高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

秋期入学者用

V

内容

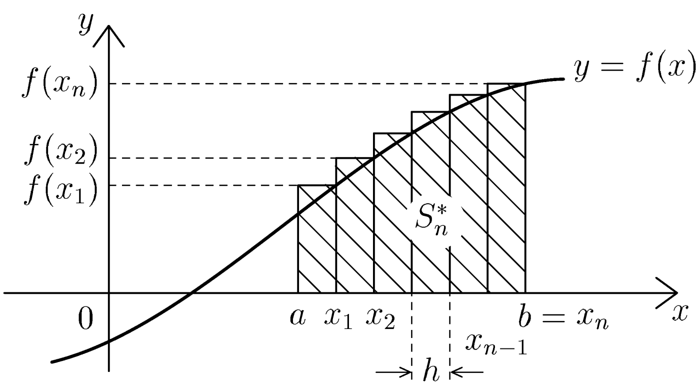
◎ 不定積分

◎ 数列の和

◎ 和の記号Σ

◎ 区分求積法

◎ 定積分の定義



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜原始関数＞

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

である。

問 次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 $=$

(2) x^5 の原始関数の一般形 $=$

(3) x^6 の原始関数の一般形 $=$

＜不定積分1＞

$F'(x)=f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の1つであり、その一般形は

$$F(x)+C \qquad \text{（}C\text{ は任意の定数）}$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x)=f(x)\ \text{のとき}\ \int f(x)dx=F(x)+C} \qquad \text{（}C\text{ は任意定数）}$$

である。記号 $\int$ はインテグラル $(integral)$ と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^2$ より $\displaystyle\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)'=x^3$ より $\displaystyle\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$

(注) 記号 $\displaystyle\int \boxed{}\,dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問1 前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4dx=$

(2) $\displaystyle\int x^5dx=$

(3) $\displaystyle\int x^6dx=$

問2 例と問1から次の不定積分を類推せよ。

$$\int x^ndx= \qquad\qquad\qquad\qquad (n\text{ は定数})$$

問3 問2の公式は n に例外がある。n は何であってはいけないか。

＜不定積分２＞

$\Big(F(x)\Big)' = f(x)$ のとき $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ である。

ここで、任意定数 C は**積分定数**と言われる。

例 $\big(x^{n+1}\big)' = (n+1)x^n$ より $n \neq -1$ であれば両辺を $n+1$ で割って

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$$

だから

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C} \qquad (n \neq -1)$$

である。ただし $n = -1$ の場合はこの式は当てはまらない。

問１ $x = x^1$、$1 = x^0$、$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$、$\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$、$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ と考えて、上の公式を使い、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x dx =$

(2) $\displaystyle\int 1 dx =$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x} dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} dx =$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

（注）次式の右辺の様に、略記することもある。

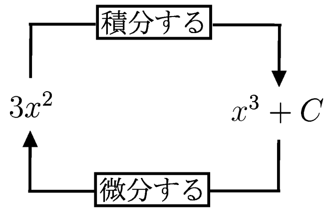
$$\int 1 dx = \int dx、\qquad \int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x^2}$$

問２ $n = -1$ のとき、次の不定積分を求めよ。

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx =$$

＜不定積分3＞

不定積分を求めることを**積分する**という。



例1　$(x^3)'=3x^2$　より　$\displaystyle\int 3x^2dx=x^3+C$

例2　$(\sin x)'=\cos x$　より　$\displaystyle\int \cos x dx=\sin x+C$

$\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　より　$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

問1　微分の公式から、次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int(-\sin x)\,dx=$

(2)　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=$

(3)　$\displaystyle\int e^x dx=$

(4)　$\displaystyle\int a^x\log a dx=$

(5)　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

例3　(1)　$\left(x^3\right)'=3x^2$　より両辺を3で割ると　$\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^2$　となる。これを積分で表すと

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C \text{ となる。}$$

(2)　$(2^x)'=2^x\log 2$ より　$\displaystyle\int 2^x dx=\frac{1}{\log 2}2^x+C$

問2　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int x^4dx=$

(2)　$\displaystyle\int\sin x dx=$

(3)　$\displaystyle\int a^x dx=$

＜不定積分 4＞

微分の性質

$$\Big(kf(x)\Big)' = k \times f'(x) \qquad （k \text{ は定数}）$$

$$\Big(f(x)+g(x)\Big)' = f'(x)+g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\boxed{\begin{aligned} \int kf(x)dx &= k \times \int f(x)dx \qquad （k \text{ は定数}） \\ \int \Big\{f(x)+g(x)\Big\}dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}}$$

が得られる。

例 1 $\displaystyle \int \left(9x^2-4x+3\right)dx = 9\int x^2dx - 4\int xdx + 3\int dx$

$$= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 3 \times x + C$$

$$= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \qquad （C \text{ は積分定数}）$$

（注）例の様な不定積分では、積分定数は 1 つにまとめて書いておけばよい。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int 5x^3dx =$　　　(2) $\displaystyle \int (4-7x)\,dx =$

(3) $\displaystyle \int \left(8x^3-6x+3\right)dx =$

例 2 $\displaystyle \int \left(-2x^2-3x+6\right)dx - \int \left(x^2-3x+5\right)dx$

$$= \int \Big\{\left(-2x^2-3x+6\right) - \left(x^2-3x+5\right)\Big\}dx = \int \left(-3x^2+1\right)dx = -x^3+x+C$$

