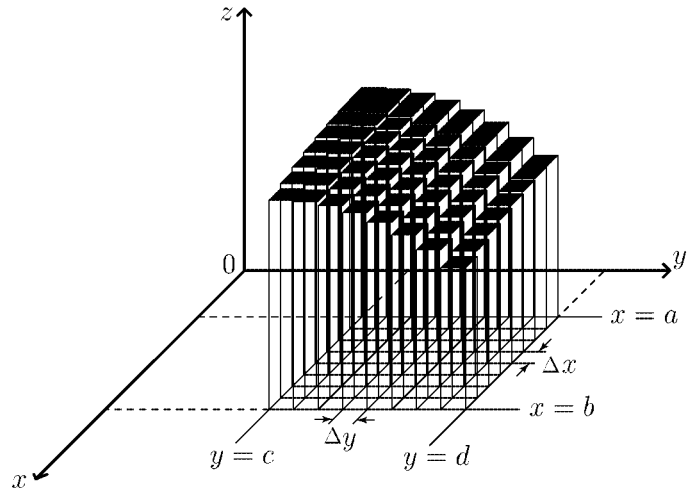
高知工科大学  
基礎数学ワークブック  
(2000年度版)

秋期入学者用

# VI

## 内容

- ◎ 定積分
- ◎ 面積・体積
- ◎ 重積分
- ◎ 重心
- ◎ 広義積分



電子・光システム工学科  
井上 昌昭 著

### < 定積分 3 >

問1 次の不定積分を求めよ。(ただし  $n \neq -1$ )

$$(1) \int dx =$$

$$(2) \int x^n dx =$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} =$$

$$(4) \int e^x dx =$$

$$(5) \int \cos x dx =$$

$$(6) \int \sin x dx =$$

$$(7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$(8) \int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$(9) \int \sqrt{x} dx =$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

問2 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^4 dx =$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^7 dx =$$

$$(3) \int_1^e \frac{dx}{x} =$$

$$(4) \int_0^2 e^x dx =$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx =$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$(8) \int_1^3 \frac{1}{x^3} dx =$$

$$(9) \int_0^9 \sqrt{x} dx =$$

$$(10) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

## < 定積分 4 >

問 1 次の不定積分を求めよ。ただし  $a \neq 0, n \neq -1$  である。

$$(1) \int (ax + b)^n dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(ax + b)^2} dx$$

$$(3) \int \sqrt{ax + b} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{ax + b} dx$$

$$(6) \int \cos(ax + b) dx$$

$$(7) \int \sin(ax + b) dx$$

$$(8) \int e^{ax+b} dx$$

問 2 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^2 (3x - 1)^4 dx$$

$$(2) \int_1^3 \frac{dx}{(3x + 2)^2}$$

$$(3) \int_1^6 \sqrt{3x - 2} dx$$

$$(4) \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2x - 2}} dx$$

$$(5) \int_0^1 \frac{1}{3x + 4} dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) dx$$

$$(8) \int_1^2 e^{3x-3} dx$$

## < 定積分 5 >

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

である。ここで変数  $x$  が、別の変数 (例えば  $t$ ) に変わっても

$$\int_a^b f(t)dt = \left[ F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

のように、定積分の値は変わらない。

例 (1)  $\int_{-1}^2 (2t - 3t^2)dt = \left[ t^2 - t^3 \right]_{-1}^2 = (4 - 8) - (1 - (-1)) = -6$

(2)  $\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[ \frac{4}{3}\pi r^3 \right]_1^2 = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right\} d\theta = \left[ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \left( \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \times \sin \left( 2 \times \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left( \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right) = \frac{\pi}{4}$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし、 $n \neq -1$ )

(1)  $\int_1^4 (5t - 3t^2)dt =$

(2)  $\int_0^{10} (4\pi r^2)dr =$

(3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta =$

(4)  $\int_a^b t^n dt =$

(5)  $\int_1^9 t\sqrt{t}dt =$

## < 定積分 6 >

例題  $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$  を求めよ。

(解) 上の定積分を求めるために、まず不定積分を求める。

$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

より、置換積分法によって

$$\begin{aligned} \int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int \frac{du}{dx}\sqrt{u}dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{dx} dx = \int \sqrt{u}du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \left[ \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times 27 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

(注)  $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 27$

問 次の不定積分と定積分を求めよ。

$$\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+4} dx =$$

$$\int_1^4 (2x-1)\sqrt{x^2-x+4} dx =$$

## < 定積分の置換積分法 1 >

定積分の変数を明記するため

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx , \quad \int_{\alpha}^{\beta} g(u)du = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} g(u)du$$

のように積分範囲を書くことにする。

例 前ページの例題  $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1} dx$  を不定積分を求めずに、次のように解く。

$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

であり

$$x = 0 \quad \text{のとき} \quad u = 1 , \quad x = 2 \quad \text{のとき} \quad u = 9$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1} dx &= \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{x^3+1}) \times 3x^2 dx = \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{u}) \times \frac{du}{dx} dx \\ &= \int_{u=1}^{u=9} \sqrt{u} du = \left[ \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=1}^{u=9} \\ &= \frac{2}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

問 次の定積分を例のように  $\int_{u=\alpha}^{u=\beta} \sqrt{u} du = \left[ \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=\alpha}^{u=\beta}$  を利用して求めよ。

$$\int_2^3 (2x-3)\sqrt{x^2-3x+4} dx$$

## < 定積分の置換積分法 2 >

定積分が  $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx$  の形の場合は不定積分の置換積分法  
(5 ページ) と同様にして

$$u = g(x)$$

とおくと

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f(u) \frac{du}{dx} dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f(u) du$$

がなりたつ。ただし

$x = a$  のとき  $u = \alpha$  ,  $x = b$  のとき  $u = \beta$  である。

積分範囲が変わることに注意せよ。

例  $\int_0^2 (x^2 + x - 1)^3 (2x + 1) dx$  を求めたい。

$$u = x^2 + x - 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2 + x - 1)' = 2x + 1$$

であり

$$x = 0 \text{ のとき } u = -1, \quad x = 2 \text{ のとき } u = 5$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 + x - 1)^3 (2x + 1) dx &= \int_{x=0}^{x=2} u^3 \frac{du}{dx} dx = \int_{u=-1}^{u=5} u^3 du \\ &= \left[ \frac{1}{4} u^4 \right]_{u=-1}^{u=5} = \frac{5^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{624}{4} = 156 \end{aligned}$$

問 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 (x^3 + x + 2)^4 (3x^2 + 1) dx =$$

$$(2) \int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \times 3 dx =$$

### < 定積分の置換積分法 3 >

例題  $\int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$  を求めよ。

(解)  $u = 3x - \frac{\pi}{2}$  とおくと  $\frac{du}{dx} = \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)' = 3$   
より

$$\int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \times 3 dx = \int_0^\pi \cos(u) \frac{du}{dx} dx$$

の場合は前ページの方法が使える。そこで問題を式変形して以下のように求める。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \times 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{x=0}^{x=\pi} \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{3} \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{5}{2}\pi} \cos(u) du \\ &= \frac{1}{3} \left[ \sin(u) \right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{3} \left\{ \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \{ 1 - (-1) \} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

問 以下の定積分を求めよ。

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x - \pi) dx$

(2)  $\int_0^\pi \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

(3)  $\int_{-1}^2 (2x - 1)^3 dx$

### < 定積分の置換積分法 4 >

例 前ページの例題  $\int_0^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$  を以下のように解く。

$$u = 3x - \frac{\pi}{2} \quad \text{とおくと} \quad x = \frac{1}{3}u + \frac{\pi}{6}$$

より

$$\frac{dx}{du} = \left(\frac{1}{3}u + \frac{\pi}{6}\right)' = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx &= \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{5}{2}\pi} \cos(u) \frac{dx}{du} \cdot du \\ &= \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{5}{2}\pi} \cos(u) \frac{1}{3} du = \left[\frac{1}{3} \sin(u)\right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{5}{2}\pi} \\ &= \frac{1}{3} \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) - \frac{1}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

一般に合成関数  $f(g(x))$  の定積分の場合は、 $u = g(x)$  とおくと

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x)) dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f(u) \frac{dx}{du} du}$$

となる。ただし

$$x = a \text{ のとき } u = \alpha, \quad x = b \text{ のとき } u = \beta$$

である。

問 次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_\pi^{3\pi} \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

(2)  $\int_0^\pi \sin(4x - 3\pi) dx$

## < 定積分の置換積分法 5 >

例題  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  を求めよ。

(解) この問題は特別なケースであり、以下のようにおくとうまくできる。

$$x = \sin u \quad \text{とおくと} \quad \frac{dx}{du} = (\sin u)' = \cos u$$

であり

$$\frac{1}{2} = \sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad 1 = \sin(90^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

となるから、前ページの方法によって以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{du} du \\ &= \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{1-\sin^2 u} \right) \cos(u) du = \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) \right\} du = \left[ \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin(2u) \right]_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \\ &= \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(\pi) \right) - \left( \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

(注) ここで以下の三角関数の性質を使った。

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1, \quad \cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2} \quad (\text{半角の公式})$$

問  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$  を求めよ。

## < 定積分の部分積分 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

例 (1)  $\int_2^4 (x-2)(x-4)^2 dx = \int_2^4 (x-2) \times \left\{ \frac{(x-4)^3}{3} \right\}' dx$

$$= \left[ (x-2) \frac{(x-4)^3}{3} \right]_2^4 - \int_2^4 (x-2)' \times \frac{(x-4)^3}{3} dx$$
$$= (0-0) - \frac{1}{3} \int_2^4 (x-4)^3 dx$$
$$= -\frac{1}{3} \left[ \frac{(x-4)^4}{4} \right]_2^4 = -\frac{1}{3} \left( 0 - \frac{(-2)^4}{4} \right) = \frac{4}{3}$$

(2)  $\int_0^\pi x \cos x dx = \int_0^\pi x \times (\sin x)' dx$

$$= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \sin x dx$$
$$= (\pi \sin \pi - 0) - \int_0^\pi \sin x dx$$
$$= -[-\cos x]_0^\pi = -\{-\cos \pi - (-\cos 0)\} = -2$$

問 次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_0^1 x(x-1)^5 dx$

(2)  $\int_1^e x \log x dx$

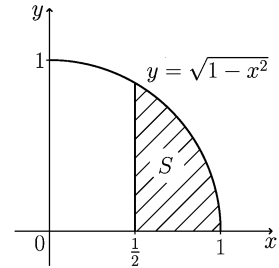
## < 面積 1 >

$a \leq x \leq b$  で  $f(x) \geq 0$  のとき定積分  $\int_a^b f(x) dx$  は曲線  $y = f(x)$

と  $x$  軸および直線  $x = a$  と  $x = b$  とで囲まれた部分の面積を表す。

例 1 半径 1 の円の一部である右図のような  
斜線部分の面積  $S$  は、9 ページの例題より

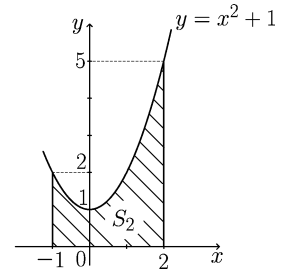
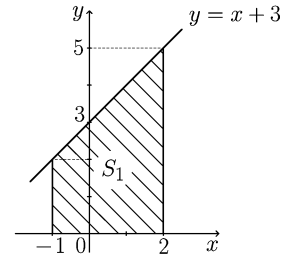
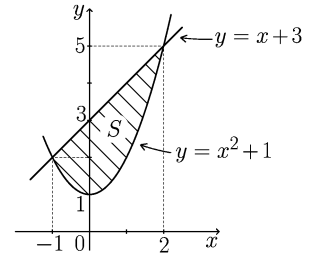
$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$



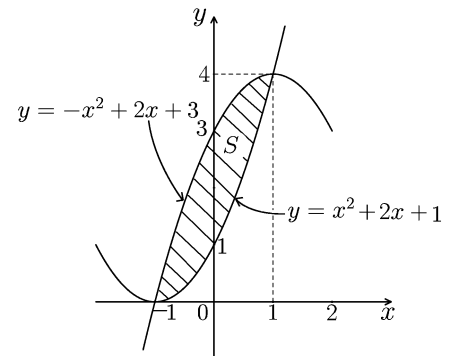
例 2 直線  $y = x + 3$  と曲線  $y = x^2 + 1$  とで  
囲まれた部分の面積  $S$  を求める。

右図のような斜線部分の面積  $S_1, S_2$   
を考えると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 = \int_{-1}^2 (x+3) dx - \int_{-1}^2 (x^2+1) dx \\ &= \int_{-1}^2 \{(x+3) - (x^2+1)\} dx = \int_{-1}^2 \{-x^2 + x + 2\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left( -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



問 曲線  $y = -x^2 + 2x + 3$  と  $y = x^2 + 2x + 1$   
で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。



## < 面積 2 >

例 直線  $y = x - 1$  と曲線  $y = x^2 - 3$  とで  
囲まれた部分の面積  $S$  を求める。

直線と曲線を共に  $y$  軸方向に 4  
だけ平行移動させると、

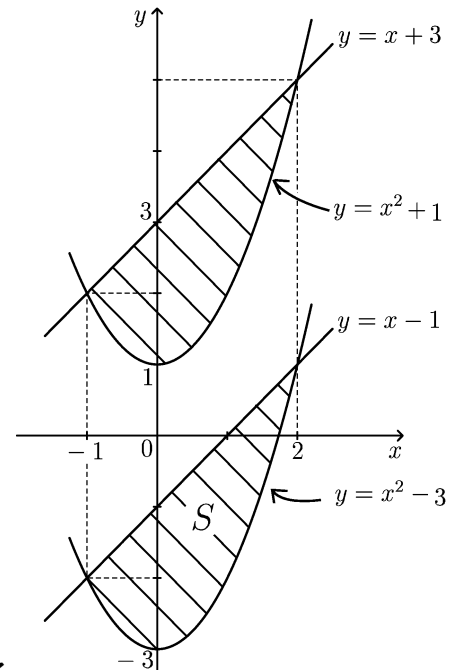
$y = x - 1$  は  $y = x + 3$  に

$y = x^2 - 3$  は  $y = x^2 + 1$  に移る。

$S$  は  $y = x + 3$  と  $y = x^2 + 1$  とで  
囲まれた部分の面積と等しいから  
前ページの例より

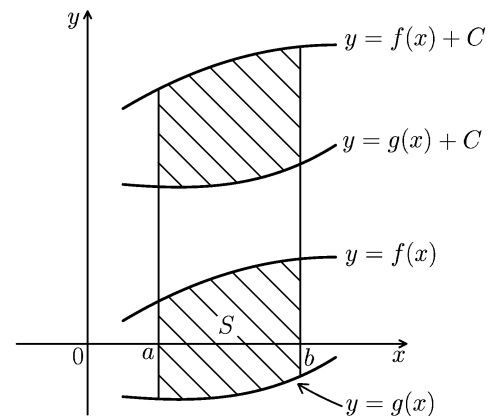
$$S = \int_{-1}^2 \{(x + 3) - (x^2 + 1)\} dx = \frac{9}{2}$$

(注)  $S = \int_{-1}^2 \{(x - 1) - (x^2 - 3)\} dx$  としても求まる。

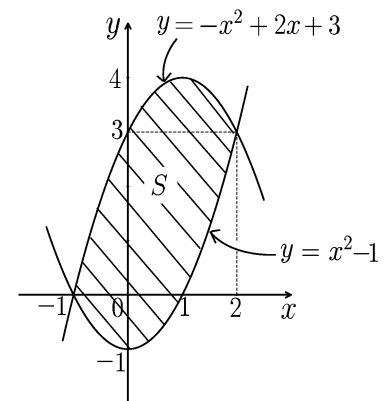


問 1 右図のように曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  と  
曲線  $x = a$ ,  $x = b$  とで囲まれた部分  
の面積  $S$  を  $f(x)$  と  $g(x)$  に関する  
積分で表せ。

(ただし  $g(x) < f(x)$  とする)



問 2 曲線  $y = -x^2 + 2x + 3$  と  $y = x^2 - 1$   
で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。



## < 体積 1 >

例 図1のような底面が(斜辺  $5\sqrt{2}$  の)直角二等辺三角形で高さが7の三角錐  $OABC$  の体積  $V$  を求めたい。  $OC$  を  $n$  等分し、図2のような階段状の立体の体積  $V_n$  で近似する。

この階段状の立体は厚さ  $\frac{7}{n}$  の三角柱の集まりであり、その体積を上から順に

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

とおくと、

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

となる。第  $k$  番目の三角柱の体積を  $v_k$  とする。図3のように  $O$  からの距離を  $x_k$  , 二等辺三角形の一辺の長さを  $y_k$  とおくと、

$$y_k = x_k \times \frac{5}{7}, \quad x_k = \frac{7}{n} \times k$$

であるから、図4より

$$v_k = \frac{1}{2} \times y_k \times y_k \times \frac{7}{n} = \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times k^2$$

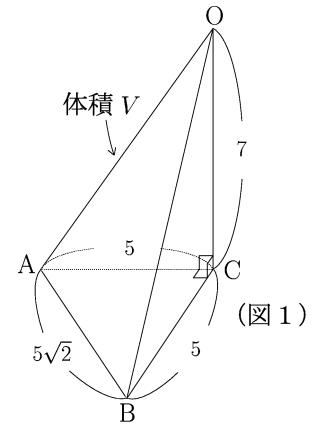
となる。よって

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 1^2 + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 2^2 + \dots + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times n^2 \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \{1^2 + 2^2 + \dots + n^2\} \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{5^2 \times 7}{12} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

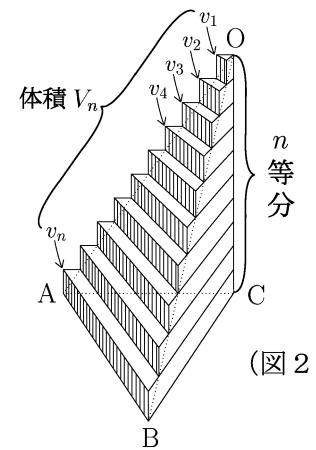
となる。

問  $n \rightarrow \infty$  として三角錐の体積  $V$  を求めよ。

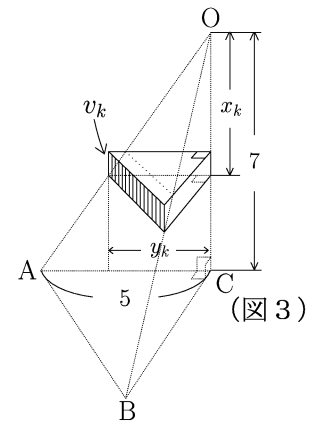
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n =$$



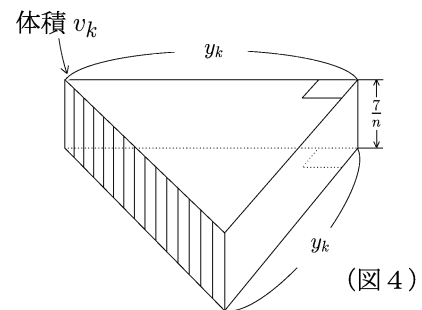
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

## < 体積 2 >

例 前ページの三角錐の体積  $V$  を以下のように求める。前ページの図3で  $OBC$  を下にすると右の図1のようになる。  $OC$  を  $n$  等分したとき、小区間の幅を  $h$  とすると、

$$h = \frac{7}{n}, \quad x_k = kh \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

となる。そこで  $k$  番目の三角柱の底面積を  $f(x_k)$  とすると、図2より

$$f(x_k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{7}x_k\right)^2 = \frac{25}{98}(x_k)^2$$