問 2　例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int \left(8x^2-7x+2\right)dx + 2\int \left(-4x^2+3x-1\right)dx$$

$=$

<不定積分 5>

例 $\displaystyle\int (2x+1)^3 dx$ を求めたい。微分して $(\quad)^3$ となる関数の候補として $(\quad)^4$ を考えてみる。$(\quad)^4$ を (合成関数の微分法より) 微分してみると

$$\left((2x+1)^4\right)' = 4 \times (2x+1)^3 \times (2x+1)' = 8(2x+1)^3$$

となる。よって両辺を 8 で割ると

$$\left(\frac{1}{8}(2x+1)^4\right)' = (2x+1)^3$$

より

$$\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$$

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x+2)^5 dx =$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^7 dx =$

問 2 定数 $a,\ b,\ n$ に対して、次の不定積分を求めよ。
ただし $a \neq 0$、$n \neq -1$ とする。

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^4 dx =$

(2) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

問 3 問 2 の (2) の式を使って、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x+5}\, dx =$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-1)^3} dx =$

＜不定積分 6＞

例 (1) $\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。微分して $\cos(\quad)$ になる関数の候補として $\sin(\quad)$ を考えてみる。

$$\Big(\sin(3x+2)\Big)' = \cos(3x+2)\times(3x+2)' = 3\cos(3x+2) \quad \text{より}$$

$$\left(\frac{1}{3}\sin(3x+2)\right)' = \cos(3x+2)$$

よって

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{4x-3}dx$ を求めたい。微分して $\dfrac{1}{(\quad)}$ となる関数の候補として $\log|(\quad)|$ を考えてみる。

$$\Big(\log|4x-3|\Big)' = \frac{1}{4x-3}\times(4x-3)' = \frac{4}{4x-3} \quad \text{より}$$

$$\int \frac{1}{4x-3}dx = \frac{1}{4}\log|4x-3| + C$$

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(3x+4)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(4x-5)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}dx =$

(4) $\displaystyle\int e^{4x+5}dx =$

問 2 定数 a、b に対し、次の不定積分を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\int \cos(ax+b)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$

(4) $\displaystyle\int e^{ax+b}dx =$

＜積分記号＞

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big)=f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx=F(x)+C}$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big)=f(t) \text{ のとき } \int f(t)dt=F(t)+C}$$

のようになる。

例 1 $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$ より $\displaystyle\int 3x^2dx=x^3+C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right)=3t^2$ より $\displaystyle\int 3t^2dt=t^3+C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right)=3u^2$ より $\displaystyle\int 3u^2du=u^3+C$

例 2 (1) $\displaystyle\int\left(t^2-4t+3\right)dt=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+C$

(2) $\displaystyle\int \sin u\,du=-\cos u+C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r\,dr=\pi r^2+C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(5-9.8t)dt=$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2dr=$

(3) $\displaystyle\int e^u du=$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy=$

(5) $\displaystyle\int \sin u\,du=$

＜置換積分法1＞

例題 $\displaystyle\int \cos\left(x^3\right) \times 3x^2 dx$ を求めよ。

(解)　微分して cos(　) になる関数の候補として $\sin\left(x^3\right)$ を考える。

$$y = \sin\left(x^3\right) \quad 、\quad u = x^3$$

とおくと、合成関数の微分法より

$$\Big(\sin\left(x^3\right)\Big)' = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times \left(x^3\right)' = (\cos u) \times \left(3x^2\right) = \cos\left(x^3\right) \times 3x^2$$

より

$$\int \cos\left(x^3\right) \times 3x^2 dx = \sin\left(x^3\right) + C$$

(別解)　$u = x^3$ とおくと　$3x^2 = \left(x^3\right)' = \dfrac{du}{dx}$　より

$$\int \cos\left(x^3\right) \times 3x^2 dx = \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \int \cos(u) du = \sin(u) + C = \sin\left(x^3\right) + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos\left(x^4\right) \times 4x^3 dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos\left(x^5\right) \times 5x^4 dx =$

(3) $\displaystyle\int \cos\Big(g(x)\Big) \times g'(x) dx =$

＜置換積分法2＞

前ページの結果より

$$\int \cos\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx = \sin\Big(g(x)\Big) + C$$

が分かる。これを前ページの別解のように考える。

$$u = g(x) \quad \text{とおくと} \quad g'(x) = \frac{du}{dx} \quad \text{だから}$$

$$\int \cos\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx = \int \cos(u) \times \frac{du}{dx}dx = \int \cos(u)du = \sin(u) + C = \sin\Big(g(x)\Big) + C$$

となる。

問1 $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$ を利用して次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin\left(x^3\right) \times 3x^2 dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx =$

問2 $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$ 、$\displaystyle\int \frac{1}{u}du = \log|u| + C$ 、$\displaystyle\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$

を利用して、次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int e^{g(x)} \times g'(x)dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)} \times g'(x)dx$