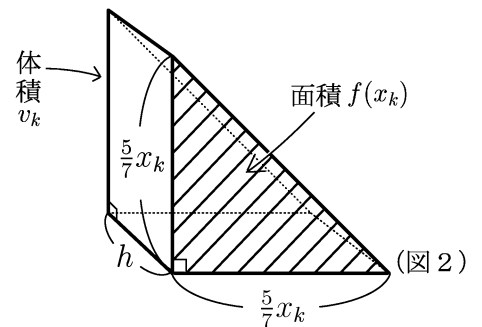
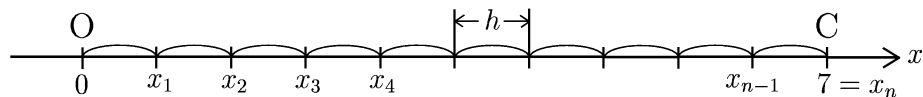
であり、小三角形の体積  $v_k$  は

$$v_k = f(x_k) \times h \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

となる。従って前ページの図2の階段状の立体の体積  $V_n$  は

$$\begin{aligned} V_n &= v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ &= \{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\}h \end{aligned}$$

である。ここで  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は区間  $[0 \leq x \leq 7]$  を  $n$  等分した分点



である。  $h$  は小区間の幅であるから、  $n \rightarrow \infty$  とした極限は、定積分の定義より

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\}h = \int_0^7 f(x)dx$$

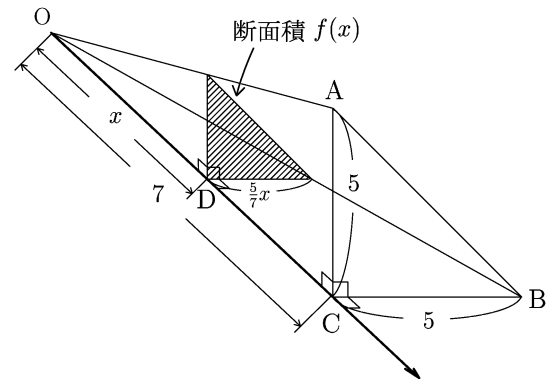
となる。

問  $f(x_k) = \frac{25}{98}(x_k)^2$  より  $f(x) = \frac{25}{98}x^2$  である。次の定積分を計算することにより、  $V$  を求めよ。

$$V = \int_0^7 f(x)dx =$$

### < 体積 3 >

- 例 1 前ページの計算を簡単にまとめると以下のようになる。  
三角錐の頂点 O からの距離が  $x$  である (OC 上の) 点を D とする。



点 D を通り、直線 OC に垂直な平面で切った断面の面積を  $f(x)$  とおくと

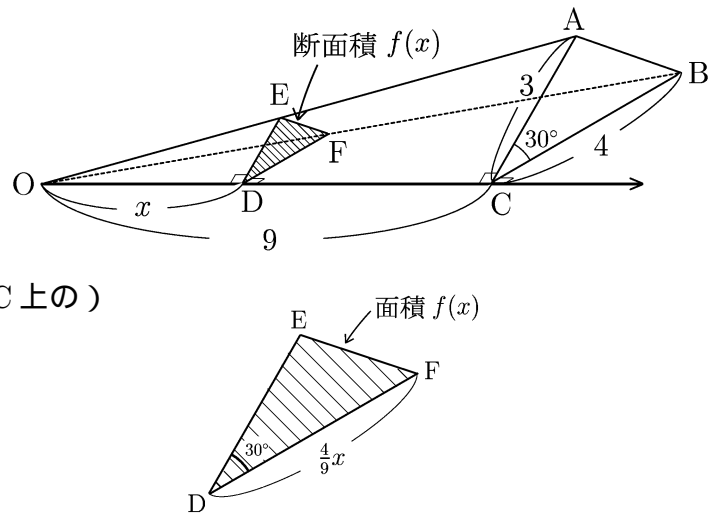
$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{7}x\right)^2 = \frac{25}{98}x^2$$

となる。三角錐 OABC の体積  $V$  は断面面積  $f(x)$  の  $x = 0$  から  $x = 7$  までの定積分

$$V = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx$$

で求まる。

- 例 2 底面が右図のような三角形 ABC で高さが 9 である三角錐 OABC の体積  $V$  を求めたい。  
O からの距離が  $x$  である (OC 上の) 点を D とし、点 D を通り直線 OC に垂直な平面で切った断面面積 DEF の面積を  $f(x)$  とする。



問 例 2 の場合に次の問に答えよ。

- (1) 断面面積  $f(x)$  を  $x$  で表せ。(ヒント  $x : DE = 9 : 3$ )
- (2) 次の定積分を計算することにより、体積  $V$  を求めよ

$$V = \int_0^9 f(x)dx =$$

### < 体積 4 >

例 一辺の長さが2の正三角形が底面で、  
高さが5の三角錐 OABC の  
体積  $V$  を求めたい。

図2のように三角錐を横にし、  
頂点Oから底面への垂線を  
 $x$ 軸とする。頂点からの距離  
が  $x$  である平面で切りとった  
断面 DEF の面積を  $f(x)$

とおく。三角形 DEF は一辺が  $\frac{2}{5}x$  の正三角形であるから、

その面積  $f(x)$  は

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \left(\frac{2}{5}x\right) \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{25}x^2$$

となる。よって三角錐の体積  $V$  は

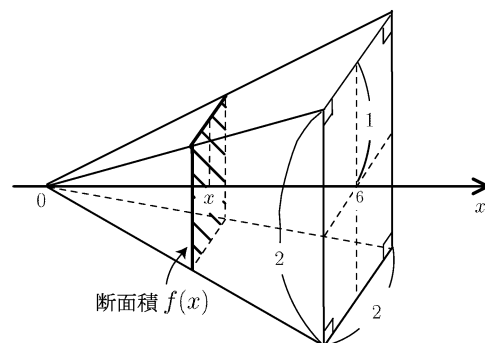
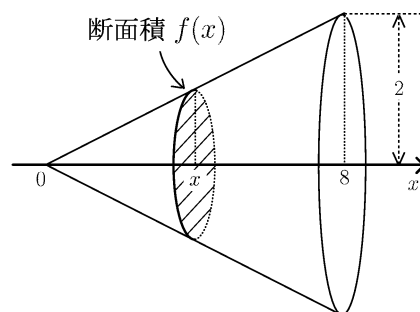
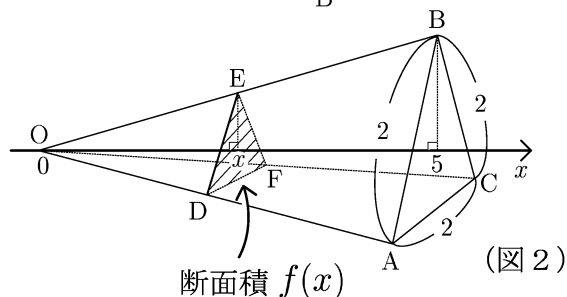
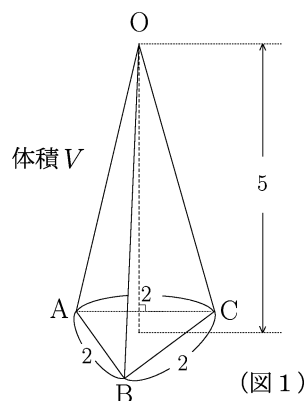
$$V = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 \frac{\sqrt{3}}{25}x^2dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{75}x^3\right]_0^5 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

問1 底面が半径2の円で、高さが8  
の円錐の体積  $V$  を求めたい。  
右図の断面積  $f(x)$  と体積  $V$  を  
求めよ。

$$f(x) = \quad , V =$$

問2 底面が一辺2の正方形で、高さが6  
の四角錐の体積  $V$  を求めたい。  
右図の断面積  $f(x)$  と体積  $V$  を  
求めよ。

$$f(x) = \quad , V =$$



## < 体積 5 >

前ページの例からわかるように、ある立体が図1のように基準線 ( $x$  軸) に垂直な断面の集まりと見なされるとき、断面積  $f(x)$  がわかっていれば図1の立体の体積  $V$  は

$$V = \int_a^b f(x) dx$$

で求められる。

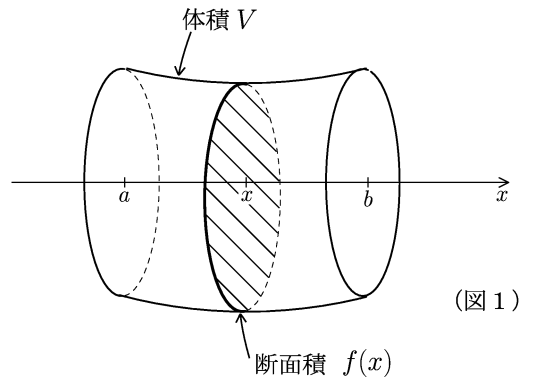
例 図2の斜線部分を  $x$  軸のまわりに一回転してできた立体図は図3のような立体である。図3の斜線部分の断面は半径  $\sqrt{4-x^2}$  の円であるから、その断面積  $f(x)$  は

$$f(x) = \pi(\sqrt{4-x^2})^2 = \pi(4-x^2)$$

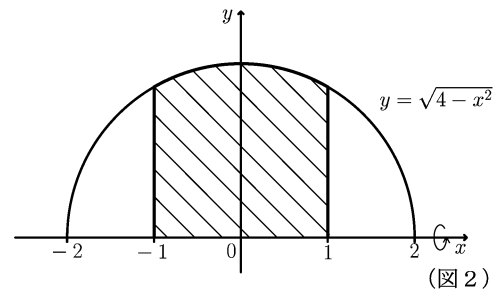
となる。よって図3の立体の体積  $V$  は

$$V = \int_{-1}^1 \pi(4-x^2) dx = \pi \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{22}{3}\pi$$

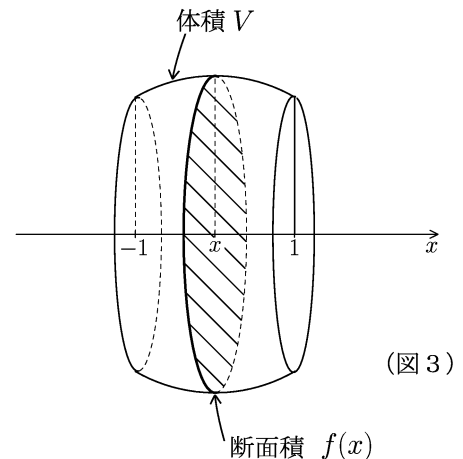
問 半径  $r$  の球は図4の斜線部分を  $x$  軸のまわりに一回転してできた立体と考えられる。例を参考にして半径  $r$  の球の体積  $V$  を求めよ。



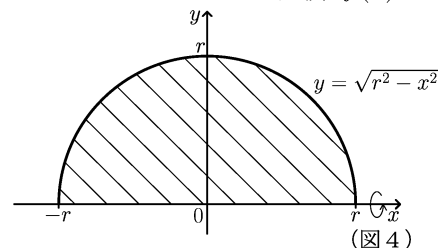
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

## < 体積 6 >

ある立体が図1のように基準線 ( $x$  軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき断面積  $S(x)$  がわかっているならば、図1の立体の体積  $V$  は

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

で求められる。

図2のように、曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および直線  $x = a$  と  $x = b$  で囲まれた部分を  $x$  軸のまわりに回転してできた立体の体積  $V$  は、断面が半径  $f(x)$  の円であるから

$$S(x) = \pi \{f(x)\}^2$$

より

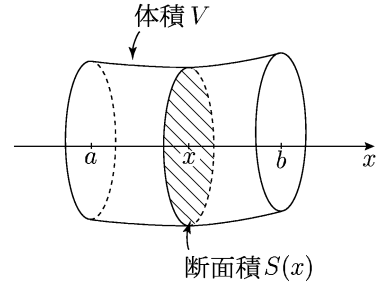
$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

となる。

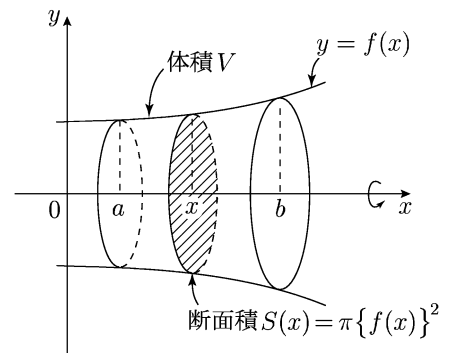
**例** 底面が半径  $r$  の円で高さ  $h$  の円錐の体積  $V$  を求めたい。この円錐は図3の斜線部分を  $x$  軸のまわりに回転してできた回転体であるから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{\pi r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{\pi}{3}r^2h \end{aligned}$$

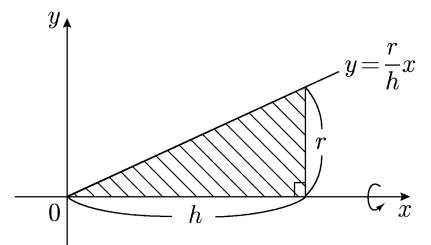
**問** 図4の斜線部分を  $x$  軸のまわりに回転してできた回転体の体積  $V$  を  $\theta$  を用いて (出来るだけ簡単に) 表せ。(ヒント  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ )



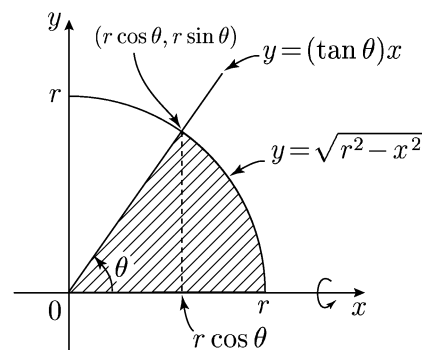
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)



## <体積8>

例 平面  $z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + 2$  と  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面及び平面  $x = 3$  と平面  $y = 4$  で囲まれた立体の体積  $V$  を求めたい。

図2のように、 $x$  軸の座標が  $x$  である平面で切り取った断面の面積を  $S(x)$  とすると、 $S(x)$  は図3の斜線部分の面積であるから、 $x$  を定数と考えて、 $y$  で積分すれば

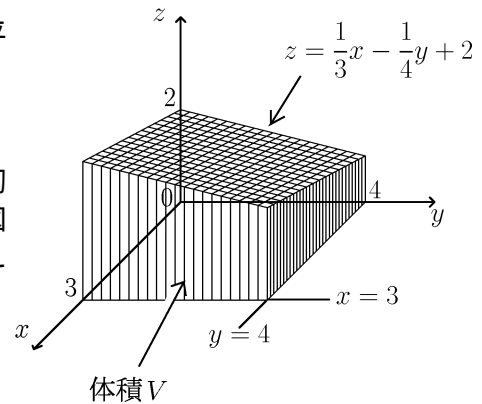
$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^4 \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + 2 \right) dy \\ &= \left[ \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 + 2y \right]_{y=0}^{y=4} \\ &= \frac{4}{3}x - \frac{4^2}{8} + 2 \times 4 - 0 = \frac{4}{3}x + 6 \end{aligned}$$

となる。よって体積  $V$  は

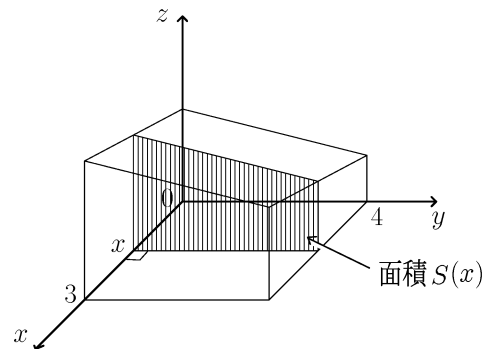
$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(x) dx \\ &= \int_0^3 \left( \frac{4}{3}x + 6 \right) dx = \left[ \frac{2}{3}x^2 + 6x \right]_0^3 = 24 \end{aligned}$$

(注) 図1の立体は前ページと同じ立体である。

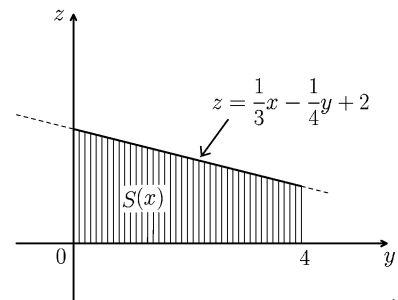
問 平面  $z = 5 - x + 0.2y$  と  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面及び平面  $x = 2$  と平面  $y = 3$  で囲まれた立体の体積  $V$  を求めよ。



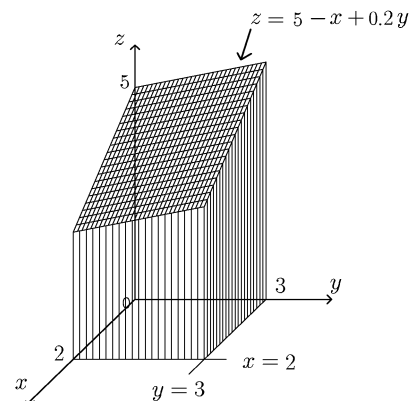
(図1)



(図2)



(図3)



### < 体積 9 >

例 曲面  $z = 4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2$  と  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面および平面  $x = 2$  と平面  $y = 3$  とで囲まれた立体の体積  $V$  を求めたい。

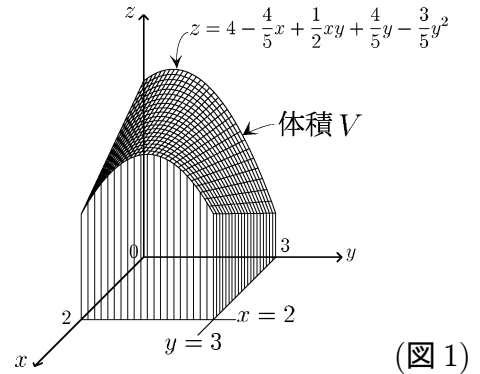
図2のように、 $x$  軸の座標が  $x$  である平面で切り取った断面の面積を  $S(x)$  とおくと、 $S(x)$  は図3の斜線部分の面積であるから、 $x$  を定数と考えると、

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^3 \left( 4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2 \right) dy \\ &= \left[ 4y - \frac{4}{5}xy + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{2}{5}y^2 - \frac{1}{5}y^3 \right]_{y=0}^{y=3} \\ &= 12 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{4}x + \frac{18}{5} - \frac{27}{5} - 0 \\ &= \frac{51}{5} - \frac{3}{20}x \end{aligned}$$

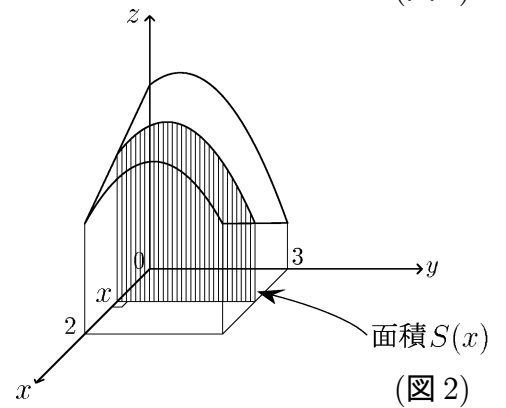
である。よって体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{51}{5} - \frac{3}{20}x \right) dx = \left[ \frac{51}{5}x - \frac{3}{40}x^2 \right]_0^2 = \frac{201}{10} \end{aligned}$$

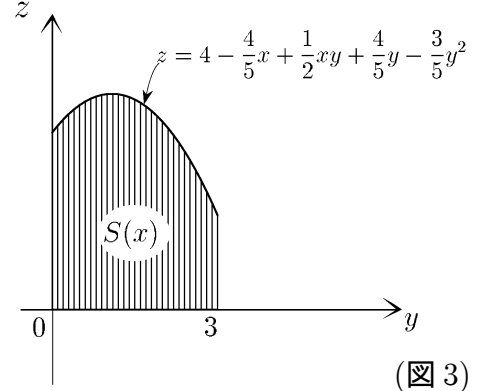
問 曲面  $z = 3 - \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{2} + 2y - y^2$  と  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面および平面  $x = 2$  と平面  $y = 3$  とで囲まれた立体の体積  $V$  を求めよ。