(3) $\displaystyle\int \Big\{g(x)\Big\}^n \times g'(x)dx$

問3 $u = g(x)$ とおいて、次の不定積分を変数 u だけの不定積分 $\displaystyle\int (u\,\text{の関数})\,du$ の形になおせ。

$$\int f\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx =$$

＜置換積分法3＞

前ページの結果より、 $u=g(x)$ とおくと

$$\int f\Big(g(x)\Big)\times g'(x)dx=\int f(u)\frac{du}{dx}dx=\int f(u)du$$

となる。

例題 $\displaystyle\int \cos(3x+2)\,dx$ を求めよ。

(解)　$u=3x+2$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=(3x+2)'=3$ だから

$$\int \cos(3x+2)\,dx=\frac{1}{3}\int 3\times\cos(3x+2)\,dx=\frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\times(3x+2)'dx$$

$$=\frac{1}{3}\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{3}\int \cos u du$$

$$=\frac{1}{3}\sin(u)+C=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$$

(別解)　$u=3x+2$ とおくと $x=\dfrac{1}{3}u-\dfrac{2}{3}$ で $\dfrac{dx}{du}=\left(\dfrac{1}{3}u-\dfrac{2}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}$
だから

$$\int \cos(3x+2)\,dx=\int \cos(u)\frac{dx}{du}du=\int \cos u\times\frac{1}{3}du$$

$$=\sin(u)\times\frac{1}{3}+C=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(5x-4)\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin(4x+3)\,dx$

<置換積分法4>

与えられた不定積分が

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

の形に書き直せるときは

$$u = g(x)$$

と置くと

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du$$

となる。

例　$\displaystyle\int x^2\left(x^3+1\right)^4 dx$ を求める。

$u = x^3 + 1$ と置くと $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$ だから

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^4 dx = \frac{1}{3}\int \left(x^3+1\right)^4 \times 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^4\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{3}\int u^4 du$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5 + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int x\left(x^2+3\right)^5 dx$

(2)　$\displaystyle\int x^3\cos\left(x^4+5\right)dx$

＜置換積分法５＞

例　$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ を求める。

$u = x^2+1$ と置くと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ であるから

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} \times 2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)} \times (x^2+1)'dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\
&= \frac{1}{2}\log|u| + C \\
&= \frac{1}{2}\log|x^2+1| + C \qquad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$

(2)　$\displaystyle\int \tan x dx$

(3)　$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

＜部分積分法１＞

例題　$\displaystyle\int x\cos dx$ を求めよ。

(解)　微分して $x\cos x$ になる関数の候補として

$x\sin x$ を考える。積の微分法より

$$(x\times\sin x)'=(x)'\times(\sin x)+(x)\times(\sin x)'$$

$$=1\times\sin x+x\times\cos x$$

となる。これを式変形すると

$$x\cos x=(x\times\sin x)'-1\times\sin x$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$\int x\cos dx=x\times\sin x-\int 1\times\sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

注）$(x\times\sin x)'$ を積分すると $x\times\sin x$ になる。

微分と積分は逆の操作であり、微分したものを
積分すると元にもどる。

問　積の微分法の公式より

$$\big(f(x)\times g(x)\big)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$$

である。これを式変形すると

$$f(x)\times g'(x)=\big(f(x)\times g(x)\big)'-f'(x)\times g(x)$$

である。この両辺を積分することにより、次の

不定積分を $g'(x)$ を使わないで表せ。

$$\int f(x)\times g'(x)dx=$$

< 部分積分法 2 >

前ページの問より

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

が成り立つ。これを **部分積分法** という。

例　$\displaystyle\int (2x+1)\sin x \ dx$ を求めたい。

$$f(x) = 2x+1 \quad , \quad g'(x) = \sin x$$

とおくと、微分して $\sin x$ になる関数は $-\cos x$ だから、

$$g(x) = -\cos x$$

より

$$\int (2x+1)\sin x dx = (2x+1)\times(-\cos x) - \int (2x+1)' \times (-\cos x)dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int (4x+5)\sin x dx$

(2)　$\displaystyle\int (3x-4)\cos x dx$

＜部分積分法 3＞

部分積分法

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

は、左辺より右辺が簡単になる場合に使われる。つまり

$f(x)g'(x)$ より $f'(x)g(x)$ の方が簡単になるように、 $f(x)$ と $g(x)$

をえらぶ 。

例題　$\int \log x dx$ を求めよ。

（解）　$\log x = (\log x) \times 1$ と考え、

とおくと、
$$f(x) = \log x \quad , \quad g'(x) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = x$$

より

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (\log x) \times 1 dx \\ &= (\log x) \times x - \int \left(\frac{1}{x}\right) \times x dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

注）$\log x$ は、微分すると $\frac{1}{x}$ になり、簡単になるから、こちらを $f(x)$ とした。

問　次の不定積分を求めよ。

$$\int (\log x) \times x^2 dx =$$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して、$F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1 置換積分法により

$$\int x^2(x^3+1)^4dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$$

を得た。これが正しいかどうか検証する。

$$y = \frac{1}{15}(x^3+1)^5,\ u = x^3+1$$

とおいて右辺を合成関数の微分法によって微分すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{15}u^5\right)' \times (x^3+1)' \\ &= \frac{1}{15} \times 5u^4 \times 3x^2 = x^2u^4 = x^2(x^3+1)^4\end{aligned}$$

より正しい。

例 2 部分積分法より

$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$$

を得たこれが正しいかどうかを検証する。右辺を微分すると、
積の微分法より

$$\begin{aligned}(x\sin x + \cos x)' &= (x)' \times \sin x + x \times (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= 1 \times \sin x + x \times \cos x - \sin x \\ &= x\cos x\end{aligned}$$