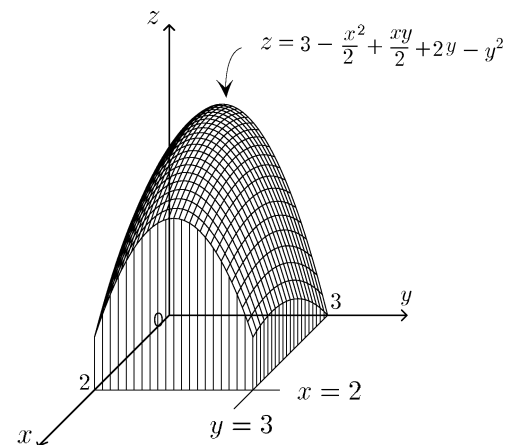
(図1)



(図2)



(図3)



## <体積10>

例 立体の体積  $V$  を求めるのに、前ページでは、 $x$  軸に垂直な平面で切りとった断面積を  $x$  について積分して、 $V$  を求めた。

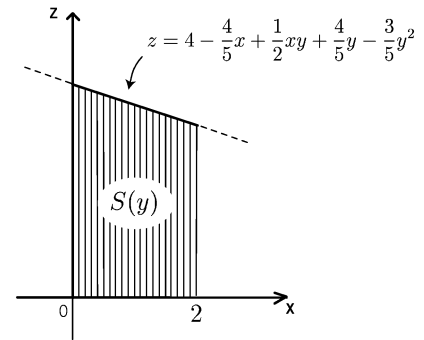
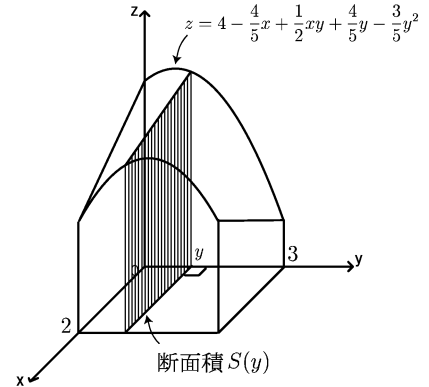
前ページと同じ立体の体積  $V$  を求めるのに、今度は  $y$  軸に垂直な平面で切りとった断面積を使う。

$y$  軸の座標が  $y$  である平面で切りとった断面の面積を  $S(y)$  とすると、 $S(y)$  は右図のような斜線部分の面積だから、 $y$  を定数と考えて、 $x$  で積分すれば、

$$\begin{aligned} S(y) &= \int_0^2 \left( 4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2 \right) dx \\ &= \left[ 4x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{4}{5}yx - \frac{3}{5}y^2x \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 8 - \frac{8}{5} + y + \frac{8}{5}y - \frac{6}{5}y^2 - 0 = \frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2 \end{aligned}$$

となる。よって体積  $V$  は

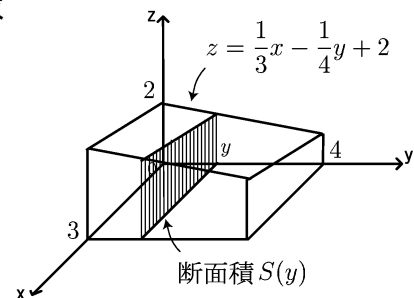
$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(y) dy = \int_0^3 \left( \frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2 \right) dy \\ &= \left[ \frac{32}{5}y + \frac{13}{10}y^2 - \frac{2}{5}y^3 \right]_0^3 = \frac{96}{5} + \frac{117}{10} - \frac{54}{5} - 0 = \frac{201}{10} \end{aligned}$$



問 20 ページの例と同じ立体の体積  $V$  を求めたい。 $y$  軸に垂直な平面で切りとった断面の面積  $S(y)$  を求め、 $V$  を  $S(y)$  を積分することによって求めよ。

$$S(y) =$$

$$V =$$



## < 累次積分 1 >

2変数関数  $f(x, y)$  が

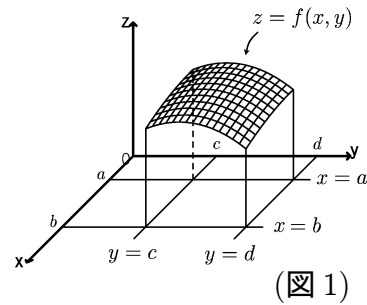
$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

の範囲で正 (プラス) であるとき、曲面  $z = f(x, y)$  と  $xy$  平面、および平面  $x = a, x = b, y = c, y = d$  で囲まれた部分の体積を  $V$  とする。図 2 より

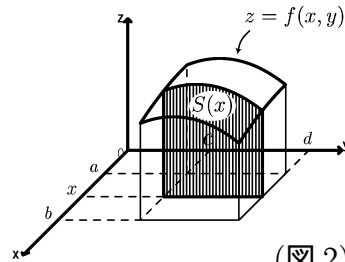
$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad S(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

だから

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$



(図 1)



(図 2)

となる。この種の積分を <sup>るいじ</sup>累次積分または <sup>ちくじ</sup>逐次積分という。この積分を計算するには、まず  $x$  を定数と思って  $y$  に関する定積分を計算して、 $x$  の関数  $S(x)$  が得られたら、この関数を  $x$  で積分すればよい。

例

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \left\{ \int_2^3 (4 - x + xy + y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \left[ (4 - x)y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \left( (4 - x) \times 3 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{3} \right) - \left( (4 - x) \times 2 + \frac{4}{2}x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \frac{31}{3} + \frac{3}{2}x \right\} dx = \left[ \frac{31}{3}x + \frac{3}{4}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{151}{12} \end{aligned}$$

問 次の累次積分を計算せよ。

$$\int_1^4 \left\{ \int_1^2 (3 - 6x^2 + 4xy) dy \right\} dx$$

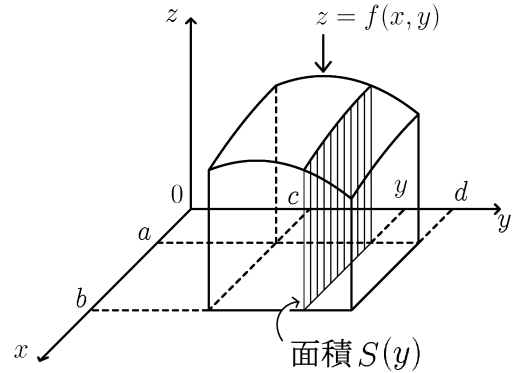
## < 累次積分 2 >

$f(x, y) > 0$  のとき、曲面  $z = f(x, y)$  と  $xy$  平面及び平面  $x = a$ 、 $x = b$ 、 $y = c$ 、 $y = d$  で囲まれた部分の体積  $V$  は、前ページより

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$

であった。一方、右図より

$$V = \int_c^d S(y) dy, \quad S(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$



だから、

$$V = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

である。よって

$$\boxed{\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy}$$

が成り立つ。これを累次積分の順序交換可能性という。

例

$$\begin{aligned} \int_2^3 \left\{ \int_1^2 (4 - x + xy + y^2) dx \right\} dy &= \int_2^3 \left\{ \int_1^2 (4 + y^2 + (y - 1)x) dx \right\} dy \\ &= \int_2^3 \left\{ \left[ (4 + y^2)x + (y - 1) \times \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} \right\} dy \\ &= \int_2^3 \left\{ \left( (4 + y^2) \times 2 + (y - 1) \times \frac{4}{2} \right) - \left( (4 + y^2) + (y - 1) \times \frac{1}{2} \right) \right\} dy \\ &= \int_2^3 \left\{ y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \right\} dy = \left[ \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{5}{2}y \right]_{y=2}^{y=3} = \frac{151}{12} \end{aligned}$$

問 次の累次積分を計算せよ。

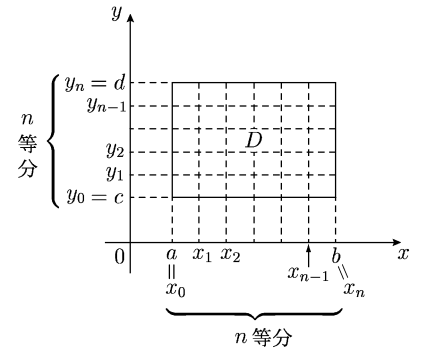
$$\int_2^3 \left\{ \int_1^2 (4 - x + xy + y^2) dx \right\} dy$$

## < 長方形領域の2重積分 1 >

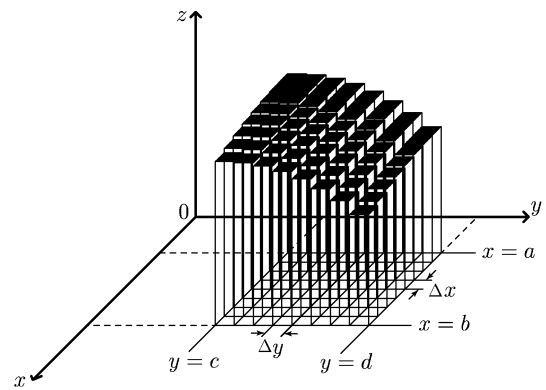
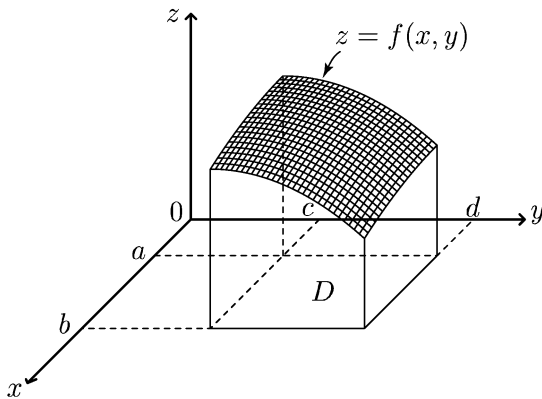
$xy$  平面上の長方形領域  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  における2変数関数  $z = f(x, y)$  の2重積分を