より正しい。

問 次の不定積分が正しいかどうか検証せよ。

(1) $\displaystyle\int \tan x dx = \log|\cos x| + C$

(2) $\displaystyle\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + C$

＜不定積分の練習１＞

問1 次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq -1, a \neq 1, a > 0$)

(1)$\displaystyle\int dx =$

(2)$\displaystyle\int x^n dx=$

(3)$\displaystyle\int \frac{dx}{x} =$

(4)$\displaystyle\int e^x dx =$

(5)$\displaystyle\int a^x dx =$

(6)$\displaystyle\int \cos x \;\; dx =$

(7)$\displaystyle\int \sin x \;\; dx =$

(8)$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx=$

(9)$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

(10)$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

(11)$\displaystyle\int \tan x \;\; dx =$

(12)$\displaystyle\int \log x \;\; dx =$

問2 上の公式 (2) と (3) を用いて、次の不定積分を求めよ。

(1)$\displaystyle\int \frac{1}{x^4} dx =$

(2)$\displaystyle\int \sqrt[3]{x} dx =$

(3)$\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x^2} dx =$

問3 6、7 ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1)$\displaystyle\int (6x-1)^4 dx =$

(2)$\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^4} dx =$

(3)$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} =$

(4)$\displaystyle\int \frac{dx}{5x+7} =$

(5)$\displaystyle\int \cos(3x-2) dx =$

(6)$\displaystyle\int \sin(4x-3) dx =$

(7)$\displaystyle\int e^{-2x+3} dx =$

(8)$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(4x+1)} =$

< 不定積分の練習２ >

$\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}dx = \log|x-\alpha| + C$ より分数関数で分母が因数分解できる場合は積分できる。

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ を求めたい。

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Bigr) \qquad \cdots\ (*)$$

より

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Bigr)dx \\ &= \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

(注) （$*$）のような変形を、**部分分数に分ける**という。
($*$) の形を求めるためには分母を因数分解し

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

とおくと

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

より

$$a+b=0 \ \ , \ \ a-b=1$$

となるように a と b を決めると、$a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$
が得られ ($*$) の形になる。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}dx=$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}dx=$

＜不定積分の練習３＞

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式　$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$,　$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1)　$\displaystyle\int\cos^2 x dx = \int\frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(2)　$\displaystyle\int\sin(2x)\cos x dx = \int\frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{2}\cos x + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int\sin^2 x dx =$

(2)　$\displaystyle\int\cos(3x)\cos x dx =$

(3)　$\displaystyle\int\sin(4x)\sin x dx =$

＜数列の和１＞

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \frac{6}{n(2n+1)} \times \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

であるとすると、

$$a_1 = \frac{6}{1 \times (2 \times 1 + 1)} \times 1^2 = 2$$

$$a_2 = \frac{6}{2 \times (2 \times 2 + 1)} \times \{1^2 + 2^2\} = 3$$

$$a_3 = \frac{6}{3 \times (2 \times 3 + 1)} \times \{1^2 + 2^2 + 3^2\} = 4$$

である。

問１ $n = 4, n = 5$ の場合の値を求めよ。

a_4＝ ，a_5＝

問２ 上の結果から一般項 a_n を n の式で表せ。

a_n＝

問３ 数列 $\{b_n\}$ を

b_n＝$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

とする。問２の結果を用いて b_n を n の式で表せ。

b_n＝

問４ $n = 5$ の場合に問３の結果を用いて b_5 を計算せよ

b_5＝

問５ 次式を計算し、問４の結果が正しいかどうか確かめよ。

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$＝

＜数列の和２＞

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が

$$a_n = 1 \ + 2 \ + 3 \ + \cdots \ + n, \qquad b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

であるとすると。このとき

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 & , \ b_1 = 1^3 = 1 \\ a_2 = 1 + 2 = 3 & , \ b_2 = 1^3 + 2^3 = 9 \\ a_3 = 1 + 2 + 3 = 6 & , \ b_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \end{array}$$

である。

問１ $n = 4, n = 5$ の場合の値を求めよ。

$a_4 =$ 　　　　　　　　　　, $b_4 =$

$a_5 =$ 　　　　　　　　　　, $b_5 =$

問２ 上の結果から b_n を a_n で表せ。

$b_n =$

問３ 等差数列の和と考えて、a_n を n の式で表せ。

$a_n =$

問４ 問 2、問 3 の結果から b_n を n の式で表せ。

$b_n =$

問５ $n = 5$ の場合に問 4 の結果を用いて b_5 を計算せよ

< 和の記号 $\sum$（シグマ）1 >

数列の和を表すのに、記号 $\sum$ を使って、次のように書くこともある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ここで a_k は数列の第 k 項を表し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は、k が $1, 2, 3, \cdots, n$ とかわるときの a_k をすべて加えることを表す記号である。
$\sum$ は、（アルファベットの s の大文字）S に相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

例 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

問 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} (2k-1) =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (k^2-1) =$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3 \times 4^k =$

$<$ 和の記号 $\sum$（シグマ）２ $>$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_n$$