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

(ただし  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ,  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ )



で定義する。 $f > 0$  ならば左図の立体の体積を意味し、それを右図の小長方形の和で近似している。



体積を累次積分で求めたように、 $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

が成立する。

例  $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$  のとき

$$\begin{aligned} \iint_D (1 + 2xy) dx dy &= \int_1^2 \left\{ \int_0^3 (1 + 2xy) dy \right\} dx = \int_1^2 \left\{ [y + xy^2]_{y=0}^{y=3} \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ (3 + 9x) - 0 \right\} dx = \left[ 3x + \frac{9}{2}x^2 \right]_1^2 = (6 + 18) - \left( 3 + \frac{9}{2} \right) = \frac{33}{2} \end{aligned}$$

問  $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$  のとき、次の2重積分の値を求めよ。

$$\iint_D (2xy + 3y^2) dx dy$$

## < 長方形領域の2重積分2 >

例  $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$  のとき

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 \cos y \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_1^4 x^2 \cos y \, dx \right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[ \frac{x^3}{3} \cos y \right]_{x=1}^{x=4} \right\} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{64}{3} \cos y - \frac{1}{3} \cos y \right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{21 \cos y\} dy = \left[ 21 \sin y \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = 21\end{aligned}$$

(別解)

$$\iint_D x^2 \times \cos y \, dy = \int_1^4 x^2 \, dx \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=1}^{x=4} \times \left[ \sin y \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = 21 \times 1 = 21$$

この例のように2変数関数  $f(x, y)$  が  $x$  の関数  $g(x)$  と  $y$  の関数  $k(y)$  との積  $f(x, y) = g(x) \times k(y)$  となっているとき、長方形領域における2重積分は、( $x$ に関する定積分)  $\times$  ( $y$ に関する定積分)になる。すなわち

$$\iint_D g(x)k(y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \times \left( \int_c^d k(y) dy \right)$$

ただし  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

となる。

問 次の重積分の値を求めよ。

(1)  $\iint_D x^3 \sin y \, dx dy =$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$$

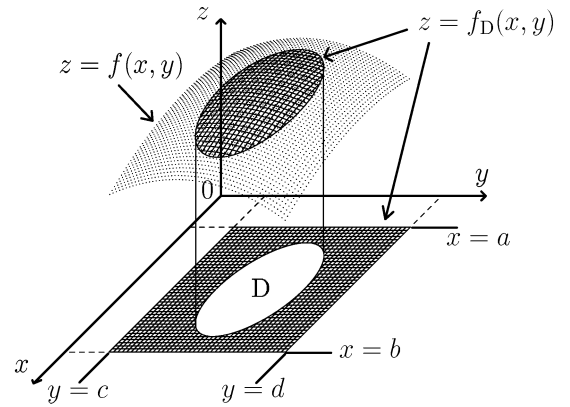
(2)  $\iint_D e^{-2x-3y} \, dx dy =$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

## < 一般領域の2重積分1 >

$xy$  平面上の有界領域  $D$  に対し、 $D$  が領域  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  に含まれる様に定数  $a, b, c, d$  をとる。

一般の2変数関数  $f(x, y)$  に対して、領域  $D$  における2重積分を次式で定義する。



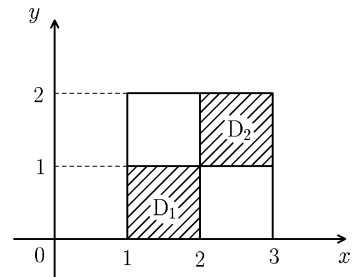
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f_D(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_D(x, y) dx \right\} dy$$

ただし、

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \text{ が } D \text{ の点} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$$

である。右上図では、上部の曲面が  $z = f(x, y)$  を表し、 $D$  以外で0になっている濃い曲面が  $z = f_D(x, y)$  である。 $f > 0$  のとき、 $D$  における2重積分の値は、底面が  $D$  である柱上の立体の体積を意味する。

例 右図の斜線部分を領域  $D$  とする。今、  
 $D_1 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 $D_2 = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$   
 と置くと、 $D$  は  $D_1$  と  $D_2$  の和集合であるから、2重積分の定義より、



$$\iint_D (x + y) dx dy = \iint_{D_1} (x + y) dx dy + \iint_{D_2} (x + y) dx dy$$

が成り立つ。

問 例の計算を完成せよ。

$$\iint_D (x + y) dx dy =$$

## <一般領域の2重積分2>

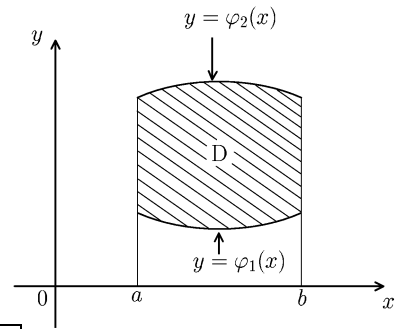
$xy$  平面上の領域  $D$  が、2つの曲線  $y = \varphi_1(x)$ 、 $y = \varphi_2(x)$  と2つの直線  $x = a$ 、 $x = b$  とで囲まれているとき、すなわち

$$D = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

となっているとき、2変数関数  $f(x, y)$  の  $D$  における重積分は、累次積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

によって計算される。



例 領域  $D$  が、右図の斜線部分であるとき、 $D$  は、

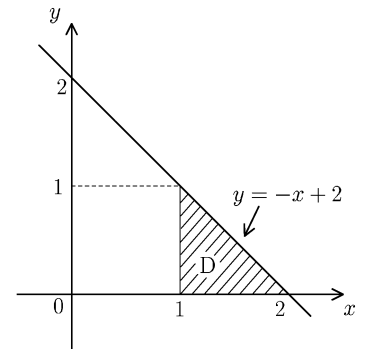
$$D = \{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -x + 2 \}$$

と表されるから、

$$\iint_D (x + y) dx dy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{-x+2} (x + y) dy \right\} dx$$

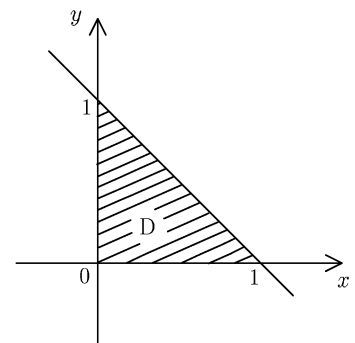
$$= \int_1^2 \left\{ \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=-x+2} \right\} dx = \int_1^2 \left\{ x(-x+2) + \frac{1}{2}(-x+2)^2 - 0 \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + 2 \right\} dx = \left[ -\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{5}{6}$$



問  $D$  が右図の斜線部分であるとき、2重積分

$$\iint_D (2xy - y^2) dx dy \quad \text{の値を求めよ。}$$



### < 一般領域の2重積分3 >

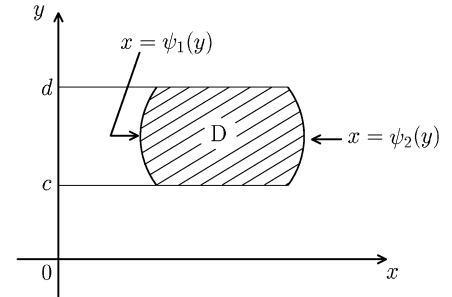
$xy$  平面上の領域  $D$  が

$$D = \{ (x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

と表されているとき、2変数関数  $f(x, y)$  の  $D$  における重積分は、累次積分

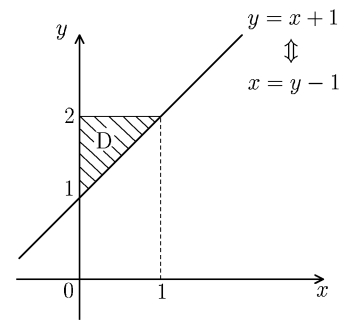
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

によって計算される。



例 領域  $D$  が右図の斜線の部分であるとき、 $D$  は  $D = \{ (x, y) : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y-1 \}$  と表されるから、

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_1^2 \left\{ \int_0^{y-1} (x^2 + y) dx \right\} dy \\ &= \int_1^2 \left\{ \left[ \frac{1}{3}x^3 + xy \right]_{x=0}^{x=y-1} \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \frac{1}{3}(y-1)^3 + y^2 - y \right\} dy \\ &= \left[ \frac{1}{12}(y-1)^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=2} = \left( \frac{1}{12} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left( 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{12} \end{aligned}$$



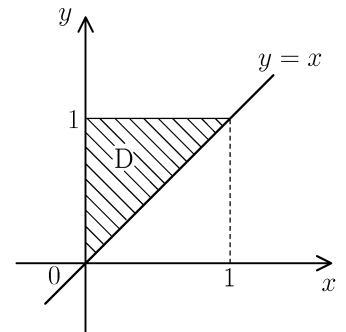
(注)  $D = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, x+1 \leq y \leq 2 \}$  と考えて

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_{x+1}^2 (x^2 + y) dy \right\} dx$$

を計算しても同じ答が出るが、この場合は例の様にやる方が累次積分の計算が楽になる

問  $D$  が右図の斜線部分であるとき、2重積分

$$\iint_D (x + xy) dx dy \text{ の値を求めよ。}$$

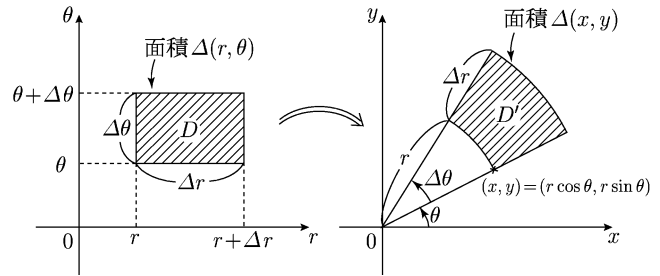


## <面積比>

例 極座標変換

$$(1) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

は図1のような  $(r, \theta)$  平面上の長方形領域  $D$  を図2のような  $(x, y)$  平面上の領域  $D'$  に移す。領域  $D$  の面積を  $\Delta(r, \theta)$ 、領域  $D'$  の面積を  $\Delta(x, y)$  とすると、 $D$  と  $D'$  の面積比は



(図1)

(図2)

$$\frac{\Delta(x, y)}{\Delta(r, \theta)} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta\theta)(r + \Delta r)^2 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)r^2}{(\Delta r)(\Delta\theta)} = r + \frac{1}{2}(\Delta r) \dots\dots(2)$$

ここで  $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0$  の極限を  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  と書くことにすれば、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta(x, y)}{\Delta(r, \theta)} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0} \left( r + \frac{1}{2}\Delta r \right) = r \dots\dots(3)$$

となる。一方 の37ページの結果から、(1) のヤコビアンは  $J = r$  だから

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

この例から一般に  $u$  と  $v$  の関数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  に対して、微小領域の面積比をヤコビアン $J$ の絶対値

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = |J| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \text{の絶対値} \dots\dots(4)$$

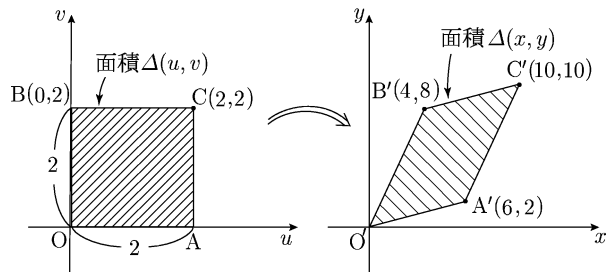
で定義する。

(注) ヤコビアンは負になる場合もあるので、面積比を表すために絶対値をつける。

問 一次変換

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = u + 4v \end{cases}$$

によって  $uv$  平面上の正方形領域  $OABC$ (図3) は、 $xy$  平面上の平行四辺形領域  $O'A'B'C'$ (図4) に移る。



(図3)

(図4)

(1)  $\Delta(u, v)$  と  $\Delta(x, y)$  を求め、その比を計算せよ。

$$\Delta(u, v) = \quad , \quad \Delta(x, y) = \quad , \quad \frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, v)} =$$

((ヒント)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の作る平行四辺形の面積は  $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$  の絶対値)

(2)  $x$  と  $y$  を  $u$  と  $v$  で偏微分して、ヤコビアン  $J$  を求めることによって面積比を求めよ。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} =$$

## < 重積分の変数変換 1 >

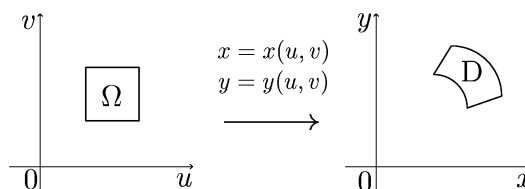
一変数関数の定積分の置換積分

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad \left( \begin{array}{l} x = x(u) \\ a = x(\alpha), b = x(\beta) \end{array} \right)$$

と同様に2変数関数  $f(x, y)$  に対し、 $x$  と  $y$  が  $u$  と  $v$  の関数であり、

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

によって、 $uv$  平面上の領域  $\Omega$  が  $xy$  平面上の領域  $D$  に移されるとき、



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

が成り立つ。ここで  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  は前ページの面積比である。

例題 領域  $D$  が右図の場合  $\iint_D (x + y) dx dy$  を求めよ。

解 前ページの問題より一次変換

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = u + 4v \end{cases}$$

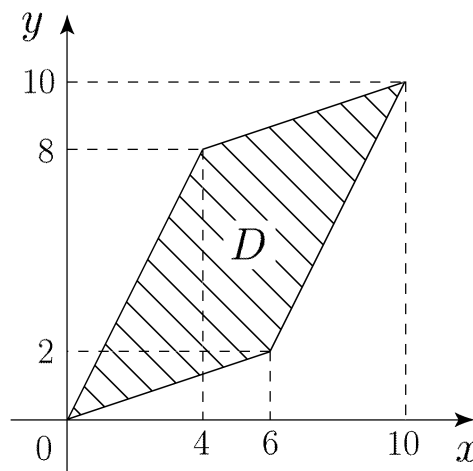
によって  $uv$  平面上の正方形領域

$$\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\}$$

は  $xy$  平面上の領域  $D$  に移る。

$$J = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

より  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 10$  だから



$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_{\Omega} ((3u + 2v) + (u + 4v)) 10 du dv = 10 \times \int_0^2 \left\{ \int_0^2 (4u + 6v) du \right\} dv \\ &= 10 \int_0^2 \left\{ [2u^2 + 6uv]_{u=0}^{u=2} \right\} dv = 10 \int_0^2 \{8 + 12v\} dv = 10 \times [8v + 6v^2]_{v=0}^{v=2} = 400 \end{aligned}$$

問 例題と同じ領域  $D$  に対し  $\iint_D (x - y) dx dy$  を求めよ。

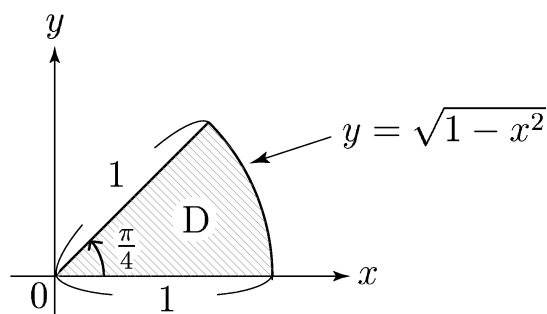
## < 重積分の変数変換 2 >

例題 領域 D が図 1 の場合に

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy \text{ を求めよ。}$$

解 極座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



(図 1)

によって  $r\theta$  平面の長方形領域

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} \begin{pmatrix} \text{半径 } r \text{ は } 0 \text{ から } 1 \text{ まで} \\ \text{角 } \theta \text{ は } 0 \text{ から } \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

は  $xy$  平面上の領域 D に移される。30 ページより極座標変換の面積比は

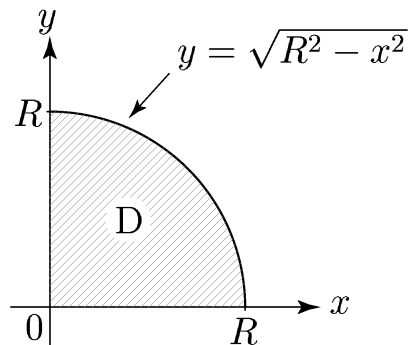
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

であるから

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{\Omega} e^{-(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} dr d\theta \\ &= \iint_{\Omega} e^{-r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^1 e^{-r^2} r dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=1} \right\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^0 \right\} d\theta = \frac{1}{2} (-e^{-1} + 1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

問 領域 D が図 2 の場合に

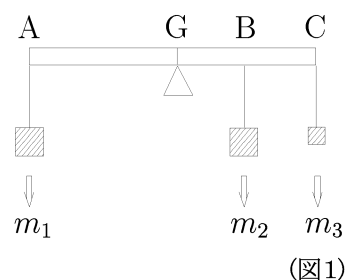
$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy \text{ を求めよ。}$$



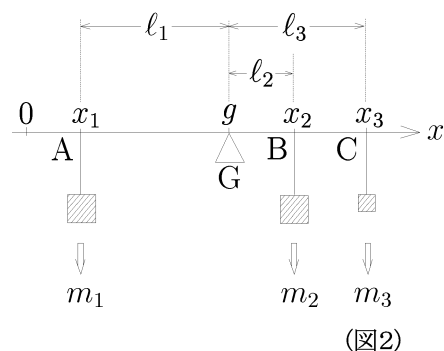
(図 2)

## < 質量と重心 1 >

例 細長い棒 AC に図 1 のようにおもり  $m_1, m_2, m_3$  がかかっているとする。棒自身のおもさを無視して重心 G の位置を求めたい。



この問題を図 2 のように数直線上におもり  $m_1, m_2, m_3$  がかかっていると考え、各点の座標を  $x_1, x_2, x_3$  として重心の座標  $g$  を求めたい。



重心の意味から

$$(1) \quad \begin{aligned} l_1 &= g - x_1, \\ l_2 &= x_2 - g, \quad l_3 = x_3 - g \end{aligned}$$

とおくと

$$(2) \quad m_1 \times l_1 = m_2 \times l_2 + m_3 \times l_3$$

が成り立つ。(2) 式に (1) を代入すると

$$\begin{aligned} \text{より} \quad m_1 g - m_1 x_1 &= (m_2 x_2 - m_2 g) + (m_3 x_3 - m_3 g) \\ (m_1 + m_2 + m_3) g &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \end{aligned}$$

ここで全質量を  $M = m_1 + m_2 + m_3$  とおくと

$$g = \frac{1}{M} \{ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \}$$

が成り立つ。

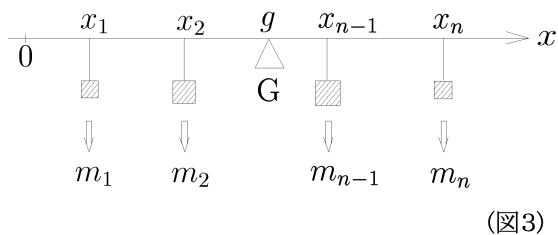
問 数直線上に  $n$  個のおもり

$$m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$$

が図 3 のようにかかっているとき重心 G の位置を全質量

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n$$

と  $m_1, \dots, m_n, x_1, \dots, x_n$  を使って表せ。



## < 質量と重心 2 >

例 野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 ( $x$  軸) に垂直な断面の断面積  $S(x)$  が分かっている場合、この立体の体積  $V$  は

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

であった。もしこのバットの材質が均一であれば、その質量  $M$  は体積の定数倍 ( $K$  倍) になると考えられるので

$$M = KV = \int_a^b KS(x) dx$$

と表される。この場合被積分関数  $KS(x)$  をこの立体の質量分布の密度関数という。

この立体の重心  $G$  の位置  $g$  (図 2) を求めたい。

区間  $[a, b]$  を  $n$  等分して、その分点を

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

とおき、それぞれ

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

のおもりがかかっているとする (図 3)。

このとき  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  とすると

$$m_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} KS(x) dx \doteq KS(x_k) \Delta x \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