のように記号 $\sum$ を使うと、和が簡単に書ける。

例１ (1)　$2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots 99^2$ は第 k 項が $(2k-1)^2$
である数列の初項から第５０項までの和だから

$$1^2 \;+\; 3^2 \;+\; 5^2 \;+\; \cdots \;+\; 99^2 \;=\; \sum_{k=1}^{50} (2k-1)^2$$

問１　次の和を、$\sum$ を使って表せ。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$

(2) $1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) =$

(3) $1 + 3 + 5 + \cdots + 39 =$

(4) $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 600 =$

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$　は数列 $\{a_k\}$ の第 m 項から第 n 項までの和を表す。

例２ (1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

問２　次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (k^2 + 1) =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} (3k-1)^2 =$

＜ 和の記号 $\sum$（シグマ）３ ＞

数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ と定数 c に対して、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \cdots + (a_n+b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)+(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n \\ &= c\,(\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n\ ) = c\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

より、次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k & (c\text{ は定数})\end{array}}$$

等差数列の和（ワークブック２の２３ページ）でわかったように

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

より $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

である。又 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個の和}} = n$ である。

例 $$\sum_{k=1}^{n}(4k+2) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+2\left(\sum_{k=1}^{n}1\right) = 4\times\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)+2\times n=2n^2+4n$$

問 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3) =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k-4) =$

< 和の記号 $\sum$ （シグマ） 4 >

例題　等差数列

$$1,\ 5,\ 9,\ 13, \cdots ,\ 4n-3, \cdots$$

の第 n 項までの和を求めよ。

（解）　$1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(4k-3) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) - 3 \times n = 2n^2 - n$$

問　次の等差数列の第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots ,\ 2n-1, \cdots$

(2)　$2,\ 5,\ 8,\ 11, \cdots ,\ 3n-1, \cdots$

(3)　$2,\ 7,\ 12,\ 17, \cdots ,\ 5n-3, \cdots$

< 和の記号 $\sum$ （シグマ)　5 >

２１ページ問３の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

問１　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

問２　次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

＜ 和の記号 $\sum$ （シグマ） ６ ＞

２２ページ問４の結果より

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

が成り立つ。

問１　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2=55^2=3025$$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}k^3$

$$=\left\{\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

問２　次の和を求めよ。

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=$

< 和の記号 $\sum$ （シグマ） 7 >

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を $\displaystyle\sum_{1\leqq k\leqq n} a_k$ などと記す場合もある。また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は、

k 以外の文字を使って、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ のように書いてもよい。

例１ $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{j=2}^{6} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

問１ 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} x_i =$, (2) $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} y_j =$

(3) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i^2 =$, (4) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} j^3 =$

例２
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=2}^{4}(x_i + y_j)\right\} &= \sum_{i=1}^{3}\{(x_i + y_2) + (x_i + y_3) + (x_i + y_4)\} \\ &= (x_1 + y_2) + (x_1 + y_3) + (x_1 + y_4) \\ &\quad +(x_2 + y_2) + (x_2 + y_3) + (x_2 + y_4) \\ &\quad +(x_3 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_3 + y_4)\end{aligned}$$

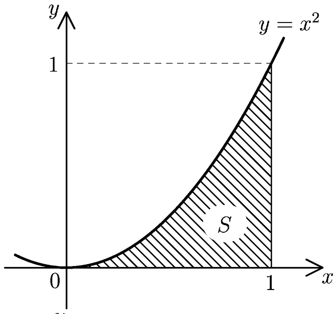
(注) 例２の和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(x_i + y_j) = \sum_{\substack{1\leqq i\leqq 3 \\ 2\leqq j\leqq 4}} (x_i + y_j)$ 等で表すこともある。

問２ 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

$$\sum_{i=2}^{4}\left\{\sum_{j=3}^{5}(x_i - y_j)\right\} =$$

＜区分求積法 1＞

例 曲線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた部分の面積 S を次のようにして求める。



$\left(\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合} \\ \text{を } \textbf{区間 } [a,b] \text{ という。} \end{array}\right)$

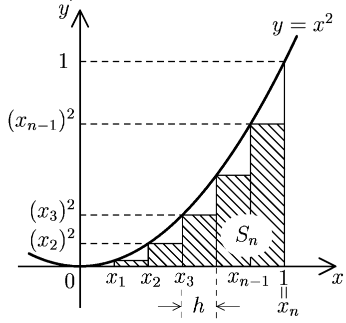
区間 $[0,1]$ を n 等分し、分割した分点を

$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$

とする。分割した小区間の幅を h とおくと、

$h=\dfrac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh=1$

となる。各分点 x_k から曲線 $y=x^2$ までの高さ $\left(=(x_k)^2\right)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は



$$\begin{aligned} S_n &= (x_1)^2h+(x_2)^2h+(x_3)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h \\ &= h^2h+(2h)^2h+(3h)^2h+\cdots+\Big((n-1)h\Big)^2h \\ &= \left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right\}h^3=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}h^3 \end{aligned}$$

20 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、 $h=\dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n=\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

ここで、分割を限りなく細かくする（ $n\to\infty$ とする ）と、 S_n は上の面積 S に近づいていく。

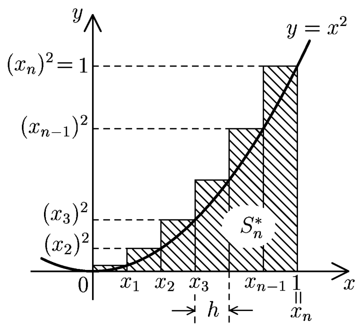
問 S の値を S_n の極限として求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