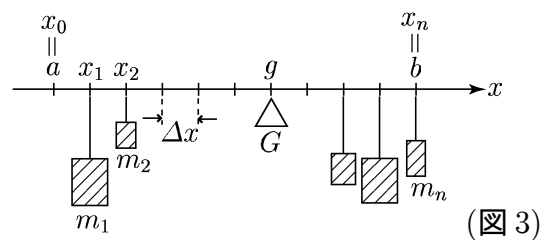
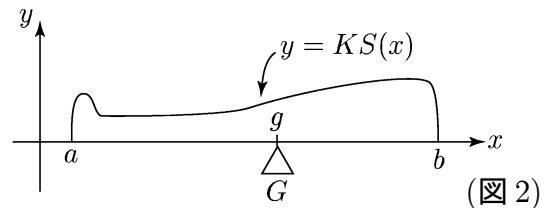
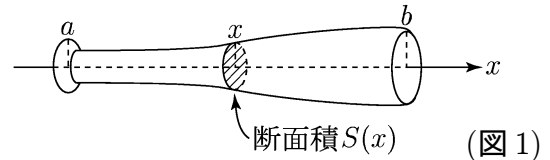
である。前ページの結果より

$$g = \frac{1}{M} \{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n\} \doteq \frac{1}{M} \{x_1 KS(x_1) + \dots + x_n KS(x_n)\} \Delta x$$

である。  $n \rightarrow \infty$  とすれば定積分の区分求積法による定義から

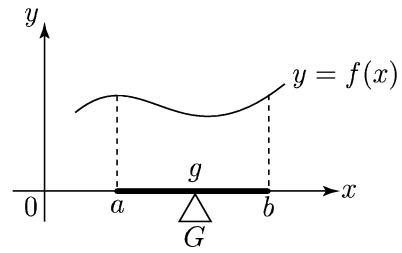
$$g = \frac{1}{M} \int_a^b x KS(x) dx = \frac{1}{\int_a^b KS(x) dx} \int_a^b x KS(x) dx$$

となる。



### < 質量と重心 3 >

数直線の区間  $[a, b]$  に質量があるとき、その質量分布の密度関数が  $f(x)$  であれば、全質量  $M$  と重心の座標  $g$  は



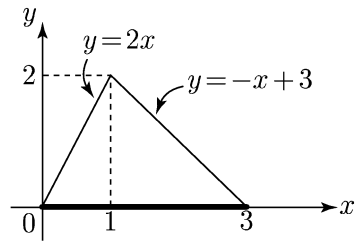
$$M = \int_a^b f(x)dx \quad , \quad g = \frac{1}{M} \int_a^b x f(x)dx$$

で表される。  $f(x)$  を単に密度関数とか重み関数などという。

例 数直線上の区間  $[0, 3]$  に質量があり、その密度関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 & : 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

である場合、全質量  $M$  と重心の座標  $g$  は



$$M = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^3 (-x + 3)dx = [x^2]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = 3$$

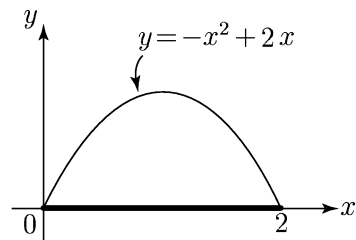
$$g = \frac{1}{M} \int_0^3 x f(x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x \times 2x dx + \frac{1}{3} \int_1^3 x \times (-x + 3)dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

問 数直線上の区間  $[0, 2]$  に質量があり、その密度関数  $f(x)$  が

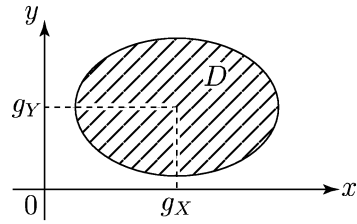
$$f(x) = -x^2 + 2x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

である場合、全質量  $M$  と重心の座標  $g$  を求めよ。



### <質量と重心4>

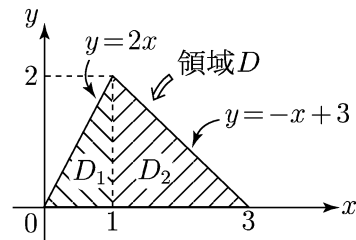
平面上の領域  $D$  に質量がある場合、その質量分布の密度関数が  $f(x, y)$  であれば、全質量  $M$  と重心の座標  $(g_X, g_Y)$  は



$$M = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad g_X = \frac{1}{M} \iint_D x f(x, y) dx dy, \quad g_Y = \frac{1}{M} \iint_D y f(x, y) dx dy$$

で表される。

例 平面上の領域  $D$  が右図の斜線部分の三角形とする。この三角形の重心の位置  $(g_X, g_Y)$  を求めたい。 $D$  にかかる質量は均一に1とする。(すなわち  $f(x, y) = 1$  である。) このとき全質量  $M$  は



$$M = \iint_D 1 dx dy = D \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

である。ここで  $D$  を  $D_1$  と  $D_2$  に分けると、

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq -x + 3\}$$

より

$$\begin{aligned} g_X &= \frac{1}{M} \iint_D x f(x, y) dx dy = \frac{1}{3} \iint_{D_1} x dx dy + \frac{1}{3} \iint_{D_2} x dx dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2x} x dy \right\} dx + \frac{1}{3} \int_1^3 \left\{ \int_0^{-x+3} x dy \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left\{ [xy]_{y=0}^{y=2x} \right\} dx + \frac{1}{3} \int_1^3 \left\{ [xy]_{y=0}^{y=-x+3} \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 2x^2 dx + \frac{1}{3} \int_1^3 (-x^2 + 3x) dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

問 例の場合に  $g_Y$  を求めよ。

## < 広義積分 1 >

定数  $a, b$  ( $a < b$ ) と関数  $f(x)$  に対し定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

を考える。今  $a \rightarrow -\infty$  ,  $b \rightarrow +\infty$  のときの極限值が存在する場合に

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \quad , \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

と表し, 広義の定積分または広義積分という。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \int_0^{\infty} e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} e^0 \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2e^{2b}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-3} x^{-3} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{3} b^{-3} + \frac{1}{3} (1)^{-3} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

問 次の値を求めよ。(ただし  $\lambda > 0$  ,  $r > 1$ )

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

$$(2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx =$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx =$$

## < 広義積分 2 >

重積分の広義積分も前のページと同様に考える。

**例題**  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$  に対して  $\iint_D e^{-2x-3y} dx dy$  を求めよ。

(解)  $R > 0$  に対し  $D_R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$  とする。

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-2x-3y} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-2x-3y} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-2x} dx \times \int_0^R e^{-3y} dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=R} \times \left[ -\frac{1}{3} e^{-3y} \right]_{y=0}^{y=R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-2R} + \frac{1}{2} \right) \times \left( -\frac{1}{3} e^{-3R} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2e^{2R}} + \frac{1}{2} \right) \times \left( -\frac{1}{3e^{3R}} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(注) 領域  $D$  がこの例の場合

$$\iint_D e^{-2x-3y} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2x-3y} dx dy$$

と略記する。

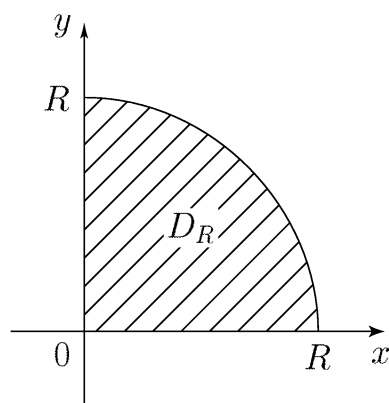
**問**  $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$  を求めたい。  $R > 0$  に対し

$$D_R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

とにおいて 32 ページの結果を使い、

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

を計算せよ。



### < 広義積分 3 >

積分は微分よりも難しい。たとえば  $e^{-x^2}$  は微分できるが、不定積分が求まらない。正確に言うと  $\int e^{-x^2} dx$  は初等関数（整関数、分数関数、指数、対数関数、三角関数等）では表されない。このような関数はたくさんある。たとえば  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1}{\log x}$ ,  $\frac{e^x}{x}$  など は不定積分が初等関数では表されない。（くわしくは岩波「数学公式」を参照。）しかし  $e^{-x^2}$  の広義積分は計算できる。実は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

である。

< 証明 > 前ページの結果より

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

である。一方 左辺は 36 ページと同様に考えると

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \times e^{-y^2} dx dy = \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \times \left( \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

であるから

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

より

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

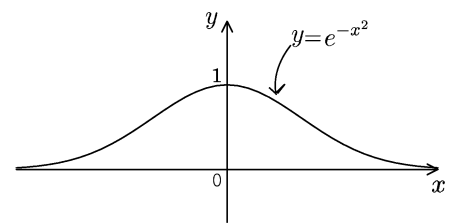
一方  $y = e^{-x^2}$  は、右図のように  $y$  軸対称であるから

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$$

であるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \times \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(証明終)



## < 広義積分 4 >

前ページの結果から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (*)$$

である。

例題  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  を求めよ。

(解) まず  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  を求める。(\*)の結果を使いたい。  $-\frac{x^2}{2} = -t^2$

となるように  $t$  をえらぶ。

$$\frac{x^2}{2} = t^2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow x = \sqrt{2}t$$

とおくと  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}$  より  $dx = \sqrt{2}dt$  であるから置換積分で変数変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

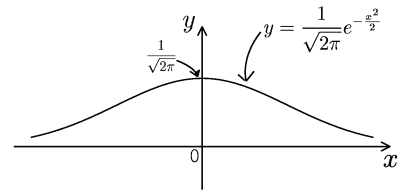
よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$$

(注)  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  を 正規分布の密度関数

または 誤差関数 (Error Function)

という。



問 次の積分値を求めよ。(ただし  $\lambda$  は正の定数とする)

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{6}} dx$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} dx$