＜ 区分求積法 2 ＞

面積を求めるのに、前ページのように区間を小区間に細分し、和の極限として求める方法を **区分求積法** という。

問 前ページの面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n^* は



$$S_n^* = (x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h+(x_n)^2h$$

となる。ただし

$$h=\frac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh=1$$

である。S_n^* を n だけの式で表し、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*$ を求めよ。

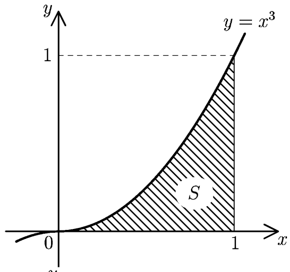
＜区分求積法 3＞

例 曲線 $y=x^3$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた部分の面積 S を区分求積法で求める。区間 $[0,1]$ を n 等分して、その分点を

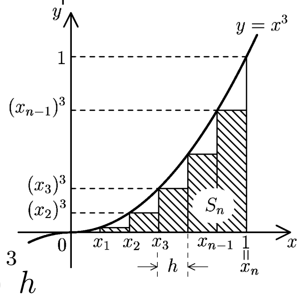
$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

とする。分割した小区間の幅を h とすると、

$$h=\frac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh=1$$



である。各分点 x_k から曲線 $y=x^3$ までの高さ $\left(=(x_k)^3\right)$ を縦とし、小区間の幅 h を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 S_n は



$$\begin{aligned}S_n&=(x_1)^3h+(x_2)^3h+(x_3)^3h+\cdots+(x_{n-1})^3h\\&=h^3h+(2h)^3h+(3h)^3h+\cdots+\left((n-1)h\right)^3h\\&=\left\{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3\right\}h^4=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right\}h^4\end{aligned}$$

21 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、

$h=\dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2\times\left(\frac{1}{n}\right)^4=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

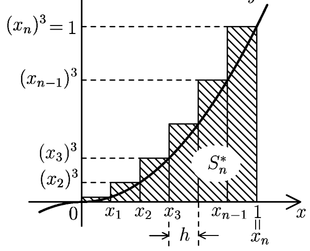
よって

$$S=\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$$

問 例と同じ面積 S を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 S_n^* は

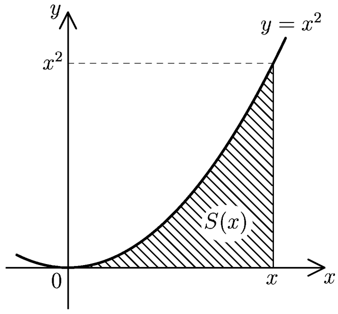
$$S_n^*=(x_1)^3h+(x_2)^3h+(x_3)^3h+\cdots+(x_n)^3h$$

となる。S_n^* を n だけの式で表し、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*$ を求めよ。



＜面積関数 $S(x)$ 1＞

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



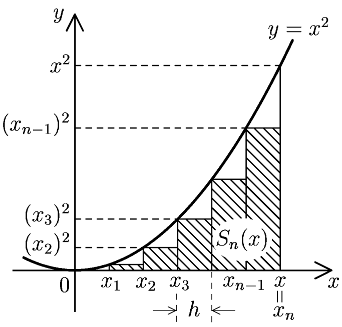
区間 $[0, x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h = \frac{x}{n}\ ,\ x_1 = h\ ,\ x_2 = 2h\ , \cdots ,\ x_n = nh (= x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned} S_n(x) &= (x_1)^2 h + (x_2)^2 h + \cdots + (x_{n-1})^2 h \\ &= h^2 h + (2h)^2 h + \cdots + \big((n-1)h\big)^2 h \\ &= \big\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\big\} h^3 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right\} h^3 \end{aligned}$$

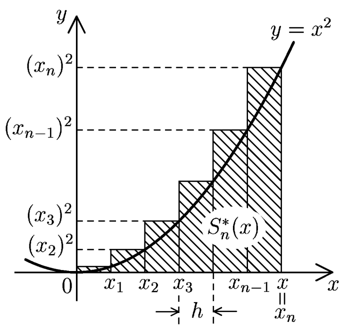
20 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、$h = \dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x) = \Big\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\Big\} \times \left(\frac{x}{n}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) x^3$$

よって

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

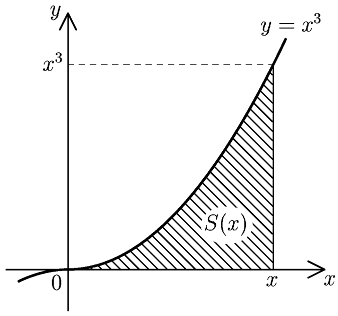


$$S_n^*(x) = (x_1)^2 h + (x_2)^2 h + \cdots + (x_n)^2 h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$ を求めよ。

＜面積関数 $S(x)$ 2＞

例 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



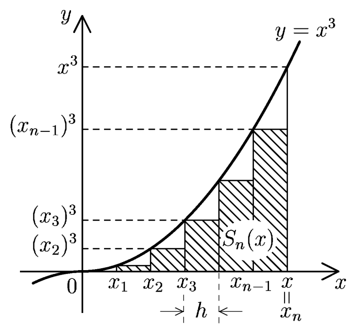
区間 $[0,x]$ を n 等分し、分割した分点を

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=x$$

とする。分割した小区間の幅を h とすれば

$$h=\frac{x}{n}\ ,\ x_1=h\ ,\ x_2=2h\ ,\cdots,\ x_n=nh(=x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は



$$\begin{aligned}S_n(x)&=(x_1)^3h+(x_2)^3h+\cdots+(x_{n-1})^3h\\&=h^3h+(2h)^3h+\cdots+\big((n-1)h\big)^3h\\&=\left\{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right\}h^4=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right\}h^4\end{aligned}$$

21 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、$h=\dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x)=\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2\times\left(\frac{x}{n}\right)^4=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2x^4$$

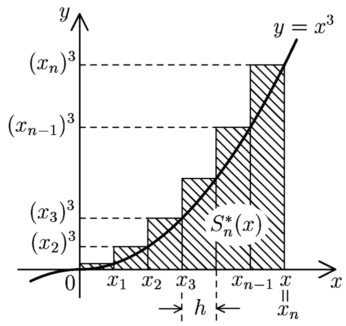
よって

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2x^4=\frac{1}{4}x^4$$

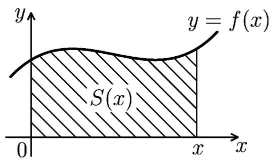
問 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

$$S_n^*(x)=(x_1)^3h+(x_2)^3h+\cdots+(x_n)^3h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*(x)$ を求めよ。



＜面積関数 $S(x)$ 3 ＞

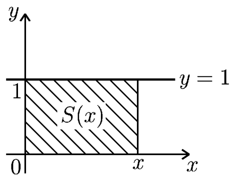


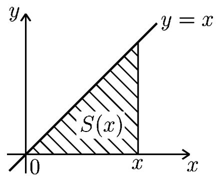
正の値をとる関数 $f(x)$ に対し、右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

問 1 下図および 33,34 ページの結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 1$ のとき $S(x) =$

(2) $f(x) = x$ のとき $S(x) =$





(3) $f(x) = x^2$ のとき $S(x) =$

(4) $f(x) = x^3$ のとき $S(x) =$

問 2 問 1 の結果から $f(x) = x^4$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

問 3 問 1、問 2 の結果から $f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

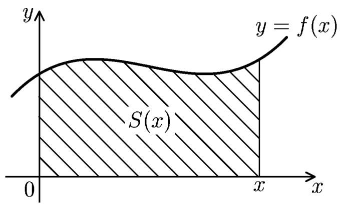
問 4 上の結果から考えて、一般の正の関数 $f(x)$ に対する面積関数を $S(x)$ とするとき、 $f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか示せ。

＜面積関数 $S(x)$ 4 ＞

前ページの結果から、一般の正の関数 $f(x)$ に対する面積関数 $S(x)$ とすると

$$\bigl(S(x)\bigr)' = f(x)$$

の関係がある。これから、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の一つであり、$S(0)=0$ を満たす。即ち



$$\boxed{S(x) = \int f(x)dx \ , \ S(0) = 0}$$

例 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ のとき

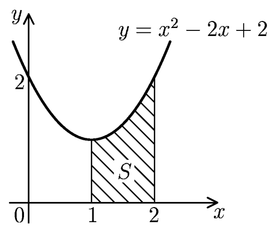
$$S(x) = \int (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C$$

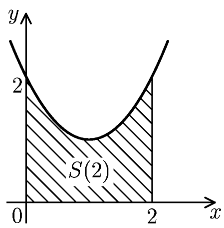
で $S(0) = 0$ より $C = 0$ 。よって、

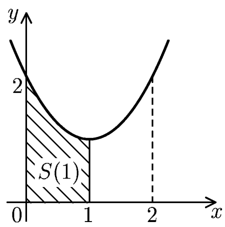
$$S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

である。曲線 $y = x^2 - 2x + 2$ と x 軸および直線 $x = 1$ と $x = 2$ で囲まれた部分 (右図の斜線部分) の面積 S は

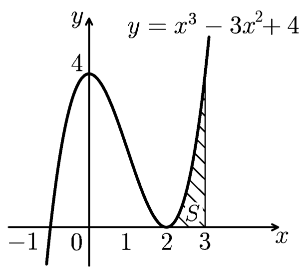
$$\begin{aligned} S &= S(2) - S(1) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times 2^3 - 2^2 + 2 \times 2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + 2 \times 1\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$







問 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ のとき、面積関数 $S(x)$ を求め、右図の斜線部分の面積 S を求めよ。



＜定積分の定義＞

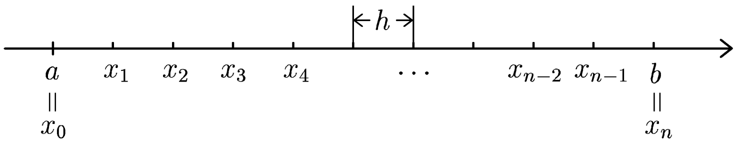
連続な関数 $f(x)$ と区間 $[a,b]$ に対し、$[a,b]$ を n 等分した分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とし、分割した小区間の幅を h とすると、$h = \dfrac{b-a}{n}$ であり、

$$x_1 = a + h \ , \ x_2 = a + 2h \ , \ \cdots \ , \ x_n = a + nh \ (= b)$$

となる。



今

$$S_n^* = f(x_1)h + f(x_2)h + \cdots + f(x_n)h$$

とおいて、$n \to \infty$ とした極限を

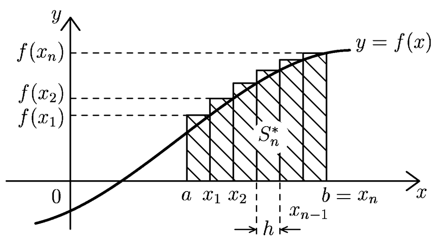
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty}\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}h}$$

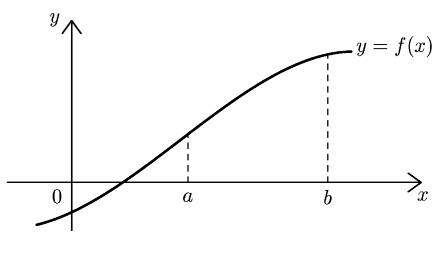
と書いて、関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの**定積分**という。

問 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき、S_n^* は右上図の斜線部分の面積を意味する。
このとき極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*$$

は何を意味するか？
右下図を使って説明せよ。





＜微分積分学の基本定理＞

$f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

は右上図の斜線部分の面積 S （図１）

を表す。面積関数 $S(x)$ を使うと

$$S = S(b) - S(a)$$

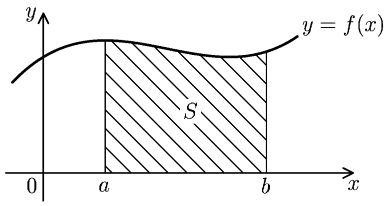
より

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

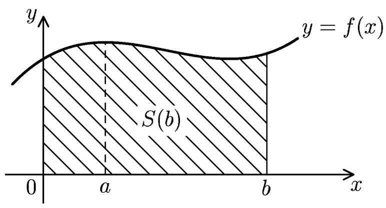
である。ここで $f(x)$ と $S(x)$ の関係は

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

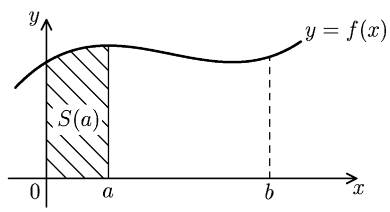
である。これを**微分積分学の基本定理**という。



（図１）



（図２）



（図３）

＜証明の概略＞

導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

である。$S(x+h) - S(x)$ は図５の斜線部分の面積であり h が小さいときは図６の長方形の面積で近似できる。すなわち

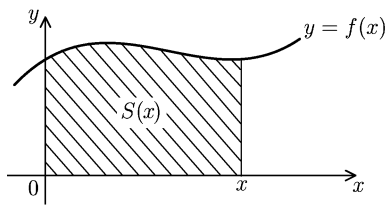
$$S(x+h) - S(x) \fallingdotseq f(x)h$$

より

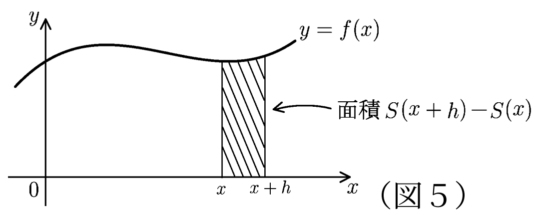
$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \quad \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$$

よって

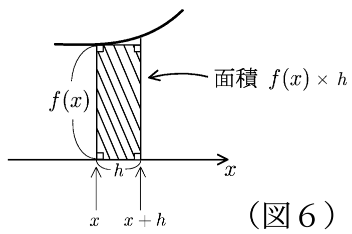
$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$



（図４）



（図５）



（図６）

＜定積分１＞

前ページの結果から

$$S'(x) = f(x)$$

のとき、すなわち

$$\int f(x)dx = S(x) + C$$

のとき定積分は

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

で計算される。今後はこの計算式を定積分の定義とする。ここで $S(b) - S(a)$ を $\Big[S(x)\Big]_a^b$ と書くことにする。つまり

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)$$

である。

例 (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 dx + C$　より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 dx + C$ より

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times 1^4 = \frac{15}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^7 dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^7 x dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^5 x^2 dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^4 x^3 dx$

＜定積分２＞

前ページより 定積分の計算式は

$$\boxed{\int f(x)dx = S(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)}$$

であった。この計算式から $a < b$ でない場合でも

$$\int_a^a f(x)dx = S(a) - S(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = S(a) - S(b) = -(S(b) - S(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

となる。

例 (1) $\displaystyle\int_1^1 (2x^4 - 5x)dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_2^1 3x^2dx = \Big[x^3\Big]_2^1 = 1^3 - 2^3 = -7$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^2 (x^6 - 7x^5)dx$

(2) $\displaystyle\int_4^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int_\pi^\pi \sin(2x)dx$

(4) $\displaystyle\int_4^1 x^3dx =$

(5) $\displaystyle\int_3^0 x^5dx$

(6) $\displaystyle\int_1^{-1} (x^2 + 3)dx$

(7) $\displaystyle\int_4^0 (x^4 + 6x^2)dx$

(8) $\displaystyle\int_2^{-2} (x^5 - x^3)dx$